Funções - Quarta Lista de Exercícios

“Módulo 1 - Funções Trigonométricas”

1. Converta de graus para radianos:

   (a) $30°$ (b) $10°$ (c) $45°$ (d) $135°$ (e) $170°$

   (f) $270°$ (g) $15°$ (h) $700°$ (i) $1080°$ (j) $36°$

2. Converta de radianos para graus:

   (a) $\frac{5\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 3π (d) $\frac{\pi}{36}$ (e) 10π (f) $\frac{3\pi}{2}$

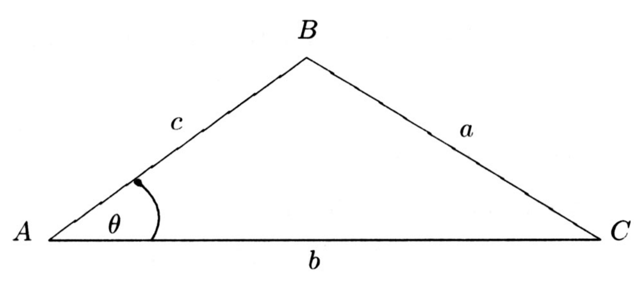
3. Um caçador está sentado numa plataforma construída numa árvore a 30 metros do chão. Ele vê um tigre sob um ângulo de $30°$ abaixo da horizontal. A que distância está o tigre?

4. Considere um triângulo com lados a, b e c, onde os ângulos opostos a estes lados são $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Prove a *lei dos senos* onde:

   $$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c}.$$

   (*Dica:* Calcule a área deste triângulo considerando cada um dos lados como a base. Estas serão todas iguais.)

5. Considere um triângulo ABC, com lados a, b e c e ângulo θ como mostra a figura.

   Com base nele, prove a *lei dos cossenos*:

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta,$$

   (*Dica:* use o Teorema de Pitágoras.)

6. Deduza fórmulas em termos de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ de:

   (a) $\operatorname{sen} 3\theta$ (b) $\cos 3\theta$ (c) $\cos 4\theta$ (d) $\operatorname{sen} 4\theta$

7. Prove as seguintes identidades trigonométricas

   (a) $1+\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$ (b) $1+\operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cossec}^2 t$

   (c) $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$

   (d) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

   (e) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

   (f) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

   (g) $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ (h) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

8. Utilize o que foi verificado no exercício anterior para mostrar que:

   (a) $\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)]$

   (b) $\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) + \cos(\theta+\phi)]$

   (c) $\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta-\phi)]$

   (d) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$

   (e) $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$

   (f) $\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$

   (g) $\cos\theta - \cos\phi = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$

9. Resolva:

   (a) $2\cos^2 x + 3 = 5\cos x$ (b) $\cos 7x = \cos 3x$

   (c) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$ (d) $\operatorname{sen} 3x - 2\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

10. Faça o estudo completo das funções cossecante e cotangente, definidas respectivamente por:

    (a) $f : t \mapsto \operatorname{cossec} t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ (b) $f : t \mapsto \operatorname{cotg} t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$.

11. Sem utilizar calculadora, complete a seguinte tabela, marcando $\nexists$ quando a função não estiver definida.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{6}$
$\operatorname{sen}\theta$											
$\cos\theta$											
$\tan\theta$											
$\sec\theta$											
$\operatorname{cotg}\theta$											
$\operatorname{cossec}\theta$											

12. Qual é a diferença entre $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$? Expresse cada uma das três funções em forma de composição.

13. Utilizando uma calculadora, calcule o valor da função para valores de θ dados em radianos.

    (a) $\operatorname{sen}\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; -2,6; π; $-\frac{\pi}{2}$; e 5000.

    (b) $\cos\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 2,5; 3; 5280; -782; π, $-\frac{\pi}{2}$; e $\frac{3\pi}{2}$.

    (c) $\operatorname{tg}\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; π; $\frac{\pi}{4}$; e 1000.

    (d) $\operatorname{cotg}\theta$, onde $\theta = 1$; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; e 700.

    (e) $\sec\theta$, onde $\theta = 0$; 1; 1,5; π; $\frac{\pi}{4}$; e 1000.

    (f) $\operatorname{cossec}\theta$, onde $\theta = 1$; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; e 700.

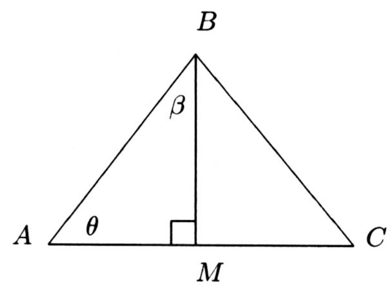
14. Expresse as seguintes funções em termos de funções seno e/ou cosseno somente

    (a) $\operatorname{tg}\theta$ (b) $\cos^2\frac{\theta}{2}$ (c) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$ (d) $\operatorname{cossec}^2\frac{\theta}{2}$ (e) $\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$

15. Se os ângulos de um triângulo medem x, $x+1$ e $x+2$ (em radianos), encontre x.

16. Um satélite foi lançado em uma órbita circular ao redor da Terra. Se sua distância do centro da Terra é de aproximadamente 10 000 km, que distância ele percorre quando varre um ângulo de $\frac{\pi}{4}$, com respeito ao centro da Terra?

17. A seguir temos o triângulo ABC, onde $AB = BC = CA = 2$ e $AM = MC$.



Com base nele encontre:

(a) O comprimento BM (b) θ e β em radianos.
(c) $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\theta$ e $\operatorname{tg}\beta$.

18. Dado um triângulo ABC, se $\widehat{C} = \pi/2$ e $\widehat{A} = \widehat{B}$, encontre $\widehat{A}$ em radianos e calcule $\cos\widehat{A}$, $\operatorname{sen}\widehat{A}$ e $\operatorname{tg}\widehat{A}$. (*Dica:* Aqui $\widehat{A}$ representa o ângulo no vértice A, $\widehat{B}$ o ângulo no vértice B, e $\widehat{C}$ representa o ângulo no vértice C. Faça um desenho.)

19. Calcule os seguintes valores das funções em cada ângulo. (*Dica:* Use identidades trigonométricas.)

(a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (b) $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ (c) $\cos(\frac{\pi}{2} + \pi)$
(d) $\operatorname{sen}(3\pi) + \cos(3\pi)$ (e) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{12})$

20. Em $t = 0$ dois carros se encontram na intersecção de duas estradas retas, com velocidades v_1 e v_2. As duas estradas se cruzam formando um ângulo θ.

(a) Qual é a distância entre os carros t horas depois deles passarem pelo cruzamento?

(b) Calcule a distância entre os carros 1 hora após passarem pelo cruzamento se:

(a) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ (b) $v_1 = v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$
(c) $v_1 = v_2$ e $\theta = 0$ (d) $v_1 = 2v_2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

21. Dadas as funções f e g a seguir, obtenha $f \circ g$ e $g \circ f$ e seus respectivos domínios de definição:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x$.
(b) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$

22. Encontre funções f e g de modo que a função h possa ser escrita como $h = f \circ g$. Nem f nem g devem ser a função identidade.

(a) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ (b) $h(x) = \operatorname{sen} x^2$

(c) $h(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (d) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

(e) $h(x) = \operatorname{sen}^2 3x$ (f) $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

(g) $h(x) = \cos|x|$ (h) $h(x) = \tan(x^2+1)$

(i) $h(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ (j) $h(x) = 2^{\operatorname{cossec} x}$

(k) $h(x) = 3\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1$ (l) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x)$

23. Dizer como as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 4^x$ e $h(x) = \operatorname{tg} x$ devem ser compostas para que se obtenha a função $h(x) = 4^{\operatorname{tg} x^2}$.

24. Escavações arqueológicas encontraram um antigo aparelho que, ao que tudo indica, era utilizado para tocar LP's. As marcações de velocidade do aparelho eram $33\frac{1}{2}$, 45 e 78 rotações por minuto. Em cada caso, qual é o período do movimento?

25. Calcular o período das funções

(a) $\operatorname{tg} 4x$ (b) $\operatorname{sen}(x^2)$ (c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x)$.

(d) $\cos(\frac{2}{3}x^2)$ (e) $\operatorname{cossec}(\frac{\pi}{7}\sqrt{x})$ (f) $\operatorname{cotg}(7Bx)$ (onde $B > 0$).

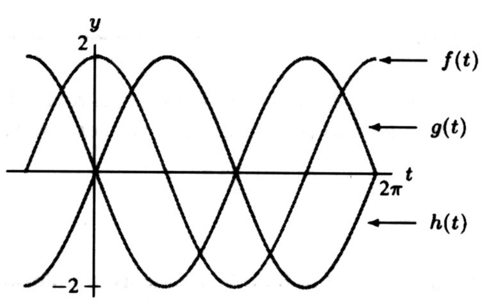
26. Esboce o gráfico das seguintes funções, identificando cuidadosamente as amplitudes e períodos. Não use calculadora gráfica ou computador.

(a) $y = 3\operatorname{sen} x$ (b) $y = 3\operatorname{sen} 2x$ (c) $y = -3\operatorname{sen} 2\theta$.

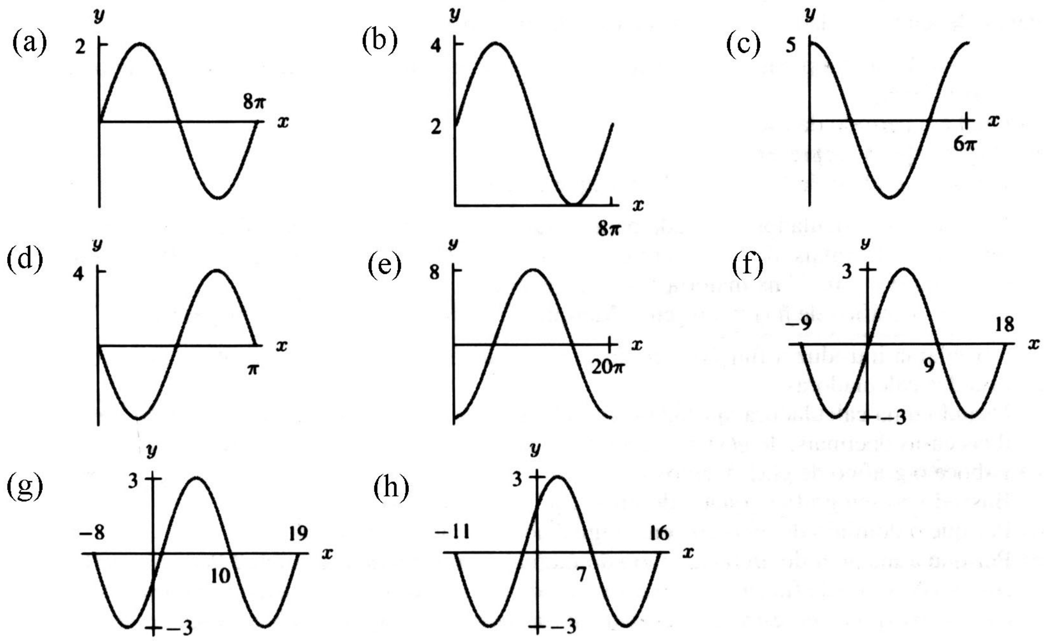
(d) $y = 4\cos 2x$ (e) $y = 4\cos(\frac{1}{4}t)$ (f) $y = 5 - \operatorname{sen} 2t$

27. Relacione as funções abaixo com os gráficos da figura, explicando os por quês.

(a) $y = 2\cos(t - \frac{\pi}{2})$ (b) $y = 2\cos t$ (c) $y = 2\cos(t + \frac{\pi}{2})$.



28. Nos itens a seguir, encontre uma possível fórmula para cada gráfico



29. A profundidade de um tanque oscila, conforme uma senóide, uma vez a cada 6 horas, em torno de uma profundidade média de 7 metros. Se a profundidade mínima é de 5,5 metros e a máxima é de 8,5 metros, encontre uma fórmula para a profundidade em função do tempo, medido em horas.

30. Uma população de animais varia de forma senoidal entre um mínimo de 700 em 1º de janeiro e um máximo de 900, em 1º de julho.

    (a) Esboce o gráfico da população *versus* tempo.

    (b) Encontre uma fórmula para a população em função do tempo t, medido em meses desde o início do ano.

31. A voltagem V, de um ponto de luz residencial é dada em função do tempo t (em segundos), por $V = V_0 \cos(120\pi t)$.

    (a) Qual é o período da oscilação?

    (b) O que V_0 representa?

    (c) Esboce o gráfico de V *versus* t, identificando os eixos.

32. É dado que duas funções trigonométricas têm período π e que seus gráficos cortam-se em $x = 3,64$, mas não é dado nada mais.

    (a) Você sabe dizer se os gráficos dessas funções se cortam em algum outro valor de x, positivo e menor? Se for o caso, qual é esse valor?

    (b) Encontre um valor de x, maior que 3,64, para o qual os gráficos se cortam.

    (c) Encontre um valor negativo de x para o qual os gráficos se cortam.

33. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\mathrm{sen}\,3t + 3\cos t$.

    (b) Qual é o período de $\mathrm{sen}\,3t$? E de $\cos t$?

    (c) Use a resposta da parte (b) para justificar sua resposta da parte (a).

34. (a) Usando uma calculadora gráfica, ou um computador, encontre o período de $2\,\mathrm{sen}\,4x + 3\cos 2x$.

    (b) Dê a resposta exata ao item anterior (como um múltiplo de π).

    (c) Determine o período de $\mathrm{sen}\,4x$ e de $\cos 2x$ e use esses valores para explicar sua resposta na parte (a).

35. Se m e n são dois números naturais, obtenha o período da função $\cos(mx) + \mathrm{sen}(nx)$.

36. Defina e trace o gráfico das inversas das seguintes restrições principais de funções trigonométricas (não dê resultados aproximados):

    (a) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ (b) $\mathrm{cotg} :]0, \pi[\to \mathbb{R}$

    (c) $\sec : [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \to [1, +\infty[\cup] -\infty, -1]$

    (d) $\mathrm{cossec} : [-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}] \to] -\infty, 1] \cup]1, \infty[$

37. Calcule:

    (a) $\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{2}$ (b) $\arccos\frac{1}{2}$ (c) $\mathrm{arctg}\,1$ (d) $\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}$

    (e) $\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ (f) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ (g) $\mathrm{arctg}\,0$ (h) $\mathrm{arcsen}\,1$

    (i) $\mathrm{arcsen}\,0$ (j) $\arccos 1$ (k) $\arccos 0$ (l) $\mathrm{arccotg}(-1)$

    (m) $\mathrm{arctg}(-1)$ (n) $\mathrm{arccotg}\,\sqrt{3}$ (o) $\mathrm{arcsen}(-\frac{1}{2})$ (p) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$

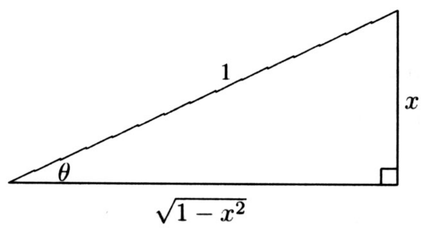
38. Prove que $\mathrm{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente.

39. Prove que $\operatorname{tg} x$ é estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

40. Para simplificar a expressão $\cos(\operatorname{arcsen} x)$, começamos colocando $\theta = \operatorname{arcsen} x$, com as restrições

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Como $\operatorname{sen}\theta = x$, pela definição de arcsen, podemos construir um triângulo retângulo e calcular o terceiro lado pelo Teorema de Pitágoras:



Observe que $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ é $\cos\theta$. Desta forma, o desenho nos mostra que:

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$$

Usando uma idéia semelhante a essa, simplifique e calcule:

(a) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ (b) $\operatorname{sen}(\arccos x)$ (c) $\cos(\operatorname{arctg} x)$

(d) $\cos(\operatorname{arcsec} x)$ (e) $\operatorname{tg}(\arccos x)$ (f) $\operatorname{sen}(\arccos 1)$

(g) $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ (h) $\operatorname{tg}(\arccos 0)$

Módulo 2 - Polinômîos e Funções Racionais

41. Se $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + x^4$ e $h(x) = x^2 + x^4 + x^6$ e $k(x) = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ encontre números reais a, b e c tais que $k = af + bg + ch$.

42. Obtenha $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que os polinômios $f(x) = x^4 + 20x^3 - 4\alpha x + 4$ e $g(x) = x^2 + 2x + 2$ verifiquem a condição $f = g^2$.

43. Em cada caso, determine um polinômio do segundo grau $f(x)$ de modo que:

(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$.

(b) $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x-1)$ para todo x

44. (a) Se $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinômios, prove que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

onde o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $g(x)$. Explique o que isso significa em termos de divisão de polinômios.

(b) Mostre que se a é uma raiz de um polinômio $f(x)$, isto é, $f(a) = 0$, então

$$f(x) = (x-a)q(x),$$

Onde $q(x)$ é um polinômio com grau um a menos que $f(x)$.

45. Nos itens a seguir, fatore o polinômio o máximo possível.

(a) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$

(b) $p(y) = 2y^3 + 3y^2 - 8y + 3$

(c) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

(d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$.

(e) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

(f) $p(x) = x^3 - 27$

(g) $p(x) = x^4 - 1$

(h) $p(y) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$

(i) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 8x$

(j) $p(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$

(k) $p(x) = -2x^4 + 7x^2 - 3$

(l) $p(x) = x^2 - 4$

(m) $p(x) = x^2 - 3$

46. Cada um dos itens a seguir pode ser escrito na forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios. Veja como fazemos isso para a expressão $\dfrac{1}{y-x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$:

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y-x}\left(\frac{y-x}{xy}\right) = \frac{1}{xy}$$

(a) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y}$

(b) $24xy\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)$

(c) $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3}\right)$

(d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{3}$.

(e) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}}{x-3}$

(f) $\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{2+(1+t)}{(1+t^2)^2}$

(g) $\dfrac{x+\frac{1}{x-2}}{x-1}$

(h) $\dfrac{x^2+\frac{4x^2+1}{x^2-2}}{(x^2+1)^2}$

(i) $\dfrac{1}{36}(3x^2-\frac{3}{x^2})^2+1$

(j) $\dfrac{1}{4}(x^3-\frac{1}{x^3})^2+1$

(k) $1+\left(x^2-\dfrac{1}{4x^2}\right)^2$

(l) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x-1}$

(m) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}$

(n) $x-1+\dfrac{1}{2x}$

47. Em cada item efetue as divisões de polinômios indicadas, conforme ilustra o exemplo a seguir:

$$\frac{x^2+3x+1}{2x-1}=\frac{x}{2}+\frac{7}{4}+\frac{11}{4(2x-1)}$$

(a) $\dfrac{(x-2)^2}{x}$

(b) $\dfrac{4x^2+4x+1}{x}$

(c) $\dfrac{5+t}{5-t}$

(d) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$

(e) $\dfrac{3x-2}{2x+3}$

(f) $\dfrac{4x+1}{3x-1}$

(g) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(h) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$

(i) $\dfrac{-x^3}{x+3}$

(j) $\dfrac{x^3-3}{x(x^2-9)}$

(k) $\dfrac{x^3-3x+2}{x+3}$

(l) $\dfrac{x^5+1}{x+1}$

(m) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$

(n) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

48. Nos itens a seguir:

- Encontre todos os valores de x para os quais a função não está definida.
- Expresse a função $f(x)$ na forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios. Então fatore e simplifique onde for possível.
- Determine para quais valores de x se tem $f(x)=0$.

- Determine para quais valores de x se tem $f(x) > 0$, e para quais se tem $f(x) < 0$.

(a) $x-4+\dfrac{4}{x}$

(b) $4x+4+\dfrac{1}{x}$

(c) $\dfrac{10}{5-t}-1$

(d) $\dfrac{1}{1-x^2}-1$

(e) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2x+3}$

(f) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{3(3x-1)}$

(g) $1+\dfrac{2}{x^2-1}$

(h) $\dfrac{1}{1+x^2}+1$

(i) $\dfrac{-x^3}{x+3}$

(j) $\dfrac{x^3-3}{x(x^2-9)}$

(k) $\dfrac{27}{x+3}-x^2+3x-9$

(l) $\dfrac{9x-3}{x^3-9x}+1$

(m) $x^2-3x+6-\dfrac{16}{x+3}$

49. Dividindo o polinômio $f(x)$ por x^2-3x+5 obtemos quociente x^2+1 e resto $3x-5$. Determine $f(x)$. (Há várias possibilidades.)

50. Determine os números a e b de modo que o polinômio $f(x) = x^4-3ax^3+$ $+(2a-b)x^2+2bx+(a+3b)$ seja divisível por $g(x) = x^2-3x+4$.

51. Determinar p e q de modo que x^4+1 seja divisível por x^2+px+q.

52. Se x^3+px+q é divisível por x^2+ax+b e por x^2+rx+s prove que $b = -r(a+r)$.

53. Determinar a de modo que a divisão de $x^4-2ax^3+(a+2)x^2+3a+1$ por $x-2$ tenha resto 7.

54. Determinar um polinômio do terceiro grau que se anula em $x=1$ e que dividido por $x+1$, $x+2$ e $x-2$ tenha resto 6.

55. Qual deve ser o valor do coeficiente c para que os restos da divisão de $x^{10}+ax^4+bx^2+cx+d$ por $x+12$ e $x-12$ sejam iguais?

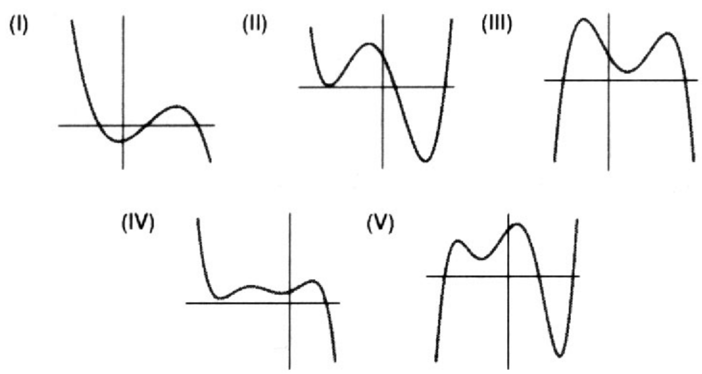
56. As divisões de um polinômio $f(x)$ por $x-1$, $x-2$ e $x-3$ são exatas. O que se pode dizer do grau de f?

57. O resto da divisão de um poliômio $f(x)$ por $x+2$ e x^2+4 produz restos 0 e 1, respectivamente. Qual o resto da divisão de $f(x)$ por $(x+2)(x^2+4)$?

58. O gráfico de cada uma das figuras abaixo representa um polinômio. Para cada um deles determine:

    (a) qual o menor grau possível do polinômio.

    (b) O coeficiente líder do polinômio é positivo ou negativo? (O coefciente líder é o coeficiente da potência mais alta de x.)



59. Esboce o gráfico dos seguintes polinômios:

    (a) $f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $f(x)=5(x^2-4)(x^2-25)$

    (c) $f(x)=-5(x^2-4)(25-x^2)$ (d) $f(x)=5(x-4)^2(x^2-25)$

60. Para que inteiros positivos n, o polinômio $f(x)=x^n$ é uma função

    (a) par (b) ímpar

61. Que polinômios são pares? E ímpares? Existem polinômios que não são nem pares nem ímpares?

62. Se $f(x)=ax^2+bx+c$, o que você pode dizer de a, b e c se:

    (a) (1,1) está no gráfico de $f(x)$?

    (b) (1,1) é o vértice do gráfico de $f(x)$?

(c) A intersecção do gráfico com o eixo dos y é (0,6)?

(d) Encontre uma função quadrática que satisfaça todas as três condições anteriores.

63. Encontre um polinômio cujas raízes sejam -2, -1, 1 e 4, todas com multiplicidade 1.

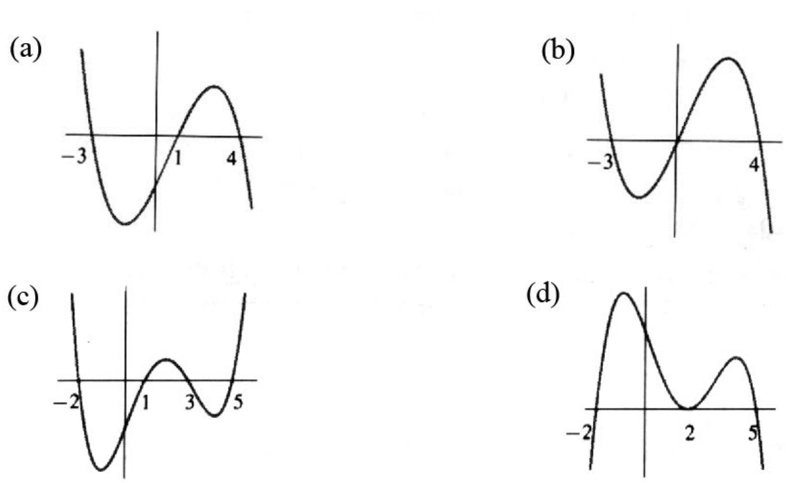
64. Em cada caso, encontre um polinômio com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:

(a) $\sqrt{2}+1$ e $\sqrt{2}-1$

(b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

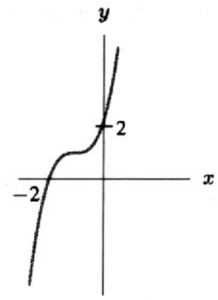
(c) $\sqrt{6}$, $1-\sqrt{5}$ e -1

65. Para cada um dos itens a seguir: encontre uma possível fórmula para o gráfico; obtenha os intervalos aproximados onde a função é crescente e onde é decrescente.



66. Encontre os polinômios cúbicos que representam o gráfico de:

67. Transladando o gráfico de x^3 encontre o polinômio cúbico com gráfico semelhante ao da figura



68. Encontre todas as raízes racionais dos seguintes poinômios

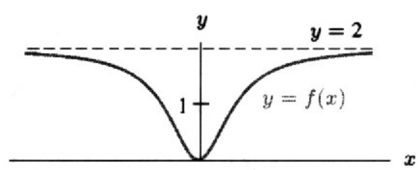
(a) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ (b) $f(x) = x^3 + 8$

(c) $f(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{6}$ (d) $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$.

69. Quais as possíveis raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$?

70. Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

71. O gráfico de uma função racional é dado pela figra abaixo:



Se $f(x) = g(x)/h(x)$ com $g(x)$ e $h(x)$ ambas funções quadráticas, obtenha as fórmulas para $g(x)$ e $h(x)$. (Há várias possibilidades.)

72. Determine uma condição necessária e suficiente para que $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2}$ seja uma função constante, onde $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ são não nulos.

73. (a) Calcule as assíntotas (verticais e horizontais) e esboçe o gráfico de $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$.

(b) Mostre que f é uma função injetora em seu domínio e que $f(x) = f^{-1}(x)$.

74. Encontre as assíntotas e esboce o gráfico de:

    (a) $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

    (c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

    (e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

    Atenção: Nos itens (d) e (e) há assíntotas inclinadas. Nesses casos faça primeiro a divisão do polinômio para depois traçar o gráfico. Confira seus esboços com um programa de computador.

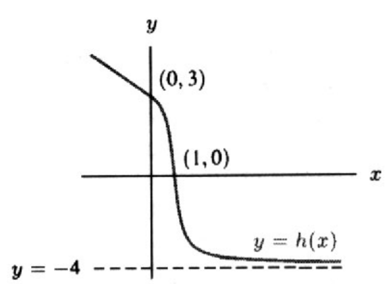
75. Encontre as assíntotas e esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2+1}$.

76. Um terreno é delimitado na forma de um retângulo com área 144 m^2.

    (a) Escreva uma expressão para o merímetro P como uma função do comprimeto x.

    (b) Esboce um gráfico da função perímetro e determine, aproximadamente, a partir do gráfico, as dimensões nas quais o perímetro é mínimo.

77. A figura a seguir ilustra o gráfico de $h(x)$.



Com base nele faça o que se pede e responda à pergunta:

(a) Esboçe o gráfico de $y = h^{-1}(x)$, e de $y = \dfrac{1}{h(x)}$.

(b) O que acontece com a assíntota quando você esboça o gráfico da inversa?

78. Construa o gráfico de $f(x) = x^3 + 2x$ e, a partir dele, obtenha o número de raízes reais de $f(x) = 0$.

79. Quantas são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$ no intervalo $[0,3[$?

80. Determine α de modo que $f(x) = x^3 + x^2 + 5x + \alpha$ tenha pelo menos uma raiz no intervalo $]-2,0[$.

81. Dizemos que um número é *algébrico* se ele é a raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que os seguintes números são algébricos:

    (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ (e) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

82. Mostre que o número $\alpha = \sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$ é inteiro. (*Dica:* construa um polinômio tendo α como raiz, e mostre que todas suas raízes são inteiras.)

83. *Desafio.* Indicamos por $\mathbb{Q}[x]$ o conjunto dos polinômios de todos os graus na variável x, com coeficientes racionais. Chamamos um subconjunto $I \subset \mathbb{Q}[x]$ de *ideal* se:

    - para todos os $p(x), q(x) \in I$ tem-se $p(x) + q(x) \in I$.
    - para todos os $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e $p(x) \in I$ tem-se $f(x)p(x) \in I$

    Prove que se I é um ideal de $\mathbb{Q}[x]$ existe um polinômio $h(x)$ de modo que todo elemento de I pode ser obtido multipicando $h(x)$ por algum polinômio de $\mathbb{Q}[x]$.