

Funções - Quinta Lista de Exercícios

Módulo 1 - Seqüências e Séries

1. Em cada caso, escreva os quatro primeiros termos da seqüência (a_n) :

(a) $a_n = \frac{1}{10^n}$ (b) $a_n = \frac{3n}{n+5}$ (c) $a_n = 5 - 2n$

(d) $a_n = n[1 - (-1)^n]$ (e) $a_1 = 5, a_n = 2a_{n-1} - 1$ (f) $a_1 = 4, a_n = -a_{n-1}/5, n > 1$

2. A seqüência definida recursivamente por $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + x}{2a_{n-1}}$, com a_1 escolhido de forma arbitrária, pode ser usada para aproximar \sqrt{x} para qualquer grau desejado de precisão. Encontre os primeiros quatro termos da seqüência $a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 5}{2a_{n-1}}, n > 1$ e compare com a aproximação obtida com a calculadora para $\sqrt{5}$.

3. Encontre uma fórmula para o n -ésimo termo de uma seqüência cujos primeiros quatro termos são dados por:

(a) 4, 7, 10, 13, ... (b) 1, -3, 5, -7

(c) $\frac{6}{7}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{11}, -\frac{9}{13}, \dots$ (d) $\frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}, \frac{x^6}{6!}, \frac{x^8}{8!}, \dots$

4. Escreva na forma expandida:

(a) $\sum_{k=1}^4 \frac{(-2)^k}{k+1}$ (b) $\sum_{k=3}^6 \frac{x^k}{(k+1)!}$ (c) $\sum_{k=1}^4 \frac{x^k}{(k+1)(k+2)}$

5. Escreva a soma em cada item utilizando a notação de somatório

(a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9}$ (b) $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - 6x^6$ (c) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

Módulo 2 - Seqüências e Séries Especiais

6. As seguintes progressões são aritméticas, geométricas ou nenhuma das duas?

(a) $\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, \dots$ (b) $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \dots$ (c) $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \dots$

(d) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots$ (e) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

7. Para as seguintes progressões aritméticas determine a razão, escreva os próximos três termos e o n -ésimo termo:

(a) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$ (b) $-8, -5, \dots$ (c) $\pi, 3\pi, \dots$

8. Determinar a de modo que $a^2, (a+1)^2, (a+5)^2$ seja uma progressão aritmética.

9. Obter três números que estão progressão aritmética e a soma de seus inversos é $\frac{23}{30}$.

10. Determinar uma progressão aritmética cujo 6^o termo é 7 e o 10^o é 15.

11. Determinar uma progressão aritmética (a_n) onde se verificam as relações

$$a_{12} + a_{21} = 302 \quad \text{e} \quad a_{23} + a_{46} = 446$$

12. Determinar quantos números inteiros de três algarismos são múltiplos de 13.

13. Determinar quantos naturais entre 1 000 e 10 000 não são divisíveis nem por 5 nem por 7.

14. Encontre a soma dos 120 primeiros naturais.

15. Determine uma progressão aritmética de 60 termos, em que a soma dos 59 primeiros termos é 12 e soma dos 59 últimos é 130.

16. Para as seguintes progressões geométricas determine a razão, escreva os próximos três termos e o n -ésimo termo:

(a) $\frac{3}{32}, \frac{3}{4}, \dots$ (b) $-5, 5, -5, \dots$ (c) $1; 1,05; \dots$

17. Para as seguintes progressões geométricas determine a razão e encontre a soma dos termos (ou verifique que a soma é indefinida):

(a) $4, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \dots$ (b) $\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots$ (c) $36, -12, 4, \dots$

18. Determine o valor de x , sabendo que $x, x+9$ e $x+45$ estão em progressão geométrica.

19. Sabendo que a seqüência $x + 1, x + 3, x + 4, \dots$ é uma progressão geométrica, calcule o quarto termo.
20. Que tipo de progressão os termos da seqüência $a_n = \text{sen}(x + n\pi)$ formam, se $x \neq 0$?
21. Calcular os ângulos x , em radianos, de modo que os números $\frac{\text{sen } x}{2}$, $\text{sen } x$ e $\tan x$ formem uma progressão geométrica.
22. Prove que se x, y, z estão em progressão geométrica então
- $$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$
23. Suponha que foi depositado R\$ 0,01 em uma conta de um banco no primeiro dia de junho, R\$ 0,02 no segundo dia, R\$ 0,04 no terceiro dia, e assim por diante, em uma progressão geométrica.
- (a) Quanto dinheiro seria depositado, seguindo essa seqüência, no dia 30 de junho?
- (b) Quanto dinheiro teria essa conta após o último depósito?
24. (a) Calcular a soma $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \dots + \log_2 2^n a$.
- (b) Qual o valor de a se $S = n + 1$?
25. Calcular a soma $S = \frac{3}{5} + \frac{6}{35} + \frac{12}{245} + \dots$.
26. Os termos de uma seqüência (a_n) formam uma progressão geométrica, cujos três primeiros termos são: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}$. Determine o valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
27. Divide-se um segmento de comprimento m em três partes iguais e retira-se a parte central; para cada um dos segmentos repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais e assim sucessivamente. Calcular a soma dos comprimentos retirados.
28. Um tabuleiro de xadrez é formado por um quadriculado de 8×8 . Fazemos o seguinte procedimento: colocamos no primeiro quadrado um feijão, no segundo dois feijões, no próximo quatro, e assim por diante, colocando no quadrado seguinte o dobro do anterior.

- (a) Quantos feijões serão usados em todos os quadrados do tabuleiro?
- (b) Um dos maiores navios cargueiros do mundo consegue transportar 500 000 toneladas de carga. Se cada grão de feijão pesar 1 g, quantos desses navios serão necessários para transportar todo o feijão usado no tabuleiro?
29. *Desafio:* O conjunto de Cantor K é definido tomando-se o intervalo $[0, 1]$ e retirando o terço médio; para cada um dos intervalos restantes repete-se o processo retirando-se seus terços médios e assim sucessivamente. Mostre que $\frac{1}{4} \in K$.