# Resumo 11 - *Testes de Hipóteses*

## 11.1. *Introdução*

Como para a estimação, o propósito dos testes de hipóteses é ajudar o pesquisador a tomar uma decisão referente a uma população, examinando uma amostra (a menos que se indique o contrário, essa amostra será aleatória) dessa população. A estimação e o teste de hipóteses não são tão diferentes como pode parecer, pelo fato de a maioria dos livros tratar os dois assuntos separadamente. Como será explicado posteriormente, pode usar-se intervalos de confiança para alegar as mesmas conclusões que se alcançam usando os procedimentos de teste de hipóteses que serão discutidos aqui.

A aplicação de um teste estatístico (ou de significância) serve para verificar se os dados amostrados fornecem evidência suficiente para que se possa aceitar como verdadeira a hipótese de pesquisa, precavendo-se, com certa segurança, de que as diferenças observadas nos dados não são meramente casuais.

Uma *hipótese* pode definir-se simplesmente como uma afirmação acerca de uma ou mais populações. Em geral, a hipótese se refere aos parâmetros da população sobre os quais há a afirmação.

Um administrador de um hospital pode estabelecer a hipótese de que a duração média de internamento dos pacientes admitidos em seu hospital é de cinco dias; uma enfermeira de saúde pública pode emitir a hipótese de que um programa educacional particular fará que melhore a comunicação entre enfermeira e paciente; um médico pode estabelecer a hipótese de que certo medicamento será eficaz em 90% dos casos em que se use. Por meio de hipóteses se determina se tais proporções são compatíveis ou não com os dados de que se dispõem.

Por conveniência, o teste de hipótese será apresentado como um procedimento de nove passos. Nada há de mágico com este formato particular, a não ser pelo fato de decompor o processo em uma seqüência lógica de ações e decisões.

1. ***Dados:*** Deve compreender-se a natureza dos dados que formam a base dos procedimentos de teste, já que está determina o teste que se deve empregar. Deve determinar-se, por exemplo, se os dados consistem de medidas ou atributos.
2. ***Suposições:*** Como se aprendeu no capítulo sobre estimação, suposições diferentes conduziram a modificações nos intervalos de confiança. O mesmo acontece em testes de hipóteses: um procedimento geral se modifica dependendo das suposições. De fato, as mesmas suposições que tinham importância na estimação, também são importantes em testes de hipóteses. Foi visto que estas incluem, entre outras, suposições acerca da normalidade da distribuição da população, igualdade das variâncias e independência das amostras.

3. ***Hipóteses:*** Em testes de hipótese se trabalha com duas hipóteses que devem enunciar-se explicitamente. A primeira hipótese que deve provar-se é conhecida como *hipótese nula*, a qual é designada pelo símbolo $H_0$. As vezes dá-se o nome de *hipótese de não diferença* a hipótese nula, já que é uma proposição de conformidade com condições verdadeiras da população de interesse. Em geral, a hipótese nula é estabelecida com o propósito expresso de ser desacreditada. Como conseqüência, o oposto a conclusão que o investigador deseja alcançar, se converte na hipótese nula. No processo de teste, se rejeita ou não a hipótese nula. Se a hipótese nula não é rejeitada, dizemos que os dados sobre os quais se baseia o teste não proporcionam evidência suficiente que provoque a rejeição. Se o procedimento de teste conduz a rejeição, dizemos que os dados disponíveis não são compatíveis com a hipótese nula, mas são apoio de alguma outra hipótese. Esta outra hipótese é denominada de *hipótese alternativa*, e pode ser denotada por $H_A$ ou $H_1$.

Devemos assinalar que, em geral, nem o teste de hipótese, nem a inferência estatística, conduz a demonstração de uma hipótese, e sim, simplesmente indica se a hipótese é apoiada ou não pelos dados de que se dispõem. Por outro lado, quando não é possível rejeitar uma hipótese, não se diz que ela é verdadeira, mas que ela pode ser verdadeira. Quando se fala em aceitar uma hipóteses nula, se tem presente esta limitação e não se deseja comunicar a idéia de que a aceitação implica em demonstração.

4. ***Estatística de Teste:*** A estatística de teste é uma estatística que pode ser calculada a partir dos dados da amostra. Como regra, existem muitos valores possíveis que pode ter a estatística de teste, dependendo o valor particular observado em uma amostra particular extraída. Como se verá, a estatística de teste serve como um produtor de decisões, já que a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula depende da magnitude da estatística de teste.

   Um exemplo de estatística de teste é a quantidade $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, com a qual já estamos familiarizados. Os valores da estatística de teste são pontos sobre uma reta que serve como eixo horizontal para a distribuição da estatística.

5. ***Distribuição da Estatística de Teste:*** Já foi dito que a clave para a inferência estatística é a distribuição amostral. Recordamos isso quando é necessário especificar a distribuição de probabilidade da estatística de teste. Por exemplo, a distribuição da estatística de teste

   $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, segue uma distribuição normal unitária se a hipótese nula é verdadeira e se satisfazem as suposições.

6. ***Regra de Decisão:*** Todos os valores possíveis que a estatística de teste pode ter são pontos sobre o eixo horizontal do gráfico da distribuição de tal estatística e se dividem em dois grupos, um dos grupos constitui o que chamamos de *região de rejeição (ou região*

*crítica)* e o outro grupo forma a *região de aceitação.* Os valores da estatística de teste que compreendem a região de rejeição são aqueles que têm a menor probabilidade de ocorrer se a hipótese nula é verdadeira. Os valores que formam a região de aceitação são os que têm maior probabilidade de ocorrer se a hipótese nula é verdadeira.

A *Regra de Decisão* nos diz para rejeitar a hipótese nula se o valor da estatística de teste que calculado a partir da amostra pertencem a região de rejeição, e para não rejeitar (ou "aceitar") a hipótese nula se o valor calculado da estatística de teste não pertencem a região de rejeição (pertencer a região de aceitação).

A decisão com respeito a quais valores vão pertencer a região de rejeição e quais a região de aceitação, é tomada com base no *nível de significância* ($\alpha$) desejado. Isto reflete o fato de que, as vezes, os testes de hipóteses recebem o nome de testes de significância e um valor calculado da estatística de teste que cai na região de rejeição é dito *significativo*. O nível de significância, $\alpha$, especifica a área sob a curva da distribuição da estatística de teste que está por cima dos valores sobre o eixo horizontal que constituem a região de rejeição. Então, vê-se que $\alpha$ é uma probabilidade e, de fato, é a probabilidade de rejeitar uma hipótese nula verdadeira. Como rejeitar uma hipótese nula verdadeira constituirá um erro, parece razoável que deve haver uma pequena probabilidade de rejeitar uma hipótese nula verdadeira. Os valores de $\alpha$ que se encontram com maior freqüência são 0,01, 0,05 e 0,10.

O erro que se comete quando se rejeita uma hipótese nula verdadeira é chamado de *Erro Tipo I*. O *Erro Tipo II* se comete quando se aceita uma hipótese nula falsa. A probabilidade se cometer um Erro Tipo II é chamada de $\beta$.

Sempre que se rejeita uma hipótese nula tem-se o risco concomitante de cometer um Erro Tipo I, rejeitar uma hipótese nula verdadeira. Sempre que se "aceita" uma hipótese nula, existe o risco de aceitar uma hipótese nula falsa. Se temos $\alpha$ pequeno, em geral não se tem controle sobre $\beta$, apenas sabemos que, como regra, é maior que $\alpha$.

Nunca se sabe se foi cometido ou não um desses erros quando se rejeita ou se deixa de rejeitar uma hipótese nula, já que se desconhece o enunciado verdadeiro dos assuntos. Se o procedimento de testes de hipóteses conduz a rejeição da hipótese nula verdadeira, pode ser um consolo o fato de que $\alpha$ seja uma valor bastante pequeno, e portanto, pequena a probabilidade de cometer um Erro Tipo I. Se "aceita-se" a hipótese nula, não se conhece o risco de cometer um Erro Tipo II, já que comumente se desconhece $\beta$, mas, como foi dito, sabe-se que, em geral, é maior que $\alpha$.

7. ***Estatística de Teste Calculada:*** A partir dos dados contidos na amostra, calcula-se um valor para a estatística de teste e compara-se com as regiões de rejeição e de aceitação já especificadas.
8. ***Decisão Estatística:*** A decisão estatística consiste em rejeitar ou não rejeitar a hipótese nula. Rejeita-se se o valor calculado da estatística de teste pertence a região de rejeição, e não se rejeita se o valor calculado da estatística de teste pertencer a região de aceitação.

9. ***Decisão Administrativa ou Clínica:*** A decisão administrativa ou clínica geralmente depende da decisão estatística. Se rejeita-se a hipótese nula, é comum a decisão administrativa ou clínica ser também de rejeição, no sentido de que a decisão é compatível com a hipótese alternativa. No geral, se cumpre o inverso, se não se rejeita a hipótese nula. A decisão administrativa ou clínica pode ter outras formas, tal como uma decisão de reunir mais dados.

Não obstante, neste ponto deve-se ressaltar que o resultado do teste estatístico só é uma parte da evidência que influi na decisão administrativa ou clínica. A decisão estatística não deve interpretar-se como definitiva, mas sim que deve considerar-se junto com todas as demais informações pertinentes de que disponha o experimentador.

Com estes comentários gerais como base, a continuação se discutirão testes de hipóteses específicos.

### *11.2.Teste de Hipóteses: Uma só Média Populacional*

Nesta seção estudaremos testes de hipóteses acerca de uma média populacional em três diferentes condições: (1) quando a amostra é a partir de uma população de valores distribuídos em forma normal com variância conhecida, (2) quando a amostra é a partir de uma população normalmente distribuída com variância desconhecida e (3) quando a amostra é a partir de uma população que não está normalmente distribuída. Em todos os casos as hipóteses que podemos formular são:

$$H_0:\ \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \mu \neq \mu_0$$

$$H_0:\ \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \mu > \mu_0$$

$$H_0:\ \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \mu < \mu_0$$

#### 11.2.1. *Amostra a partir de uma População Normalmente Distribuída: Variância Conhecida.*

Sabendo que a média amostral, de uma amostra aleatória simples de n elementos de uma população normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$, tem distribuição normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2/n$, então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, dada por:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$ segue a distribuição normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\mu \neq \mu_0$
- $z_{obs} < -z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu < \mu_0$
- $z_{obs} > z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu > \mu_0$

Em um teste de hipóteses feito através do *p-valor* , um valor grande positivo ou negativo da estatística de teste estará associado a um *p-valor* pequeno. Na prática o *p-valor* é calculado como segue:

- *p-valor* = Prob($Z<z_{obs}$) para $H_A$: $\mu < \mu_0$
- p-valor = Prob($Z>z_{obs}$) para $H_A$: $\mu > \mu_0$
- p-valor = Prob($Z>|z_{obs}|$) para $H_A$: $\mu \neq \mu_0$ ,

onde $z_{obs}$ é o valor observado da estatística de teste e a probabilidade pode ser obtida em tabelas da distribuição normal padrão. A hipótese nula será rejeitada quando o *p-valor* for menor do que $\alpha$ , ao nível de significância do teste.

**11.2.2.** ***Amostra a partir de uma População Normalmente Distribuída: Variância Desconhecida.***

Quando a variância populacional é desconhecida deve-se estimá-la a partir dos valores da amostra, ou seja, através da variância amostral. Nesse caso, a estatística de teste apropriada é dada por:

$t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ , a qual segue uma distribuição t de Student com n-1 graus de liberdade, supondo $H_0$ verdadeira e quando o tamanho da amostra for pequeno ($n \leq 30$).

Quando o tamanho da amostra é suficientemente grande ($n>30$), $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ tem distribuição aproximadamente normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $t_{obs} < -t_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}$ ou $t_{obs} > t_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}$ para $H_A$: $\mu \neq \mu_0$
- $t_{obs} < -t_{(n-1;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu < \mu_0$
- $t_{obs} > t_{(n-1;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu > \mu_0$

Em um teste de hipóteses feito através do *p-valor* , um valor grande positivo ou negativo da estatística de teste estará associado a um *p-valor* pequeno. Na prática o *p-valor* é calculado como segue:

- *p-valor* = 1 - Prob($t_{n-1} < t_{obs}$) para $H_A$: $\mu < \mu_0$
- p-valor = 1 - Prob($t_{n-1} > t_{obs}$) para $H_A$: $\mu > \mu_0$
- p-valor = Prob($t_{n-1} > |t_{obs}|$) para $H_A$: $\mu \neq \mu_0$ ,

onde $t_{obs}$ é o valor observado da estatística de teste e a probabilidade pode ser obtida em tabelas da distribuição t de Student. A hipótese nula será rejeitada quando o *p-valor* for menor do que $\alpha$ , ao nível de significância do teste.

**11.2.3.** ***Amostra a partir de uma População Não Normalmente Distribuída.***

Se a amostra na qual se baseia o teste de hipóteses provém de uma população que não está distribuída normalmente, se a amostra é grande, pode-se tirar vantagem do Teorema Central do Limite e usar $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ como a estatística de teste. Se não se conhece o desvio padrão populacional, a prática comum é usar o desvio padrão da amostra como uma estimação. A razão é que a amostra grande, necessária para aplicar o teorema central do limite, proporcionará uma estimação satisfatória de $\alpha$.

**11.2.4. Poder do teste e tamanho da amostra para uma média populacional**

Sabemos que $\beta$ representa a probabilidade de aceitar uma hipótese nula quando ela é falsa, ou seja, Prob(aceitar $H_0$ | $\mu$). O cálculo de $\beta$ depende do valor de $\mu$ que não é especificado. Mas podemos considerar um função que associe $\beta$ e $\mu$.

A função *característica de operação* (função CO), definida como sendo $\beta(\mu)$ = Prob(aceitar H0|$\mu$), ou seja, a probabilidade de aceitar $H_0$, considerada como uma função de $\mu$.

Define-se por *poder do teste* (1-$\beta$) a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa, ou seja, Prob(rejeitar $H_0$ | $\mu$).

Em algumas situações faz-se necessário a determinação do tamanho apropriado da amostra para detectar um diferença $\delta$ , do interesse do pesquisador, com alto poder do teste e nível de significância $\alpha$.

O cálculo do tamanho da amostra, para um teste de hipótese unilateral ( $H_A$: $\mu > \mu_0$ ou $H_A$: $\mu < \mu_0$) e dado pela expressão:

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \quad \sigma^2}{\delta^2} \quad ,$$

onde $z_\alpha$ é o valor da distribuição normal padrão que corresponde ao valor z acima do qual a área é igual a $\alpha$, e $z_\beta$ é o valor da distribuição normal padrão que corresponde ao valor z acima do qual a área é igual a 1-poder = $\beta$ e $\delta$ é a diferença a ser detectada.

Para hipóteses bilaterais ($H_A$: $\mu \neq \mu_0$ ), a determinação do tamanho da amostra é dado pela expressão:

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 \quad \sigma^2}{\delta^2}$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor da distribuição normal padrão que corresponde ao valor z acima do qual a área é igual a $\alpha/2$.

Ambas as expressões dependem do conhecimento do verdadeiro valor da variância. Em muitas situações práticas, esse valor é desconhecido e uma solução é a utilização da variância da amostra piloto de n' elementos. Se $n \leq n'$ a amostra piloto já é suficiente para a estimação da média; caso contrário, devemos retirar mais elementos da população para completar o tamanho requerido da amostra. Neste caso, o desvio padrão da amostra completa deverá ser comparado com o desvio padrão da amostra piloto. Se ele for maior, novo tamanho de amostra deverá ser calculado com este desvio..

**11.3.** ***Teste de Hipóteses: Uma só Proporção Populacional***

Os testes de hipóteses com relação à proporções populacionais se realizam quase da mesma maneira que os testes para média populacional, quando se satisfazem as condições necessárias para usar a curva normal. Podem ser realizados testes unilaterais ou bilaterais, dependendo da questão que se faça. As hipóteses que podemos formular são:

$$H_0:\ \pi = \pi_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \pi \neq \pi_0$$

$$H_0:\ \pi \leqslant \pi_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \pi > \pi_0$$

$$H_0:\ \pi \geqslant \pi_0 \quad \text{vs} \quad H_A:\ \pi < \pi_0$$

Sabendo que a proporção amostral, de uma amostra aleatória simples de n elementos de uma população, quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, tem distribuição normal com média $\pi$ e variância $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$ então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, dada por:

$$Z = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$ segue a distribuição normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\pi \neq \pi_0$
- $z_{obs} < -z_{\alpha}$ para $H_A$: $\pi < \pi_0$
- $z_{obs} > z_{\alpha}$ para $H_A$: $\pi > \pi_0$

Em um teste de hipóteses feito através do *p-valor* , um valor grande positivo ou negativo da estatística de teste estará associado a um *p-valor* pequeno. Na prática o *p-valor* é calculado como segue:

- *p-valor* = Prob($Z<z_{obs}$) para $H_A$: $\pi < \pi_0$
- p-valor = Prob($Z>z_{obs}$) para $H_A$: $\pi > \pi_0$
- p-valor = Prob($Z>|z_{obs}|$) para $H_A$: $\pi \neq \pi_0$ ,

onde $z_{obs}$ é o valor observado da estatística de teste e a probabilidade pode ser obtida em tabelas da distribuição normal padrão. A hipótese nula será rejeitada quando o *p-valor* for menor do que $\alpha$ , ao nível de significância do teste.

### 11.3.1. Tamanho da amostra para uma média populacional

O cálculo do tamanho da amostra, para um teste de hipótese unilateral à esquerda ($H_A$: $\pi < \pi_0$) e dado pela expressão:

$$n = \frac{\left(z_\alpha \sqrt{\pi(1-\pi)} + z_\beta \sqrt{(\pi-\delta)(1-\pi+\delta)}\right)^2}{\delta^2} ,$$

onde $z_\alpha$ é o valor da distribuição normal padrão que corresponde ao valor z acima do qual a área é igual a $\alpha$, e $z_\beta$ é o valor da distribuição normal padrão que corresponde ao valor z acima do qual a área é igual a 1-poder = $\beta$ e $\delta$ é a diferença a ser detectada e $\pi$ é o valor da proporção populacional supondo-se que a hipótese nula é verdadeira.

O cálculo do tamanho da amostra, para um teste de hipótese unilateral à direita ($H_A$: $\pi > \pi_0$) e dado pela expressão:

$$n = \frac{\left(z_\alpha \sqrt{\pi(1-\pi)} + z_\beta \sqrt{(\pi+\delta)(1-\pi-\delta)}\right)^2}{\delta^2} .$$

O tamanho da amostra n, para um teste de hipótese bilateral ($H_A$: $\pi \neq \pi_0$), será o maior dos dois valores $n_1$ e $n_2$ obtidos de:

$$n_1 = \frac{\left(z_\alpha/2 \sqrt{\pi(1-\pi)} + z_\beta \sqrt{(\pi-\delta)(1-\pi+\delta)}\right)^2}{\delta^2} \quad \text{e}$$

$$n_2 = \frac{\left(z_\alpha/2 \sqrt{\pi(1-\pi)} + z_\beta \sqrt{(\pi+\delta)(1-\pi-\delta)}\right)^2}{\delta^2}$$

## 11.4. *Teste de Hipóteses: Comparação de Duas Médias Populacionais*

**11.4.1. Dados não emparelhados (independentes) :** O teste será baseado na diferença entre as duas médias das amostras.

Em tais casos, se testam uma ou outra das hipóteses que seguem:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
ou
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 < 0$
ou
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 > 0$

Outra maneira de representar essas hipóteses:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_A : \mu_1 \neq \mu_2$
ou
$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ vs $H_A : \mu_1 < \mu_2$
ou
$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ vs $H_A : \mu_1 > \mu_2$

**11.4.1.1.** ***Amostra a partir de Populações Normalmente Distribuídas: Variâncias Conhecidas.***

Se as amostras de tamanhos $n_1$ e $n_2$ forem extraídas de populações normais independentes com médias $\mu_1$e $\mu_2$ e desvios padrão conhecidos ( $\sigma_1$ *e* $\sigma_2$), então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, é dada por:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

a qual tem distribuição normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $z_{obs} < -z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 < \mu_2$
- $z_{obs} > z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 > \mu_2$

**11.4.1.2.** ***Amostra a partir de Populações Normalmente Distribuídas: Variâncias Desconhecidas mas supostamente iguais.***

Se as amostras de tamanhos $n_1$ e $n_2$, tal que $n_1 + n_2 < 30$ , forem extraídas de populações normais independentes com médias $\mu_1$e $\mu_2$ e desvios padrão desconhecidos ( $\sigma_1$ *e* $\sigma_2$) mas supostamente iguais, então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, dada por:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad \text{com} \quad S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

onde $S_P^2$ é a estimação ponderada da variância comum das populações, segue uma distribuição t de S*tudent* com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $t_{obs} < -t_{(n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2})}$ ou $t_{obs} > t_{(n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2})}$ para $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $t_{obs} < -t_{(n_1+n_2-2;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_1 < \mu_2$
- $t_{obs} > t_{(n_1+n_2-2;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_1 > \mu_2$

**11.4.1.3.** ***Amostra a partir de Populações Normalmente Distribuídas: Variâncias Desconhecidas e diferentes.***

Se as amostras de tamanhos $n_1$ e $n_2$, tal que $n1 + n2 < 30$ , forem extraídas de populações normais independentes com médias $\mu_1$e $\mu_2$ e desvios padrão desconhecidos ( $\sigma_1$ *e* $\sigma_2$) e diferentes, então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, dada por:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

, segue uma distribuição t de S*tudent* com gl graus de liberdade, onde

$$gl=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $t_{obs}<-t_{(gl;\frac{\alpha}{2})}$ ou $t_{obs}>t_{(gl;\frac{\alpha}{2})}$ para $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $t_{obs}<-t_{(gl;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_1 < \mu_2$
- $t_{obs}>t_{(gl;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_1 > \mu_2$

**11.4.1.4.** ***Amostra a partir de uma População Não Normalmente Distribuída.***

Se as amostras de tamanhos $n_1$ e $n_2$, tal que $n_1$ *e* $n_2$ maiores que 30 , forem extraídas de populações não normais independentes com médias $\mu_1$ e $\mu_2$ e desvios padrão conhecidos ( $\sigma_1$ e $\sigma_{2v}$), então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, é dada por

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

qual tem distribuição normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs}<-z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs}>z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $z_{obs}<-z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 < \mu_2$
- $z_{obs}>z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 > \mu_2$

**11.4.1.5.** ***Amostra a partir de uma População Não Normalmente Distribuída.***

Se as amostras de tamanhos $n_1$ e $n_2$, tal que $n_1$ *e* $n_2$ maiores que 30 , forem extraídas de populações não normais independentes com médias $\mu_1$ e $\mu_2$ e desvios padrão desconhecidos ( $\sigma_1$ e $\sigma_{2v}$), então a estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, é dada por

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}},$$

qual tem distribuição normal padrão com média zero e variância um.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $z_{obs} < -z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 < \mu_2$
- $z_{obs} > z_{\alpha}$ para $H_A$: $\mu_1 > \mu_2$

**11.4.2. Dados emparelhados (dependentes) :** Os testes são baseados em duas observações do mesmo indivíduo em momentos diferentes. São baseados na diferença entre as médias de ANTES e DEPOIS da amostra.

Em tais casos, se testam uma ou outra das hipóteses que seguem:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D = 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D \neq 0$

ou

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D \geq 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D < 0$

ou

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D \leq 0$ vs $H_A : \mu_1 - \mu_2 = \mu_D > 0$

A estatística de teste baseia-se nos valores observados da variável D, definida pela diferença de valores em cada par. Num estudo tipo antes e depois:

D=(medida depois) – (medida antes)

Se a hipótese nula for correta, esperamos que os valores desta variável estejam em torno de zero ou, ainda, que a média destas diferenças, $\bar{X}_D$ , esteja próxima de zero. Assim, será utilizada como estatística de teste, uma função de $\bar{X}_D$ , conhecida como *estatística t* para dados pareados, definida por:

$$t = \frac{\bar{X}_D - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

, a qual segue uma distribuição t de Student com n-1 graus de liberdade, supondo $H_0$ verdadeira e onde

n=tamanho da amostra, que, neste caso, corresponde ao número de pares observador;

$\bar{X}_D$ = média das diferenças internas dos pares; e

$S_D$ = desvio padrão das diferenças dos pares.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $t_{obs} < -t_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}$ ou $t_{obs} > t_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}$ para $H_A$: $\mu_D \neq 0$
- $t_{obs} < -t_{(n-1;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_D < 0$

- $t_{obs} > t_{(n-1;\alpha)}$ para $H_A$: $\mu_D > 0$

**11.5.** ***Teste de Hipóteses: Comparação de duas Proporções Populacionais***

O teste relativo a diferença entre duas proporções populacionais que se emprega com mais freqüência é aquele que supõem que essa diferença é zero. Mas, também é possível provar que essa diferença é igual a qualquer outro valor. Podem haver tanto testes unilaterais como bilaterais. As hipóteses que podemos formular são:

$$H_0: \ \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

$$H_0: \ \pi_1 - \pi_2 \leqslant 0 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 - \pi_2 > 0$$

$$H_0: \ \pi_1 - \pi_2 \geqslant 0 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 - \pi_2 < 0$$

Outra maneira de representar essas hipóteses:

$$H_0: \ \pi_1 = \pi_2 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 \neq \pi_2$$

$$H_0: \ \pi_1 \leqslant \pi_2 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 > \pi_2$$

$$H_0: \ \pi_1 \geqslant \pi_2 \quad \text{vs} \quad H_A: \ \pi_1 < \pi_2$$

A estatística de teste, supondo $H_0$ verdadeira, será dada por:

$Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$ , a qual, pelo Teorema Central do Limite, segue a distribuição normal padrão com média zero e variância um.

As proporções populacionais são desconhecidas devendo ser estimadas pelas proporções amostrais.

A hipótese nula será rejeitada quando:

- $z_{obs} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_{obs} > z_{\frac{\alpha}{2}}$ para $H_A$: $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$
- $z_{obs} < -z_{\alpha}$ para $H_A$: $\pi_1 - \pi_2 < 0$
- $z_{obs} > z_{\alpha}$ para $H_A$: $\pi_1 - \pi_2 > 0$

**11.6.** ***Teste F para comparação de variâncias populacionais***

O teste para comparação de duas médias populacionais, baseados em amostras independentes, depende de as variâncias associadas serem iguais ou desiguais. Assim, ou temos esse conhecimento ou precisamos realizar um teste estatístico para tê-lo. Neste caso, as hipóteses são dadas por:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_A: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \ ,$$

onde $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ são as variâncias da população 1 e população 2, respectivamente.

A hipótese nula admite que as duas populações tenham a mesma variância. A hipótese alternativa admite que a variância da população 1 seja maior do que a variância da população 2, ou seja, as variâncias são desiguais. A estatística de teste é dada por:

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ , a qual tem distribuição F de Snedecor com grau de liberdade igual a $n_1$-1, $n_2$-1,

considerando H0 verdade e a distribuição da variável em estudo ser aproximadamente normal.

**Obs:** Considere a maior das duas variâncias amostrais como $S_1^2$ .

A hipótese nula será rejeitada quando $F_{obs} > F_{gl;\alpha}$ .