

Apostila de Cálculo IV

Volmir Eugênio Wilhelm

Curitiba, 2005

Sumário

1	Ementa e Programa	6
1.1	Ementa	6
1.2	Programa	6
1.3	Bibliografia Básica	7
2	Números complexos	8
2.1	Introdução	8
2.2	Exercícios	10
3	Funções analíticas, limites, continuidade	12
3.1	Funções Analíticas	12
3.2	Funções elementares	14
3.3	Limites	15
3.4	Continuidade	16
3.5	Derivada	16
3.6	Exercícios	19
4	Integrais de funções complexas	21

4.1	Integrais definidas	21
4.2	Caminhos e domínios	22
4.3	Integral curvilínea	23
4.4	Teorema integral de Cauchy-Goursart	24
4.5	Integrais indefinidas	27
4.6	Fórmula integral de Cauchy	27
4.7	Derivadas de uma função analítica	29
4.8	Teorema de Morera	29
4.9	Teorema de Liouville	30
4.10	Teorema fundamental da álgebra	30
5	Série de Potências	32
5.1	Teorema de Taylor	34
5.2	Teorema de Laurent	35
5.3	Propriedades de Séries	38
6	Teorema dos Resíduos	40
6.1	Definições	40
6.2	Resíduos	42
6.3	Teorema dos Resíduos	46
6.4	Cálculo de integrais reais	47
7	Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier	54
7.1	Condução do Calor	54
7.2	Solução da equação diferencial do calor	55

7.3	Séries de Fourier	57
8	Solução da Equação do Calor	63
8.1	Solução da equação diferencial do calor	63
8.2	Exemplos	65
8.3	Solução da Equação do Calor - Condições de contorno não homogêneo	67
9	Solução da Equação da Onda: Vibrações de uma Corda Elástica	72
9.1	Conceituação	72
9.2	Solução da equação diferencial da onda	73
9.3	Exercícios	76
10	Equação de Laplace	78
10.1	Problema de Dirichlet em um retângulo	79
10.2	Solução da equação de Laplace	79
10.3	Exercícios	83
11	Transformada de Fourier	84
11.1	Revisão: Séries de Fourier	84
11.2	Forma Complexa das Séries de Fourier	85
11.3	Transformadas Finitas de Fourier	85
11.4	Integral de Fourier	87
11.5	Transformadas Infinitas de Fourier em senos e co-senos	93

Lista de Figuras

2.1	Representação de um número complexo.	8
2.2	Representação de um número complexo sob a forma polar	9
2.3	Circunferência centrada em a com raio σ e uma coroa aberta centrada em a	10
3.1	Transformações A	14
3.2	Transformações B	14
3.3	Representação gráfica da definição de limite.	16
3.4	Cálculo da derivada de $f(z)$ pelos caminhos I e II.	18
5.1	Campo de definição da série de Laurent.	36
6.1	Caminho da integral de linha.	48
7.1	Desenho Errado??	58
7.2	Exercício.	59
7.3	Exercício.	60
7.4	Onda em dente de serra.	62
8.1	Gráfico.	66

8.2	Gráfico.	68
8.3	Gráficos.	71
10.1	Gráfico.	79

Ementa e Programa

Pré-Requisitos: Cálculo III

Aulas semanais: 4 (quatro)

Natureza: semsetral

Créditos: 04

Aulas anuais: 60

1.1 Ementa

Funções de variável complexa. Séries de integrais de Fourier. Equações diferenciais parciais. Tópicos de Cálculo.

1.2 Programa

1. **Função de variável complexa:** Números complexos. Funções, limites e continuidade. Equações de Cauchy Riemann. Fórmulas integrais de Cauchy. Séries de Laurent. Teorema dos resíduos. Aplicações (Cálculo de integrais definidas).
2. **Séries e integrais de Fourier:** Séries de Fourier. Séries de meio período. Forma complexa das séries de Fourier. Transformadas (finitas e infinitas). Relação entre transformada de Fourier e transformada de Laplace e a fórmula de inversão da transformada de Laplace.
3. **Equações diferenciais parciais:** Equação do calor, da onda e de Laplace. Soluções por separação de variáveis. Aplicações das transformadas de Laplace e Fourier. O problema de Sturm-Liouville.
4. **Tópicos de cálculo**

1.3 Bibliografia Básica

Boyce, W.E. e Di Prima, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 5^a ed., LTC, RJ, 1994.

Hauser, A.A. Variáveis Complexas. LTC, RJ, 1972.

Kreyszig, E. Matemática Superior. Vols. 3 e 4, LTC, RJ, 1979.

Números complexos

Um número complexo é uma expressão da forma $a + ib$, sendo a e b números reais ($a, b \in \mathbb{R}$) e i um número imaginário que satisfaz a relação $i^2 = -1$ ($i \notin \mathbb{R}$).

2.1 Introdução

Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos $\operatorname{Re} z = x$ (parte real de z) e $\operatorname{Im} z = y$ (parte imaginária de z) (ou seja, x e y podem ser funções).

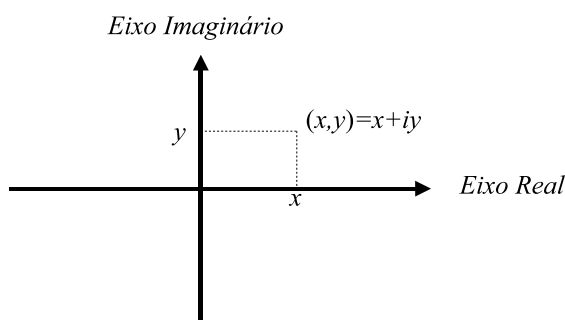


Figura 2.1: **Representação de um número complexo.**

Seja $z = x + iy$ (não nulo). Se r é o segmento de reta que liga $0 = 0 + i0$ a z , e θ é o ângulo que r faz com o eixo dos x ($0 < \theta \leq 2\pi$) (θ geralmente é denominado de argumento de z). Pode-se escrever $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, e portanto $z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Algumas propriedades dos números complexos

1. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1 + z_2 = z_3$, $z_1 - z_2 = z_4$, $z_1 \times z_2 = z_5$, $\frac{z_1}{z_2} = z_6$ ($z_2 \neq 0$), $z_3, z_4, z_5, z_6 \in \mathbb{C}$

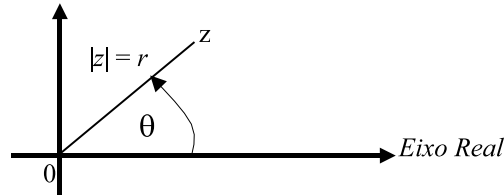


Figura 2.2: Representação de um número complexo sob a forma polar

2. Conjugado¹ de $z = x + iy$ é $\bar{z} = x - iy$. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{\bar{z}} = z$, $z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re} z$
3. Módulo ou norma de um número complexo $z = x + iy$ é a distância euclidiana de z até a origem $0 = 0 + i0$. Assim temos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $|z| = z \times \bar{z}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$
4. Desigualdades triangulares: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,² $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
5. A forma polar: $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, onde $0 < \theta \leq 2\pi$, $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$
6. $|z| = \rho \Rightarrow z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $0 < \theta \leq 2\pi$. Fora da origem: $z = z_0 + \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$
7. $|z| = \rho \Rightarrow z = \rho e^{i\theta}$, $0 < \theta \leq 2\pi$
8. Produtos: $z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ ³, $z \in Z_+$. Fórmula de Moiver: $\rho = 1$, $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$
9. Quocientes: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$, $z^{-n} = \rho^{-n} (\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$
10. Extração de raízes: A solução de $z^n = z_0$ é $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n})$,⁴ $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, $\theta = \arg z$, $\rho = |z_0|$.

Como a distância entre dois pontos z e a é $|z - a|$, segue-se que uma circunferência de C de raio com centro em um ponto fixo a pode ser representada sob a forma $|z - a| = \sigma$.

Conseqüentemente, a desigualdade $|z - a| < \sigma$ vale para qualquer ponto no interior de C ; assim, representa o interior de C . Tal região é chamada um disco circular aberto (o disco circular fechado é representado por $|z - a| \leq \sigma$ que consiste do interior e do próprio C).

¹O ponto \bar{z} é a reflexão do ponto z no eixo x , isto é, a posição do ponto \bar{z} é simétrica à do ponto z em relação ao eixo x .

² $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$, porém $(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2$. Logo $|z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 = -2[|z_1||z_2| - \operatorname{Re} z_1\bar{z}_2]$. Para concluir use $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1\bar{z}_2|$ e $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$.

³ $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$ $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$ $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$

⁴Seja $z_0^n = z$, $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$. Então $r_0^n = r$, e $n\theta_0 = \theta \pm 2k\pi$. Portanto $\theta_0 = \frac{\theta}{n} \pm \frac{2k\pi}{n}$.

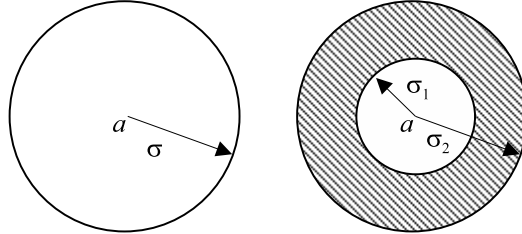


Figura 2.3: Circunferência centrada em a com raio σ e uma coroa aberta centrada em a .

A região entre duas circunferências concêntricas de raios σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$) pode ser representada sob a forma $\sigma_1 < |z - a| < \sigma_2$, onde a é o centro das circunferências. Tal região é chamada uma coroa aberta.

2.2 Exercícios

1. Verifique que

(a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = -2i$

(b) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{i}{2}$

(c) $(1 - i)^4 = -4$

2. Represente os números z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, e $z_1 - z_2$ graficamente:

(a) $z_1 = 2i$, $z_2 = \frac{3}{2} - i$

(b) $z_1 = (-3, 1)$, $z_2 = (1, 4)$

(c) $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_1 - y_1i$ (trabalhar como se fossem vetores)

3. Prove que

(a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$

(b) z é real se $\bar{z} = z$

4. Achar todos os valores das seguintes raízes.

(a) $z - (-1)^{\frac{1}{3}} = 0$

(b) $(-i)^{\frac{1}{3}}$ Resp: $i, \frac{\pm\sqrt{3-i}}{2}$

(c) $(-1 + i\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ Resp: $\pm 2\sqrt{2}$

5. Ache as quatro raízes da equação $z^4 + 4 = 0$ e, usando-as, fatore $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais. Resp: $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$

6. Descreva geometricamente a região determinada por cada uma das seguintes condições.

- (a) $|\operatorname{Re} z| < 2$
- (b) $|z - 4| > 3$
- (c) $|z - 1 + 3i| \leq 1$
- (d) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}, z \neq 0$
- (e) $|z - 4| > |z|$
- (f) $-\pi < \arg z < \pi i, |z| > 2;$
- (g) $1 < |z - 2i| < 2;$
- (h) $|2z + 3| > 4;$
- (i) $\operatorname{Im} z^2 > 0;$
- (j) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2};$

Funções analíticas, limites, continuidade

Se x e y são variáveis reais, então $z = x + iy$ é uma variável complexa. Sejam z e w duas variáveis complexas e imaginemos uma relação que associa a cada ponto z de uma região do plano complexo, um ou mais valores w . Então a variável w é uma função de z definida na região e escrevemos $w = f(z)$. A função $f(z)$ pode ser unívoca (que associa a z um único w) e plurívoca. (Neste texto serão consideradas somente funções unívocas).

Sejam u e v as partes real e imaginária de w . Então, como w depende de $z = x + iy$, geralmente u e v dependem de x e y podendo-se escrever $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Exemplos: $w = f(z) = z^2 + 3z \rightarrow u(x, y) = \operatorname{Re}(w) = x^2 - y^2 + 3x$ e $\operatorname{Im}(w) = v(x, y) = 2xy + 3y$;
 $f(1 + 3i) = -5 + 15i$; $f(1 + i) = 3 + 5i$.

3.1 Funções Analíticas

Quando z designa qualquer um dos números complexos de um conjunto S de números complexos, chamamos z de variável complexa. Se, para cada valor de z em S , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, então w é uma *função* da variável complexa z no conjunto S .

$$w = f(z)$$

- S : domínio da função
- $f(z)$: contradomínio da função w

Quando $f(z)$ assume um único valor para cada z , então f é denominada de *univalente*. Há vários casos de funções não univalentes tais como $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$.

Exemplos Estudar o domínio e contradomínio das seguintes funções

1. $f(z) = z^3 + 2iz - 3$;

2. $g(z) = |z|$;

3. $h(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

Toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária bem definidas as quais são funções de x e y . Se u e v designam tais partes, então

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Exemplo: $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$

Transformação

No caso de uma função complexa $w = f(z)$ não ocorre a representação gráfica semelhante ao caso de funções reais do tipo $y = g(x)$, devido o número de variáveis envolvidas ($z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$).

Em geral desenha-se dois planos complexos, um que contenha a região do domínio e o outro a imagem desta região.

Exemplos: Estudar a transformação das regiões abaixo:

1. $f(z) = z + 2$;

2. $f(z) = \bar{z}$;

3. $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - yi$;

4. $w = z^2$, $z = 4(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$;

5. $w = z^2$, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq k$, $k \in \mathfrak{R}$;

6. $w = \frac{1}{z}$, $|z| \leq 9$;

7. $w = \frac{1}{z}$, $|z - 2| \leq 9$;

8. $w = e^z$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi i$;

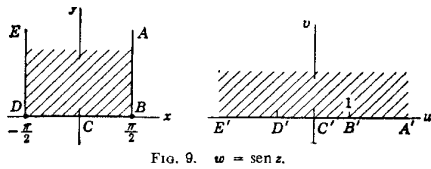


FIG. 9. $w = \text{sen } z$.

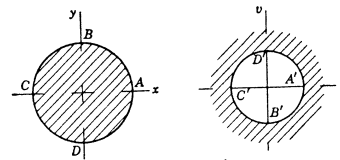


FIG. 4. $w = 1/z$.

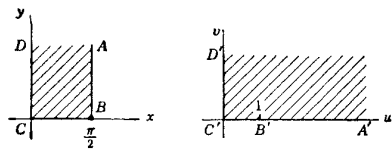


FIG. 10. $w = \text{sen } z$.

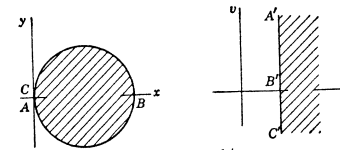


FIG. 5. $w = 1/z$.

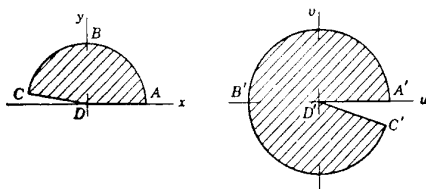


FIG. 1. $w = e^z$.

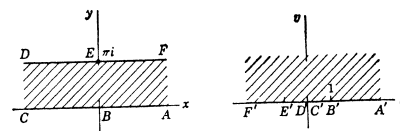


FIG. 6. $w = e^z$.

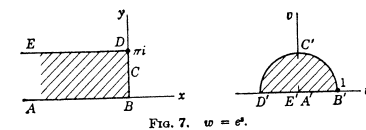


FIG. 7. $w = e^z$.

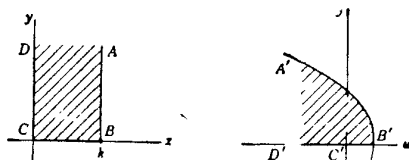


FIG. 3. $w = z^2$; $A'B' : \rho = \frac{2k^2}{1 + \cos \phi}$

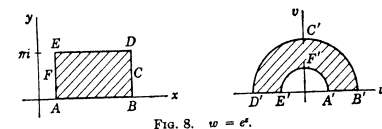


FIG. 8. $w = e^z$.

Figura 3.1: Transformações A

Figura 3.2: Transformações B

3.2 Funções elementares

Função exponencial

Define-se a função exponencial, e^z em termos de funções reais, pela equação

$$e^z = e^x (\cos y + i \text{sen } y)$$

Como caso particular tem-se

$$e^{iy} = \cos y + i \text{sen } y \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$$

Exemplo - Mostre que: $e^0 = 1$; $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$.

Função trigonométrica

Das fórmulas $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$ segue que para todo número real y

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Função hiperbólicas

As funções seno e cosseno hiperbólicas de uma variável complexa são definidas como as de variável real, isto é,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Função logarítmica

Define-se a função log de uma variável complexa z , onde $z = re^{i\theta}$ e o argumento θ é medido em radianos, pela equação

$$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + i\theta$$

3.3 Limites

Seja f uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de um ponto z_0 , exceto, eventualmente, no próprio ponto z_0 . A afirmação de que o limite desta função, quando z tende para z_0 , é um número w_0 , ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

significa que o valor $f(z)$ da função é arbitrariamente próximo do valor w_0 para todos os pontos z numa vizinhança de z_0 (exceto, eventualmente, para $z = z_0$), quando essa vizinhança se torna suficientemente pequena.

Formalmente tem-se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| \leq \varepsilon$$

Observação: Todas as regras familiares do cálculo diferencial real referentes ao cálculo de limites permanecem válidas no campo complexo.

Graficamente tem-se

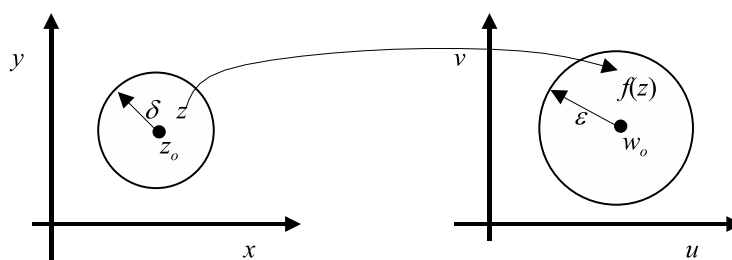


Figura 3.3: Representação gráfica da definição de limite.

3.4 Continuidade

A função $f(z)$ é dita contínua em $z = z_0$ se

- i) $f(z_0) \exists$;
- ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$;
- iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Formalmente tem-se $f(z)$ é contínua em $z = z_0$ se

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

3.5 Derivada

Uma função $f(z)$ é derivável em um ponto $z = z_0$ se o limite

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existe. Este limite constitui a derivada de $f(z)$ no ponto $z = z_0$.

Observação 1: f é necessariamente contínua em todo ponto z_0 onde sua derivada existe. A continuidade da função, porém, não implica na derivabilidade da mesma (p.ex. $z = |z|^2$).

Observação 2: Algumas regras familiares do cálculo diferencial real permanecerem válidas no campo complexo.

Observação 3: Várias funções complexas não possuem derivada em ponto algum, como por exemplo a função $\bar{z} = x - iy$, pois dependendo do caminho utilizado para $\Delta z \rightarrow 0$ tem-se diferentes derivadas ($\Delta x = 0$ e depois $\Delta y = 0$).

Observação 4: Uma função pode admitir derivada somente num único ponto (p.ex. $z = |z|^2$, em $z = 0$). Esta função é contínua em todos os pontos.

Fórmulas de derivação

Seja c uma constante e que w' , w'_1 e $w'_2(z)$ existam. Das regras do cálculo diferencial e integral tem-se:

1. $\frac{d(c)}{dz} = 0$ $\frac{d(z)}{dz} = 1$
2. $\frac{d(cw)}{dz} = c \frac{d(w)}{dz}$ $\frac{d(w_1+w_2)}{dz} = \frac{d(w_1)}{dz} + \frac{d(w_2)}{dz}$
3. $\frac{d(w_1 \times w_2)}{dz} = w_2 \frac{d(w_1)}{dz} + w_1 \frac{d(w_2)}{dz}$
4. $\frac{d(w^n)}{dz} = n w^{n-1} w'$
5. $\frac{d}{dz} \left\{ \frac{w_1}{w_2} \right\} = \frac{w'_1 \times w_2 - w_1 \times w'_2}{(w_2)^2}$

Equações de Cauchy-Riemann

Deduziremos a seguir um critério fundamental e simples para determinar se uma função possui derivada ou não. Seja $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida para todos os pontos de um domínio D . Portanto, o limite

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

é independente da escolha do caminho ao longo do qual $\Delta z \rightarrow 0$.

Seja $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ o caminho I da figura. Inicialmente faz-se $\Delta y \rightarrow 0$ e depois $\Delta x \rightarrow 0$. Anulando Δy tem-se $\Delta z = \Delta x$, e portanto

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

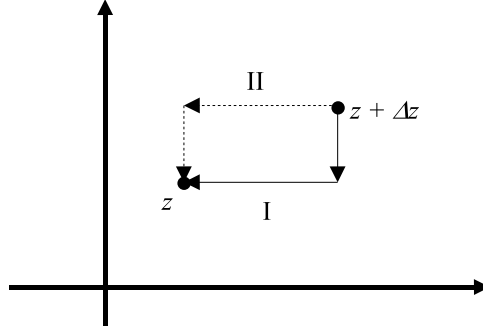


Figura 3.4: Cálculo da derivada de $f(z)$ pelos caminhos I e II.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

Como $f'(z)$ existe, os dois últimos limites também existem. Eles são as derivadas parciais de u e v em relação a x . Assim $f'(z)$ pode ser escrita sob a forma

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A})$$

Semelhante, se escolhermos o caminho II, fazemos inicialmente $\Delta x \rightarrow 0$ e em seguida, $\Delta y \rightarrow 0$. Depois de fazer $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y$. e

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

isto é

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (\text{B})$$

Igualando as partes reais e imaginárias dos segundos membros de (A) e (B) obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

que são as **Equações de Cauchy-Riemann**.

Teorema 2: Se duas funções reais unívocas $u(x, y)$ e $v(x, y)$, das variáveis reais x e y possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas que verificam as equações de Cauchy-Riemann em $z = z_0$ pertencente ao domínio D de f , então a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ possui derivada em $z = z_0$.

Dem: Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = (x_0, y_0)$ e $z_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Logo, $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$ e $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$, portanto $\Delta f = \Delta u + i \Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \right)$. Usando os resultados das equações de Cauchy-Riemann¹, Δf fica reduzido a $\Delta f = \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y$. Dividindo por $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ e usando o fato de que $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ e de que $|\Delta y| \leq |\Delta z|$ então $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \frac{\Delta y}{\Delta z}$. Fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, então $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

Funções analíticas

Uma função $f(z)$ é dita analítica em um ponto $z = z_0$ se ela é definida e possui uma derivada em cada ponto de uma vizinhança de z_0 . Ela é dita analítica em um domínio D se ela é analítica em qualquer ponto de D . Um ponto $z = a$ onde a função não é analítica é denominado de *ponto singular*.

Teorema 1: As partes real e imaginária de uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que é analítica em um domínio D são soluções da equação de Laplace,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

em D e possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas em D .

Definição: Uma função inteira é aquela que é analítica em todo ponto do plano z .

3.6 Exercícios

1. Descreva o domínio de definição da função $g(z) = \frac{y}{x} + \frac{1}{1-y}i$.

¹Substituindo $\frac{\partial u}{\partial y}$ por $-\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$

2. Use a definição de limite e mostre que $\lim_{z \rightarrow z_0} (bz + c) = bz_0 + c$.
3. Calcule $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$.
4. Prove, utilizando a definição, de que $f'(z_0) = -\frac{1}{z_0}$ quando $f(z) = \frac{1}{z}$ e $z_0 \neq 0$.
5. Prove que $f'(z_0)$ não existe para $z_0 \neq 0$ se $f(z) = |z|^2$.
6. Verifique em quais pontos as funções são analíticas (use Cauchy-Riemann). Em quais pontos são deriváveis?
 - (a) $f(z) = z^2$ Resp.: é analítica $\forall z \in C$
 - (b) $f(z) = z^3 + z$ Resp.: é analítica $\forall z \in C$
 - (c) $f(z) = \bar{z}$ Resp.: não é analítica em nenhum ponto de C
 - (d) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Resp.: é analítica $\forall z \in C, z \neq 1$
 - (e) $f(z) = \frac{1}{i-z}$ Resp.: é analítica $\forall z \in C, z \neq i$
 - (f) $f(z) = iz + 2$ Resp.: é analítica $\forall z \in C$
 - (g) $f(z) = \arg z$ Resp.: não é analítica em nenhum ponto de C .
7. Calcule as derivadas das seguintes funções. Verifique se satisfazem as equações de Laplace.
 - (a) $f(z) = (z^2 + 1)^2$
 - (b) $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$
 - (c) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+i}$
 - (d) $f(z) = z^3 - 2z, z_0 = 1 - i$
 - (e) $f(z) = \frac{z+2i}{z-2i}, z_0 = 3 + i$
 - (f) $f(z) = (z^2 - 1)^2, z_0 = i$
 - (g) $f(z) = z^2 (1 + z^{-2})^4, z \neq 0$

Integrais de funções complexas

4.1 Integrais definidas

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função complexa da variável real t , onde U e V são funções reais *seccionalmente contínuas* num intervalo (a, b) , $a \leq b$. Define-se, então, a integral definida de em termos de duas integrais definidas reais, pela fórmula

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt. \quad (1)$$

Consequentemente tem-se que

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [F(t)] dt.$$

Em particular, se k é uma constante complexa, então $\int_a^b F(t) dt = k \int_a^b F(t) dt$.

Várias propriedades conhecidas do cálculo integral de funções reais continuam válidas no campo complexo.

Sejam ρ_o e θ_o o valor absoluto e o argumento do número complexo representado pela integral (1), onde ρ_o é suposto diferente de zero, isto é,

$$\int_a^b F(t) dt = \rho_o e^{i\theta_o}, \quad \rho_o = \left| \int_a^b F(t) dt \right|.$$

Quando $k = e^{-i\theta_o}$, então

$$\int_a^b e^{-i\theta_o} F(t) dt = e^{-i\theta_o} \int_a^b F(t) dt = e^{-i\theta_o} \rho_o e^{i\theta_o} = \rho_o$$

Como ρ_o é real e positivo, então

$$\rho_o = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_o} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta_o} F(t)] dt > 0$$

mas

$$\rho_o = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta_o} F(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re} [e^{-i\theta_o} F(t)]| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta_o} F(t)| dt.$$

Como $|e^{-i\theta_o}| = 1$, segue-se que

$$\rho_o \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

4.2 Caminhos e domínios

Arco contínuo: É definido como um conjunto de pontos (x, y) tais que $x = X(t)$ e $y = Y(t)$, ($a \leq t \leq b$), onde X e Y são funções contínuas do parâmetro real t .

Exemplo: O semi-círculo $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$, ($0 \leq t \leq \pi$).

Arco simples fechado: Se $X(a) = X(b)$ e $Y(a) = Y(b)$ e nenhum outro par de valores distintos de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) .

Arco suave: Se as funções X e Y têm derivadas contínuas $X'(t)$ e $Y'(t)$, que não se anulam simultaneamente para qualquer valor de t . Seu comprimento é

$$L = \int_a^b \sqrt{[X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2} dt.$$

Caminho: É uma cadeia contínua de um número finito de arcos suaves.

¹ $\int f(x) dx \leq \int |f(x)| dx$

² $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$

³ $\int_a^b |e^{-i\theta_o} F(t)| dt = \int_a^b |e^{-i\theta_o}| |F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt$

Exemplo: Arco 1: $x = t, y = 2, 1 \leq t \leq 2$; Arco 2: $x = 2, y = t, 1 \leq t \leq 2$; Arco 3: $x = t, y = 2, 1 \leq t \leq 2$.

Acrescentado a este conjunto de arcos o arco $x = 1, y = t, 1 \leq t \leq 2$, tem-se um caminho simples fechado

Se o caminho é fechado e não se intercepta, então, é uma curva de Jordam seccionalmente suave.

Domínio de conexão simples: O interior de uma curva fechada simples constitui um domínio conexo simples. (interior de circunferências, elipses)

Domínio de conexão múltipla: Por exemplo, o interior de uma coroa.

4.3 Integral curvilínea

Seja C um caminho suave e $z = x + iy$. Então, quando z está sobre C ,

$$x = X(t), y = Y(t) \text{ e } z = X(t) + Y(t)i, (a \leq t \leq b).$$

Seja $f(z) = f[X(t) + iY(t)]$ seccionalmente contínua. A integral curvilínea sobre C é

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[X(t) + iY(t)] \times (X'(t) + iY'(t)) dt.$$

Se u e v designam as partes real e imaginária de f então

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx). \quad ^4$$

Quando z está sobre a curva C , então

$$|dz| = |X'(t) + iY'(t)| = \sqrt{[dx]^2 + [dy]^2}$$

e portanto,

$$L = \int_C |dz|.$$

⁴Ou seja, $f(z) = u + iv$ e $z = x + iy = X(t) + iY(t)$

Também tem-se que

$$\left| \int_a^b f [X(t) + iY(t)] \times (X'(t) + iY'(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f [X(t) + iY(t)]| \times |X'(t) + iY'(t)| dt.$$

ou seja,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| \times |dz|.$$

Se $|f(z)| \leq M$ quando z percorre o caminho C , onde M é uma constante positiva, e se L designa o comprimento de C , então

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

Exercícios: Calcular as integrais:

- 1) $\int_C z^2 dz$, onde C é o segmento que vai de $z = 0$ a $z = 2 + i$, Resp.;
- 2) $\int_C \frac{1}{z} dz$, onde $C : z = \cos t + i \sin t = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ a partir de $z = 1$, Resp. $2\pi i$;
- 3) $\int_C (y - x - i3x^2) dz$, onde C é o segmento reto de $z = 0$ a $z = 1 + i$, Resp. $1 - i$;
- 4) $\int_C (y - x - i3x^2) dz$, onde C é o segmento de $z = 0$ a $z = i$ e de $z = i$ a $z = i + 1$, Resp. $\frac{1}{2}(1 - i)$.
- 5) Seja C o arco do círculo $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante. Mostre que $\left| \int_C \frac{1}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$ sem calcular o valor da integral.
- 6) Prove que $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ e que $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

4.4 Teorema integral de Cauchy-Goursat

Do teorema de Green tem-se que se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região fechada R contendo do interior de um caminho fechado C e da fronteira C , então

$$\int_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

onde C é orientado no sentido positivo (anti-horário); (os pontos interiores de R ficam à esquerda de quem caminha sobre C em tal sentido).

Seja a função

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

analítica em todos os pontos de um caminho fechado C e de seu interior, e é tal que $f'(z)$ é contínua aí. Então u e v , e suas derivadas parciais de primeira ordem, são contínuas na região fechada, então

$$\int_C (u dx - v dy) = - \int \int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_C (v dx + u dy) = \int \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_C f(z) dz = - \int \int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \int \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Em vista das condições de Cauchy-Riemann, os integrandos das duas integrais duplas se anulam em R . Portanto,

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Exemplos: $f(z) = 1$, $f(z) = z$, $f(z) = z^2$.

O resultado acima foi obtido primeiramente por Cauchy, porém Goursat provou que a continuidade de f' poderia ser omitida das hipóteses do teorema.

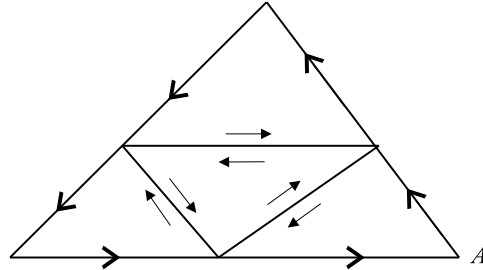
Teorema de Cauchy-Goursat: *Seja $f(z)$ analítica em um domínio de conexão simples D . Então*

$$\int_C f(z) dz = 0$$

sobre qualquer caminho fechado simples C existente em D .

Dem. de Goursat: Sem considerar f' contínua. Seja C o perímetro de um triângulo. Unindo os pontos médios os lados do triângulo, ele fica subdividido em quatro triângulos iguais.

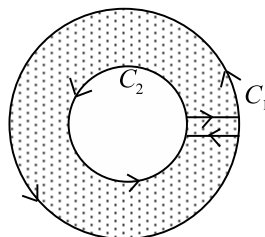
Então $\int_C f(z) dz = \int_{C_I} f(z) dz + \int_{C_{II}} f(z) dz + \int_{C_{III}} f(z) dz + \int_{C_{IV}} f(z) dz$, onde C_I, \dots, C_{IV} são os perímetros dos triângulos. Dentre estas quatro integrais do lado direito, existe uma



tal que $|\int_C f(z) dz| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z) dz \right|$. Subdividindo o triângulo limitado por C_1 como anteriormente, obtém-se um triângulo com perímetro C_2 tal que $\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f(z) dz \right|$ e portanto $|\int_C f(z) dz| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f(z) dz \right|$. Continuando com este procedimento obtém-se triângulos $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ com perímetros $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, tal que $T_n \subset T_m$ se $m < n$ e $|\int_C f(z) dz| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right|$. Seja z_0 o ponto que pertence a todos estes triângulos. Como f' é derivável em $z = z_0$, a derivada $f'(z_0)$ existe, e podemos escrever $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + h(z)(z - z_0)$ (a). Integrando sobre o contorno C_n do triângulo T_n , tem-se $\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} f(z_0) dz + \int_{C_n} (z - z_0) f'(z_0) dz + \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz$. Como $f(z_0)$ e $f'(z_0)$ são constantes então as duas primeiras integrais da direita se anulam e portanto $\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz$. Dividindo (a) por $z - z_0$, rearranjando os termos tem-se que $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = |h(z)|$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, pode-se achar um $\delta > 0$ tal que $|h(z)| < \varepsilon$ quando $|z - z_0| < \delta$. Pode-se, agora, tomar n tão grande que o triângulo T_n se situe no interior do disco $|z - z_0| < \delta$. Seja l_n o comprimento de C_n . Então $|z - z_0| \leq \frac{l_n}{2}$ para todo z sobre C_n e $z_0 \in T_n$. Logo, $\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_n} h(z)(z - z_0) dz \right| < \varepsilon \frac{l_n}{2} l_n = \frac{\varepsilon}{2} l_n^2$. Seja l o comprimento de C . Então o caminho C_1 possui comprimento $l_1 = l/2$, o caminho C_2 possui comprimento $l_2 = l_1/2 = l/4, \dots$, o caminho C_n possui comprimento $l_n = \frac{l}{2^n}$. Portanto, $|\int_C f(z) dz| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| < 4^n \frac{\varepsilon}{2} l_n^2 = 4^n \frac{\varepsilon}{2} \frac{l^2}{4^n} = \frac{\varepsilon}{2} l^2$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a expressão do último membro torna-se tão pequena quanto quisermos. Logo $|\int_C f(z) dz| = 0$.

Conclusão 1: Seja C_2 um caminho fechado no domínio interior a um outro caminho fechado C_1 , onde C_1 e C_2 são ambos orientados no sentido positivo (anti-horário). Se uma função f é analítica na região fechada entre C_1 e C_2 , então

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$



Conclusão 2: “Pode-se impor uma deformação do caminho de integração e desde que não passemos por um outro ponto em que $f(z)$ não é analítica, o valor da integral de linha não muda com tal deformação.” (*Kreyszig, pg 694, vol 5*)

Exercícios: Calcular as seguintes integrais.

- 1) $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ C : (a) $|z| = 2$, (b) $|z - 1| = 1$ (sentido anti-horário);
- 2) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ C é as circunferências $|z| = 2$ (sentido direto) e $|z| = 1$ (sentido anti-horário);
- 3) $\int_C (z - z_0)^{\pm m} dz$ $m \in \mathbb{Z}$ C é qualquer circunferência que contem z_0 ;
- 4) $\int_C \frac{dz}{z^4+4z^2}$ C consiste de $|z| = 3/2$ (sentido anti-horário) e $|z| = 1$ (sentido horário);
- 5) $\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz$ C : $|z - 2i| = 1$ (sentido horário).

4.5 Integrais indefinidas

Sejam z_0 e z dois pontos num domínio simplesmente conexo D sobre o qual f é analítica. Se C_1 e C_2 juntos, formam um caminho fechado, a menos de possíveis auto-interseções, ao longo do qual o teorema de Cauchy-Goursat é válido. Se indicamos por z' , pontos de C_1 e C_2

$$\int_{C_2} f(z') dz' - \int_{C_1} f(z') dz' = 0$$

ou seja, a integral de z_0 a z é

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

É fácil verificar de que $F'(z) = f(z)$, ou seja, a integral de uma função analítica é uma função analítica e vice-versa. desde que o caminho de integração seja confinado a um domínio simplesmente conexo em que o integrando é analítico.

Exemplo: Calcular a integral indefinida

$\int_0^{1+i} z^2 dz$ ao longo do do segmento reto que une os extremos de integração. Resp.: $\frac{1}{3}(1+i)^3$

4.6 Fórmula integral de Cauchy

Teorema: Seja $f(z)$ analítica e unívoca em um domínio de conexão simples D . Então para qualquer ponto $z_0 \in D$ e qualquer caminho fechado em C em D que encerra z_0

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_o} dz$$

a integração realizada no sentido positivo (anti-horário).

Dem. (Churchill, pg 112): Seja C_o um círculo em torno de z_o , $|z - z_o| = r_o$, onde r_o é suficientemente pequeno para que C_o esteja contido no interior de C . A função $\frac{f(z)}{z-z_o}$ é analítica em todos os pontos interiores e sobre C , exceto no ponto z_o . Logo sua integral ao longo da fronteira da região $C \cup C_o$ é zero em virtude do teorema de Cauchy-Goursat. Ou seja,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o} dz - \int_{C_o} \frac{f(z)}{z-z_o} dz = 0$$

onde ambas as integrais são calculadas no sentido anti-horário. Como as integrais ao longo de C e C_o são iguais, pode-se escrever

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o} dz = f(z_o) \int_{C_o} \frac{dz}{z-z_o} + \int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} dz. \quad (\mathbf{a})$$

Mas $z - z_o = r_o e^{i\theta}$ sobre C_o e $dz = ir_o e^{i\theta} d\theta$, de modo que

$$\int_C \frac{dz}{z-z_o} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

para todo número positivo r_o . Como f é contínua no ponto z_o , dado qualquer número positivo ε , existe um número positivo δ tal que $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$ sempre que $|z - z_o| \leq \delta$. Seja $r_o = \delta$. Então $|z - z_o| = \delta$, então

$$\left| \int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} dz \right| \leq \int_{C_o} \frac{|f(z)-f(z_o)|}{|z-z_o|} |dz| < \frac{\varepsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\varepsilon.$$

Tomando ε_o suficientemente pequeno, o valor do lado direito pode se tornar tão pequeno quanto se queira. Como as duas outras integrais em **(a)** são independentes de r_o , então

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o} dz = 2\pi i f(z_o).$$

Exemplos: Calcular as integrais

1) $\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz$, $C: |z| = 2$, $z_o = -i$, Resp:

2) $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$, $C: |z-a| = 1$, (a) $a = \frac{1}{2}$, (b) $a = -1$, (c) $a = i$, Resp: $2\pi i$, $2\pi i$, $-2\pi i$, 0

- 3) $\int_C \frac{z^2}{z^2+1} dz$, C : (a) $|z+i|=1$, (b) $|z-i|=1/2$, (c) $|z|=2$, (d) $|z|=1/2$, Resp: $\pi, -\pi, 0, 0$
- 4) $\int_C \frac{z^2}{z^4-1} dz$, C : (a) $|z-1|=1$, (b) $|z+i|=1$, (c) $|z-i|=1/2$, (d) $|z|=2$, R: $\frac{\pi i}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$
- 6) $\int_C \frac{1}{z} dz$, C : $|z|=1$
- 7) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$, C : $|z|=1$
- 8) $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz$, C : $|z|=1$

4.7 Derivadas de uma função analítica

Teorema: Se $f(z)$ for analítica em um domínio D , então ela possui derivadas de todas as ordens em D , que são também funções analíticas em D . Os valores destas derivadas em um ponto $z_0 \in D$ são dadas pelas fórmulas

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

C é qualquer caminho fechado simples em D que encerra z_0 e cujo interior todo pertence a D ; a curva C é percorrida no sentido anti-horário. (Deve-se derivar a Fórmula Integral de Cauchy em relação a z_0 , Churchill, página 113).

Teorema: Se uma função f é analítica num ponto, então suas derivadas de todas as ordens, f', f'', \dots , também são funções analíticas nesse ponto.

4.8 Teorema de Morera

Teorema: Se uma função f é contínua em todo um domínio simplesmente conexo D e se, para qualquer caminho fechado C em D

$$\int_C f(z) dz = 0$$

então f é analítica em D .

Quando f é analítica no interior de C_o e sobre o círculo $C_o : |z - z_o| = r_o$, então

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots),$$

de acordo com a fórmula integral para derivadas. Se M' é o máximo de $|f'(z)|$ sobre C_o , segue a *desigualdade de Cauchy*, ou seja,

$$|f^{(n)}(z_o)| \leq \frac{n!M'}{(r_o)^n}$$

Se $n = 1$, então

$$|f'(z_o)| \leq \frac{M'}{r_o}$$

o que nos diz que nenhuma função inteira (analítica em todo o plano complexo z), exceto uma constante, é limitada para todo z . Esta conclusão pode ser enunciada como segue.

4.9 Teorema de Liouville

Teorema: Se f é inteira e se $|f(z)|$ é limitado para todos os valores de z no plano complexo, então f é uma constante.

Segundo a hipótese, $f(z) < M$, com $M > 0 \forall z$. Portanto, $\forall z_o$ é válida a desigualdade

$$|f'(z_o)| \leq \frac{n!M'}{r_o} dz$$

para qualquer $r_o > 0$. Pode-se tomar r_o arbitrariamente grande. Como $f'(z_o)$ é um número fixo, segue-se que $f'(z_o) = 0, \forall z_o$, e portanto f é uma constante.

4.10 Teorema fundamental da álgebra

Teorema: Se $p(z)$ é um polinômio em z de grau maior do que um,

$$p(z) = a_o + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m \quad (m = 1, 2, \dots, m; a_m \neq 0)$$

então a equação $p(z) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

Dem.: Suponhamos por redução ao absurdo que $p(z)$ não se anula para qualquer z . Então a função

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

seria analítica em todos os pontos do plano complexo. Também $|f(z)|$ tende para zero quando $|z|$ tende para o infinito, de modo que $|f(z)|$, na hipótese acima, seria limitada para todo z . Conseqüentemente $f(z)$ seria uma constante. Mas isto é uma contradição, visto que $p(z)$ não pode ser constante quando $m = 1, 2, \dots$, e $a_m \neq 0$. Logo $P(z)$ é zero pelo menos para um valor de z .

Série de Potências

Seja $f(z)$ analítica em uma vizinhança de um ponto $z = a$. Seja C uma circunferência nesta vizinhança em a . Pela fórmula integral de Cauchy tem-se

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Fazendo $z = z^*$ e $a = z$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \quad (1)$$

onde z é um ponto fixo e está no interior de C e z^* é a variável complexa de integração. Tem-se

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - a - (z - a)} = \frac{1}{(z^* - a) \left(1 - \frac{z - a}{z^* - a}\right)}. \quad (2)$$

Como z^* está sobre C e z está no interior de C , então $\left| \frac{z - a}{z^* - a} \right| < 1$.

Da progressão geométrica

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

obtem-se a relação

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Fazendo $q = \frac{z-a}{z^*-a}$ segue que

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{z^*-a}} = 1 + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right) + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z-a}{z^*-a}} \quad (3)$$

substituindo (3) em (2) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^*-z} &= \frac{1}{(z^*-a)} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{z-a}{z^*-a}\right)} = \\ &= \frac{1}{(z^*-a)} \left[1 + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right) + \dots + \left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z-a}{z^*-a}} \right]. \\ &= \frac{1}{(z^*-a)} + \frac{z-a}{(z^*-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(z^*-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(z^*-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(z^*-z)(z^*-a)^n} \quad (4) \end{aligned}$$

Substituindo (4) em (1) tem-se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^*-a} dz^* + \frac{z-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2} dz^* + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^n} dz^* + R_n(z)$$

onde

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^n (z^*-z)} dz^*$$

ou

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(z).$$

Esta representação constitui a fórmula de Taylor. $R_n(z)$ é chamado o resto. Fazendo $n \rightarrow \infty$ então

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Se $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_n(x) = 0$ então a série converge.

5.1 Teorema de Taylor

Seja $f(z)$ analítica em todos os pontos interiores de um círculo C com centro em a . Então, em cada ponto interior z de C , tem-se

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ onde } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$$

isto é, a série infinita acima converge para $f(z)$.

Exemplos: Desenvolver as séries de Taylor das funções abaixo considerando $a = 0$.

$$1) f(z) = e^z \quad \text{Resp. } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$2) f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{Resp.: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$3) f(z) = \cos(z) \quad \text{Resp.: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

$$4) f(z) = \text{sen}(z), a = 0 \quad \text{Resp.: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$5) f(z) = \text{senh}(z) \quad \text{Resp.: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$6) f(z) = \text{cosh}(z), a = 0 \quad \text{Resp.: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

$$7) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$8) -\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

$$9) \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right]$$

$$10) \frac{3+2z}{z+z^2} = \frac{1}{z}\left[2 + \frac{1}{1+z}\right] = \frac{3}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \quad |z| < 1$$

$$11) f(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2} = \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{z-2}\right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{2^{n+1}}$$

$$12) \ln(1+z) \text{ obtém-se integrando os termos da série } \frac{1}{1+z}.$$

$$13) \frac{1}{1+z^k} \text{ obtém-se a série fazendo } z = z^k \text{ na série } \frac{1}{1+z}.$$

$$14) \arctan(z) \text{ obtém-se esta série integrando os termos da série } \frac{1}{1+z^2}.$$

$$15) \frac{kz^{k-1}}{(1+z^k)^2}, k > 0: \text{ basta derivar os termos da série } \frac{1}{1+z^k}.$$

5.2 Teorema de Laurent

Se $f(z)$ for analítica e unívoca sobre duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 com centro em a e na coroa por elas limitadas, então $f(z)$ pode ser representada pela série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n},$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^* \text{ e } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z)^{-n+1}} dz^*$$

sendo cada integral calculada no sentido anti-horário em termos de qualquer caminho fechado simples C , que se situa na coroa e envolve a circunferência menor.

A série de Laurent converge e representa $f(z)$ na coroa aberta que se obtém da coroa dada aumentando continuamente a circunferência C_1 e diminuindo C_2 até que uma delas atinja um ponto onde $f(z)$ seja singular.

Exemplos: Desenvolver as séries de Laurent das funções dadas.

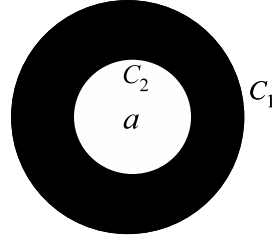


Figura 5.1: Campo de definição da série de Laurent.

- 1) $f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right]$ (centro em $z = 0$).
- 2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$ - basta fazer $\alpha = \frac{1}{z} = z^{-1}$ na série e^z
- 3) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left[1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right]$ (centro em $z = 0$).
- 4) $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right]$, $a \neq 0$, $a < b$, com centro em $z = 0$.

Solução: Deve-se encontrar três expressões para $f(z)$: (a) $|z| < a$; (b) $a < |z| < b$; (c) $|z| > b$

$$(a) \frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a-z} = \frac{-1}{a} \left[\frac{1}{1-z/a} \right] = \frac{-1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad |z| < a$$

$$\frac{1}{z-b} = \frac{-1}{b-z} = \frac{-1}{b} \left[\frac{1}{1-z/b} \right] = \frac{-1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b} \right)^n \quad |z| < b$$

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \right] \quad |z| < a$$

$$(b) \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-a/z} \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n \quad a < |z|$$

$$\frac{1}{z-b} = \frac{-1}{b-z} = \frac{-1}{b} \left[\frac{1}{1-z/b} \right] = \frac{-1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b} \right)^n \quad |z| < b$$

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right] \quad a < |z| < b$$

$$(c) \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-a/z} \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n \quad a < |z|$$

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-b/z} \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z} \right)^n \quad |z| > b$$

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} \right] \quad |z| > b$$

$$5) f(z) = \frac{1}{(1-z^2)} = \frac{-1}{z-1} \times \frac{1}{1+z}, \text{ com centro em } z = 1.$$

Solução: As singularidades são $z = 1$ e $z = -1$. Deve-se determinar as séries, para: (a) $0 < |z-1| < 2$, (b) $|z-1| > 2$.

(a) $\frac{-1}{z-1}$ já está na forma de Laurent. Seja $z-1 = u \Rightarrow z = u+1$, $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{u+2}$ e $0 < |u| < 2$

$$\frac{1}{u+2} = \frac{1}{2-(-u)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-(-u/2)} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-u}{2} \right)^n \quad 0 < |u| < 2$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-u}{2} \right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}} \quad 0 < |z-1| < 2$$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \quad 0 < |z-1| < 2$$

(b) Seja $z-1 = u \Rightarrow z = u+1$, $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{u+2}$ e $|u| > 2$

$$\frac{1}{u+2} = \frac{1}{u-(-2)} = \frac{1}{u} \left[\frac{1}{1-(-2/u)} \right] = \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{u} \right)^n \quad |u| > 2$$

$$\frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{u} \right)^n = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z-1} \right)^n \quad |u| > 2$$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}} \quad |z-1| > 2$$

$$6) f(z) = \frac{1}{z(z+a)} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{z+a}, \quad a > 0, \text{ com centro em } z = 0.$$

Solução: As singularidades são $z = 0$ e $z = -a$. Deve-se determinar as séries, para: (a) $0 < |z| < a$, (b) $|z| > a$.

(a) Como $g(z) = \frac{1}{z+a}$ é analítica em $z = 0$ pode-se usar Taylor. Portanto

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \text{ onde } b_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}. \text{ Portanto } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-1}}{a^{n+1}} \quad 0 < |z| < a$$

(b) $\frac{1}{z+a} = \frac{1}{z-(-a)} = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-(-a/z)} \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-a}{z} \right)^n \quad a < |z|$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{z^{n+2}} \quad |z| > a$$

5.3 Propriedades de Séries

Teorema 1: *Se uma série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge quando $z = z_1$, então a mesma é absolutamente convergente para todo valor de z , tal que $|z| < |z_1|$.

Teorema 2: *Uma série de potências pode ser derivada termo a termo em cada ponto z interior ao círculo de convergência, isto é*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Teorema 3: *Uma série de potências representa uma função analítica no interior do seu círculo de convergência.*

Teorema 4: *Se a série*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

converge para $f(z)$ em todos os pontos interiores a algum círculo $|z - a| = r_0$, então essa série é exatamente a série de Taylor para f em potências de $(z - a)$.

Teorema dos Resíduos

Utilizado para calcular integrais complexas e certas integrais reais.

6.1 Definições

Zeros

Seja uma função $f(z)$ analítica em um domínio D . Se $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{n-1}(a) = 0$ e $f^n(a) \neq 0$, então diz-se que $f(z)$ possui zero de ordem n no ponto $z = a$.

Exemplo: A função $f(z) = (z - a)^3$ possui um zero de terceira ordem em $z = a$.

Ponto singular

Um ponto singular ou uma singularidade de uma função analítica $f(z)$ é um ponto em que $f(z)$ deixa de ser analítica.

Exemplos

a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ possui um ponto singular em $z = 1$

b) $f(z) = |z|$ não é analítica em ponto algum, logo $f(z)$ não tem singularidades no plano z

Ponto singular isolado

Um ponto singular a de uma função f é um ponto singular isolado, ou uma singularidade isolada, se, existe uma vizinhança restrita de a onde $f(z)$ seja analítica. Se uma função f tem no máximo um número finito de descontinuidades em um conjunto aberto, então essas singularidades são isoladas.

Exemplos

a) $f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{(z-4)(z-i)}$ possui singularidades isoladas em $z = 4$ e $z = i$

b) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ possui singularidade isolada em $z = 1$

Ponto singular não-isolado

Um ponto singular a de uma função f é um ponto singular não-isolado, ou uma singularidade não-isolada, se qualquer vizinhança de a contém outras singularidades, ou seja, pontos onde $f(z)$ não é analítica.

Exemplo: $f(z) = \tan(1/z)$ - tem singularidade não isolada em $z = 0$

Singularidade evitável

Uma singularidade a é uma singularidade evitável, ou removível, de $f(z)$ se $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe. Assim, a singularidade de f é evitada, simplesmente definindo-se ou redefinindo-se o valor de f em a .

Exemplos

a) $f(z) = \frac{z^2 - 16}{z - 4i}$ possui singularidade isolada evitável em $z = 4i$;

b) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 2z + 1}{z - 5} & z \neq i \\ 2i & z = i \end{cases}$ possui singularidade isolada evitável em $z = i$, para que $f(z)$ seja analítica no disco $|z| < 3$.

Pólo de ordem m e Singularidade essencial

Se $f(z)$ possui uma singularidade isolada em $z = a$, pode-se então representá-la por sua série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n},$$

válida em uma certa vizinhança de $z = a$ (excluindo o próprio ponto $z = a$). A última parte da série é chamada “a parte principal de $f(z)$ próximo a $z = a$ ”. Se $c_m \neq 0$ e $c_n = 0$ para $\forall m < n$ então a série reduz-se a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{(z-a)^1} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m}, (c_m \neq 0)$$

Neste caso “a parte principal” consiste de um número finito de termos, e a singularidade de $f(z)$ em $z = a$ é chamada de *pólo de ordem m* . Qualquer singularidade de uma função analítica diferente de um pólo é chamada uma *singularidade essencial*.

Como determinar a ordem de um pólo

Um ponto singular isolado a de uma função $f(z)$ é *pólo de ordem m* se $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = B$, B sendo um número finito, diferente de zero, e m positivo inteiro.

Exemplos

a) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ possui um pólo de ordem n no ponto $z = a$

b) $f(z) = \frac{1}{z}$ possui um pólo de ordem 1 (pólo simples) em $z = 0$

c) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$ possui singularidade essencial em $z = 0$;

6.2 Resíduos

Se $f(z)$ for analítica em uma vizinhança de um ponto $z = a$, então de acordo com o teorema integral de Cauchy tem-se

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para qualquer caminho fechado naquela vizinhança. Porém, se $f(z)$ possuir um pólo ou uma singularidade essencial isolada em $z = a$ e a encontrar-se no interior de C então geralmente tem-se que

$$\int_C f(z) dz \neq 0$$

e neste caso pode-se representar $f(z)$ através da série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n},$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz$$

que converge no domínio $0 < |z-a| < R$, onde R é a distância de a ao ponto singular mais próximo de $f(z)$.

Desenvolvendo esta série verifica-se que

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

e portanto,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i c_1,$$

a integração sendo feita no sentido anti-horário em torno de um caminho fechado simples C que se situa no interior de $0 < |z-a| < R$ e contém o ponto $z = a$ no seu interior.

O coeficiente c_1 é chamado de **resíduo** de $f(z)$ em $z = a$, e geralmente emprega-se a notação

$$c_1 = \operatorname{Res}_{z=a} f(z)$$

Conclusão 1: Se $f(z)$ possuir pólo simples em $z = a$, então

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

Dem: Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{(z-a)^1}$ com $c_1 \neq 0$. Logo $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) =$

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n + \frac{c_1}{(z - a)^1} \right] = \lim_{z \rightarrow a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^{n+1} + \frac{c_1 (z - a)}{(z - a)} \right] = c_1.$$

Conclusão 2: Se $f(z)$ possuir pólo de ordem m em $z = a$, então

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

Dem: Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{(z-a)^1} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m}$, com $c_m \neq 0$. Fazendo $\phi(z) = (z-a)^m f(z)$, então $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n+m} + c_1 (z-a)^{m-1} + c_2 (z-a)^{m-2} + \dots + c_m$,
 $\phi(z) = \phi(a) + \phi'(a)(z-a) + \frac{\phi''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{\phi'''(a)(z-a)^3}{3!} + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(a)(z-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \dots$
 Fazendo $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^m}$, $f(z) = \frac{\phi(a)}{(z-a)^m} + \frac{\phi'(a)}{1!} \times \frac{1}{(z-a)^{m-1}} + \frac{\phi''(a)}{2!} \times \frac{1}{(z-a)^{m-2}} + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \times \frac{1}{(z-a)} + \dots$. Portanto, $c_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$.

Conclusão 3: Se $f(z)$ tem forma fracionária $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ e possuir pólo simples em $z = a$ ou seja, $p(a) \neq 0$ e $q(z)$ possui um zero de ordem simples em $z = a$, então

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

Exercícios: Determine os resíduos de cada função nos pólos

$$1) f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)}$$

- Pólos: $z_0 = 2$; $z_1 = i$; $z_2 = -i$
- Ordem: todos são de ordem simples
- $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{4}{5}$; $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{i^2}{(i-2)(2i)}$; $\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{(-i)^2}{(-i-2)(-2i)}$

$$2) f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$$

- Pólos: $z_0 = 0$, $z_1 = -2$
- Ordem: $z_0 = 0$ é pólo de ordem simples; $z_1 = -2$ é pólo de ordem 3
- $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{8}$; $\text{Res}_{z=-2} f(z) = -\frac{1}{8}$

$$3) f(z) = \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$$

- Pólos: $z_0 = 3$
- Ordem: $z_0 = 3$ é pólo de ordem 2
- $\text{Res}_{z=3} f(z) = (e^{3t} + 3te^{3t})$

$$4) f(z) = \tan(z) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

- Pólos: $z_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$
- Ordem: Todos os pólos são de ordem simples
- $\text{Res}_{z=z_k} f(z) = -1$

$$5) f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

- Pólos: $z_0 = 0$
- Ordem: $z_0 = 0$ é pólo de ordem 2
- $\text{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$

6.3 Teorema dos Resíduos

Seja $f(z)$ uma função unívoca que é analítica no interior de um contorno fechado simples C e sobre C , com exceção de um número finito de pontos singulares isolados z_1, z_2, \dots, z_n no interior de C . Então

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_i} f(z)$$

a integral calculada no sentido anti-horário sobre C .

Dem: Seja C_j um círculo com centro em z_j , cujo raio é suficientemente pequeno para que n círculos C_1, C_2, \dots, C_n e o caminho C não se encontrem. Esses círculos, juntamente com o caminho C , formam a fronteira de uma região fechada multiplamente conexa na qual f é analítica. De acordo com o teorema de Cauchy-Goursat, tem-se $\int_C f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0$, com a integração realizada no sentido anti-horário. Se $\int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$, $j = 1, \dots, n$, então o teorema está demonstrado.

Exercícios: Calcule as integrais

1) $\int_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz$, onde C é o círculo unitário, orientado positivamente centrado em 0.

- Pólos: $z_0 = 0$
- Ordem: $z_0 = 0$ é pólo de ordem simples
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$
- $\int_C f(z) dz = 2\pi i \times (0) = 0$

2) $\int_C \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz$, onde C é um círculo de raio 3, orientado positivamente centrado em 0.

- Pólos: $z_0 = 1$; $z_1 = 2$
- Ordem: $z_0 = 1$ e $z_1 = 2$ são pólos de ordem simples

- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1$; $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -1$

- $\int_C f(z) dz = 2\pi i \times (1 - 1) = 0$

3) $\int_C \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}} dz$, onde C é o círculo de raio $\frac{1}{30}$, orientado positivamente, centrado em $\frac{1}{2\pi}$.

- Pólos: $z_0 = \frac{1}{2\pi}$

- Ordem: $z_0 = \frac{1}{2\pi}$ é pólo de ordem simples

- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{2\pi}} f(z) = -\frac{1}{4\pi^2}$

- $\int_C f(z) dz = 2\pi i \times \frac{-1}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi i}$

4) $\int_C tg(z) dz$, onde C é o círculo unitário com centro em $z = \frac{\pi}{2}$.

- Pólos: $z_0 = \frac{\pi}{2}$

- Ordem: $z_0 = \frac{\pi}{2}$ é pólo de ordem simples

- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = -1$

- $\int_C f(z) dz = 2\pi i \times (-1) = -2\pi i$

6.4 Cálculo de integrais reais

O teorema dos resíduos fornece um método simples e elegante para o cálculo de certas espécies de integrais reais complicadas.

Integrais impróprias de funções racionais

São integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx,$$

se ambos os limites existirem então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

Supondo que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ seja uma função racional real cujo denominador é diferente de zero para todo x real e possui grau no mínimo duas unidades acima do grau do numerador. Consideramos a integral de linha correspondente

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{p(z)}{q(z)} dz$$

em torno de um caminho $C = S \cup [-r, r]$ conforme a figura.

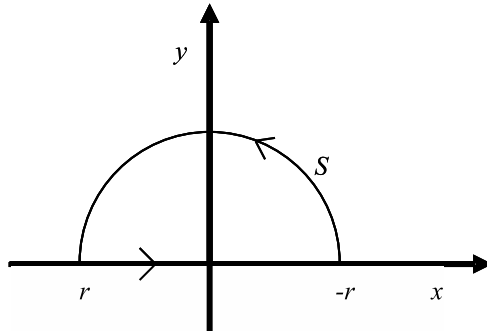


Figura 6.1: Caminho da integral de linha.

Como $f(z)$ é racional então possui um número finito de pólos no semi plano superior; escolhendo r suficientemente grande, C encerra todos estes pólos. Do teorema do resíduo, tem-se

$$\int_C f(z) dz = \int_S f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res } f(z)$$

onde o somatório abrange todos os resíduos de $f(z)$ nos pontos do *semiplano superior*, onde $f(z)$ possui um pólo.

Basta mostrar que $\int_S f(z) dz = 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Fazendo $z = re^{i\theta}$, o caminho S será representado por $r = \text{const}$, e quando z descreve S , então $0 \leq \theta \leq \pi$. Como o grau do denominador de $f(z)$ é no mínimo duas unidades superior ao grau do numerador, tem-se

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad (|z| = r > r_o)$$

para k e r_o suficientemente grandes. Portanto¹, $\int_S f(z) dz \leq \frac{k}{r^2} \pi r = \frac{k}{r} \pi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Exemplos: Calcular as integrais

$$1) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

- Substituição: $z = x$; $dx = dz$
- $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$
- Pólos e ordem: $z_0 = i$ (ordem 2); $z_1 = -i$ (ordem 2); ($z_1 = -i$ não interessa pois está abaixo do semiplano superior);
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{4i}$
- $I = 2\pi i \times \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$

$$2) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx$$

- Substituição: $z = x$; $dx = dz$
- $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)}$
- Pólos e ordens: $z_0 = i$ (ordem 2); $z = -i$; $z = -1 + i$ (ordem simples); $z = -1 - i$ ($z = -i$ e $z = -1 - i$ não interessam pois estão abaixo do semiplano superior)
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{9i-12}{100}$, $\operatorname{Res}_{z=-1+i} f(z) = \frac{3-4i}{25}$
- $I = 2\pi i \times \left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25} \right) = \frac{7\pi}{50}$

¹ $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$

Integrais de funções racionais de sen e cos

São integrais do tipo

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

onde $R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ é uma função racional real de cos e sen, finita no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Fazendo $z = e^{i\theta}$ obtém-se

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Quando θ varia de 0 a 2π , a variável z descreve a circunferência unitária $|z| = 1$, no sentido anti-horário. Como $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ então $d\theta = \frac{dz}{iz}$, e a integral I toma o aspecto

$$I = \int_C f(z) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \left[\frac{f(z)}{iz} \right]$$

a integral sendo realizada no sentido anti-horário em torno da circunferência unitária.

Exemplos: Calcular as integrais

$$1) \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{3} \pi$$

- Substituição: $z = e^{i\theta}$; $d\theta = \frac{dz}{iz}$; $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$

- $f(z) = -\frac{1}{2i} \frac{z^2 + 1}{z(2z - 1)(z - 2)}$

- Pólos e ordem: $z_0 = 0$ (simples); $z_1 = \frac{1}{2}$ (simples); $z_2 = 2$ ($z_2 = 2$ não interessa pois não está no interior de C)

- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4}i$ $\operatorname{Res}_{z=1/2} f(z) = -\frac{5}{12}i$

- $I = 2\pi i \left(\frac{1}{4}i - \frac{5i}{12} \right) = \frac{1}{3}\pi$

2) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5/4 + \text{sen } \theta}$

- Substituição: $z = e^{i\theta}$; $d\theta = \frac{dz}{iz}$; $\text{sen } \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$

- $f(z) = \frac{-4}{2(z + i/2)(z + 2i)}$

- Pólos e ordem: $z_0 = -\frac{i}{2}$ (simples); $z_1 = -2i$ ($z_1 = -2i$ não interessa pois não está no interior de C)

- Resíduos: $\text{Res}_{z=-i/2} f(z) = \frac{4}{3i}$

- $I = 2\pi i \left(\frac{4}{3i} \right) = \frac{8\pi}{3}$

Integrais de Fourier

As integrais reais da forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(mx) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \text{sen}(mx) dx \quad (m \text{ real})$$

ocorrem em ligação com a integral de Fourier.

Se $f(x)$ for uma função racional sem pólos no eixo real ($f(x) \neq 0, \forall x \in R$) e tal que o grau do denominador é, no mínimo, uma unidade a mais que o do numerador, então estas integrais podem ser avaliadas de maneira semelhante à empregada para as integrais do primeiro tipo.

Pode-se considerar a integral correspondente

$$\int_C f(z) e^{imz} dz$$

sobre o contorno C (figura acima) em seus pólos no semiplano superior. Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(mx) dx = -2\pi \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} [\operatorname{Res} f(z)]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(mx) dx = -2\pi \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} [\operatorname{Res} f(z)]$$

Exemplos: Calcular as integrais

$$1) I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(sx)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(sx)}{x^2 + 1} dx$$

- Substituição: $z = x$; $\cos(sx) = e^{isz}$; $dx = dz$
- $f(z) = \frac{e^{isz}}{(z+i)(z-i)}$
- Pólos e ordem: $z_0 = i$ (ordem simples); $z_1 = -i$ ($z_1 = -i$ não interessa pois está abaixo do semiplano superior);
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left(0 - \frac{ie^{-s}}{2}\right)$
- $I = \frac{1}{2} \left[2\pi i \times \frac{e^{-s}}{2i} \right] = \frac{\pi e^{-s}}{2}$

$$2) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(sx)}{x^2 + 1} dx$$

- Substituição: $z = x$; $\operatorname{sen}(sx) = e^{isz}$; $dx = dz$
- $f(z) = \frac{e^{isz}}{(z+i)(z-i)}$
- Pólos e ordem: $z_0 = i$ (ordem simples); $z_1 = -i$ ($z_1 = -i$ não interessa pois está abaixo do semiplano superior);
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left(0 + \frac{-ie^{-s}}{2}\right)$
- $I = 2\pi i \times 0 = 0$

$$3) I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+2)\cos(3x)}{x^2 + 1} dx$$

- Substituição: $z = x$; $\cos(3x) = e^{3zi}$; $dx = dz$
- $f(z) = \frac{(z+2)e^{3zi}}{(z+i)(z-i)}$
- Pólos e ordem: $z_0 = i$ (ordem simples); $z_1 = -i$ ($z_1 = -i$ não interessa pois está abaixo do semiplano superior);
- Resíduos: $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{(2+i)e^{-3}}{2i}$
- $I = 2\pi i \times \frac{(2+i)e^{-3}}{2i} = \pi e^{-3}(2+i)$

Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

O âmbito de aplicação das equações diferenciais parciais é o mais variado possível. Neste texto, serão estudadas as três equações diferenciais que mais se destacam: as equações do calor, da onda e de Laplace. Inicialmente será introduzida a equação do calor que será resolvida em três etapas. Para que se possa resolvê-la completamente é necessário interromper sua solução e estudar as séries de Fourier.

7.1 Condução do Calor

Seja uma barra retilínea uniforme de material homogêneo. Seja o eixo dos x o eixo central da barra, e $x = 0$ e $x = l$ as extremidades da barra. Suponhamos que as superfícies laterais estejam perfeitamente isoladas e que a temperatura u seja uniforme sobre qualquer seção reta da barra. A variação da temperatura ao longo da barra está governado pela equação diferencial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

onde $\alpha = \frac{k}{\sigma s}$ (α : difusidade térmica, k : condutividade térmica; σ : a densidade; s : o calor específico do material da barra)

Sejam também as equações (denominadas de condições de contorno)

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2)$$

e a equação (denominada de condição inicial)

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

O problema consiste em determinar $u(x, t)$ que satisfaça a equação diferencial (1) sujeito as condições de contorno expressas em (2) e a condição inicial expressa em (3).

7.2 Solução da equação diferencial do calor

1. Primeira etapa: Separação de Variáveis

Seja

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (4)$$

então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

e portanto

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{\alpha^2 G(t)} = q \quad (5)$$

De (5) tem-se duas equações diferenciais ordinárias

$$F''(x) + qF(x) = 0 \quad (6)$$

$$G'(t) + \alpha^2 qG(t) = 0 \quad (7)$$

Empregando as condições de contorno tem-se

$u(0, t) = F(0)G(t) = 0$, logo $F(0) = 0$ pois se $G(t) = 0$ então $u(x, t) = 0$, o que não interessa.

$u(l, t) = F(l)G(t) = 0$, logo $F(l) = 0$, pois se $G(t) = 0$ então $u(x, t) = 0$, o que não interessa.

2. Segunda etapa: Determinação de soluções das equações (6) e (7) que satisfazem as condições de contorno

A equação característica de (6) é $\lambda^2 + q = 0$. A resolução desta equação será separada em três casos:

- i) Seja $q = 0$. Se $p = 0$, então $\lambda = 0$ e $F(x) = 0$, portanto $u(x, t) = 0$, o que não interessa
- ii) Seja $q = p < 0$. Se $p < 0$, então $\lambda = \pm\sqrt{p}$, portanto, $F(x) = Ae^{\sqrt{p}x} + Be^{-\sqrt{p}x}$. Da primeira condição de contorno tem-se, $F(0) = 0$ e portanto, $A + B = 0$. Da segunda condição $F(l) = 0$ tem-se $Ae^{\sqrt{p}l} + Be^{-\sqrt{p}l} = 0$, ou seja $Ae^{\sqrt{p}l} - Ae^{-\sqrt{p}l} = 0$, $A(e^{\sqrt{p}l} - e^{-\sqrt{p}l}) = 0$, logo $A = 0$, pois $(e^{\sqrt{p}l} - e^{-\sqrt{p}l}) \neq 0$. Como $A = 0$ e $A + B = 0$, então $B = 0$, logo $F(x) = 0$, o que não interessa.
- iii) Seja $q = p^2 > 0$. Se $p^2 > 0$, então $\lambda = 0 \pm pi$, portanto, $F(x) = A \cos px + B \sin px$. Da primeira condição de contorno tem-se $F(0) = 0$ e portanto, $A = 0$. Assim, $F(x) = B \sin px$. Da condição de contorno, $F(l) = 0$ tem-se que $B \sin pl = 0$. Se $B = 0$ então $F(x) = 0$, o que não interessa. Logo $\sin pl = 0$, ou seja $p = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Logo, as soluções

$$F_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

satisfazem (6) e as condições de contorno expressas em (2).

Para valores $q = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, a equação (7) apresenta a forma

$$G'(t) + (\lambda_n)^2 G(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\alpha n\pi}{l}$$

cuja solução geral é

$$G(t) = C_n e^{-(\lambda_n)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

onde B_n é uma constante. Fazendo $B_n \times C_n = D_n$, as funções

$$u_n(x, t) = D_n e^{-(\lambda_n)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

são soluções da equação do calor (1) que satisfazem as condições de contorno expressas em (2).

3. **Terceira etapa:** *Determinação de soluções das equações (6) e (7) que satisfazem a condição inicial (3)*

Para desenvolver esta etapa, será necessário estudar o conceito de Série de Fourier.

7.3 Séries de Fourier

Seja $f(x)$ uma função periódica com período T que pode ser representada por uma série trigonométrica. Ou seja,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Periodicidade

f é periódica, com período $T > 0$ se o domínio de f contiver $x + T$ para todo x pertencente ao domínio de f e se $f(x + T) = f(x)$.

Exemplos

- 1) $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$: o período fundamental é $T = \frac{2l}{n}$;
- 2) $\cos(x)$: período fundamental é $T = 2\pi$;
- 3) $\cos(\theta x)$: período fundamental $T = \frac{2\pi}{\theta}$;

Suponhamos que $f(x)$ é uma função periódica com período $T = 2l$, que pode ser representada pela série trigonométrica

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (8)$$

então

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Dada uma função periódica $f(x)$ com período $T > 0$ pode-se calcular os A_n e B_n por meio das duas equações (9) e (10) e formar a série trigonométrica

$$\frac{A_0}{2} + A_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \text{sen} \frac{\pi x}{l} + \dots + A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l} + \dots$$

que é a série de Fourier que corresponde a $f(x)$. Os seus coeficientes, calculados por meio de (9) e (10), são denominados de coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Exemplos

- 1) $f(x) = \begin{cases} -x, & -l \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < l \end{cases}$ e $f(x+2l) = f(x)$. O período T é $2l$.

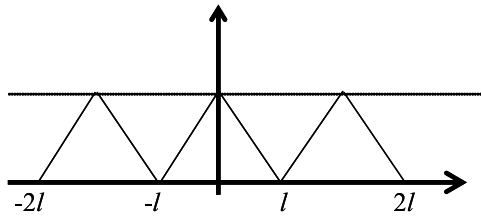


Figura 7.1: Desenho Errado??

A série é

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{0\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \left[\int_{-l}^0 -x dx + \int_0^l x dx \right] = l$$

$$A_n = \frac{1}{l} \left[\int_{-l}^0 -x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \begin{cases} -\frac{4l}{(n\pi)^2}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{l} \left[\int_{-l}^0 -x \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^l x \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \right] = 0$$

Portanto

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{(n\pi)^2} \left[\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]$$

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad f(x+6) = f(x). \text{ O período } T \text{ é } 6.$$

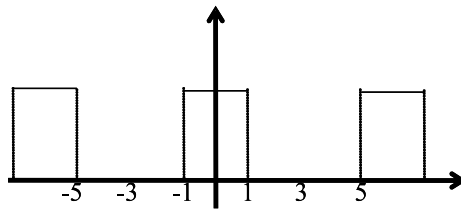


Figura 7.2: Exercício.

A série é

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$A_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}$$

$$A_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Então a série de Fourier para f é

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{3}$$

$$3) f(x) = -x, \quad l \leq x < l, \quad f(x+2l) = f(x)$$

O Teorema de Fourier

Sejam f e f' seccionalmente contínuas no intervalo $-l \leq x < l$. Seja f definida fora do intervalo $l \leq x < l$, de modo a ser periódica com período $2l$. então f tem a série de Fourier

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

onde

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f for contínua. Se f não for contínua em a , então a série converge para

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$$

em $f(a)$.

Exemplo:

- 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq 0 \\ l, & 0 \leq x < l \end{cases}$ e $f(x+2l) = f(x)$. O período T é $2l$.

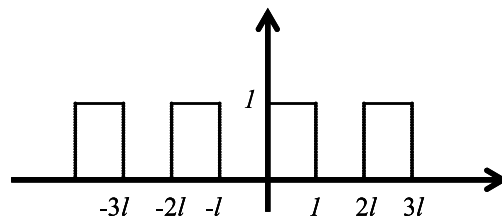


Figura 7.3: Exercício.

A série é

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l l dx = l$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_0^l l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_0^l l \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{2l}{n\pi}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Portanto

$$f(x) = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{l} + \dots \right] = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

Função par e função ímpar

I - Definições

1. Uma função f é uma função *par* se o seu domínio contiver o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(-x) = f(x)$
2. Uma função f é uma função *ímpar* se o seu domínio contiver o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se $f(-x) = -f(x)$

II - Algumas propriedades

- a) A soma, a diferença, o produto e o quociente de funções pares é uma função par;
- b) A soma e a diferença de duas funções ímpares é ímpar
- c) O produto e o quociente de duas funções ímpares é par
- d) O produto e o quociente de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar

III - Suponhamos que f e f' sejam seccionalmente contínuas sobre $-l \leq x < l$ e que f seja uma função periódica *par* com período $2l$. Então os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & n &= 0, 1, 2, \dots \\ B_n &= 0 & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A série de Fourier tem a seguinte forma

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

IV - Suponhamos que f e f' sejam seccionalmente contínuas sobre $l \leq x < l$ e que f seja uma função periódica *ímpar* com período $2l$. Então os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\begin{aligned} A_n &= 0 & n &= 0, 1, 2, \dots \\ B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A série de Fourier tem a seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Exemplo:

- 1) $f(x) = x$, $-l < x < l$, e $f(-l) = f(l) = 0$ e $f(x + 2l) = f(x)$

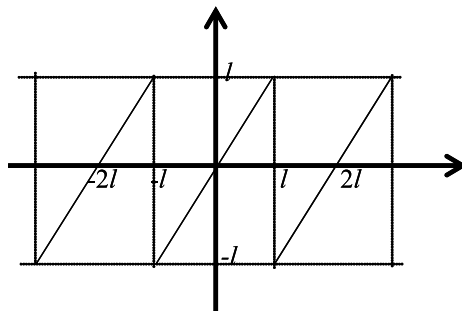


Figura 7.4: Onda em dente de serra.

Esta função é ímpar, então

$$A_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = -2l \frac{-\operatorname{sen} n\pi + n\pi \cos n\pi}{n^2 \pi^2} = \frac{2l}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto a série de Fourier da onda em dente de serra é

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Solução da Equação do Calor

Seja uma barra de material homogêneo cujas extremidades são $x = 0$ e $x = l$. A variação da temperatura ao longo da barra está governado pela equação diferencial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

Sejam as condições de contorno

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (2)$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

Solução de (1) sujeito as condições (2) e (3)

8.1 Solução da equação diferencial do calor

1. Primeira etapa: *Separação de Variáveis*

Seja

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (4)$$

então tem-se duas equações diferenciais ordinárias

$$F''(x) + qF(x) = 0 \quad (5)$$

$$G'(t) + \alpha^2 qG(t) = 0 \quad (6)$$

2. **Segunda etapa:** *Determinação de soluções das equações (5) e (6) que satisfazem as condições de contorno*

As equações

$$F_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$G(t) = C_n e^{-(\lambda_n)^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{\alpha n \pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

são soluções satisfazem (5) e (6) e as condições de contorno expressas em (2).

Fazendo $B_n \times C_n = D_n$, as funções

$$u_n(x, t) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} e^{-(\lambda_n)^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

onde $\lambda_n = \frac{\alpha n \pi}{l}$, são soluções da equação do calor (1) que satisfazem as condições de contorno expressas em (2).

3. **Terceira etapa:** *Determinação de soluções das equações (6) e (7) que satisfazem a condição inicial (3)*

Na terceira etapa deve-se determinar os valores de D_n tal que a equação

$$u_n(x, t) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} e^{-(\lambda_n)^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{\alpha n \pi}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

satisfaz também a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Considerando a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\lambda_n)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

e a condição de contorno $u(x, 0) = f(x)$ tem-se que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Esta última expressão é uma série de Fourier (tendo $A_n = 0$) tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

Considerando $f(x)$ ímpar, então

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exercícios: (Kreyszig, volume 3, página 581, exercício 6 – 11)

8.2 Exemplos

1) - Consideremos a condução de calor em uma barra de cobre ($\alpha = 1,14$) que tem 100cm de comprimento e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t > 0$. Achar uma expressão para a temperatura $u(x, t)$ se a distribuição inicial de temperatura na barra for dada por:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 25 \\ 50 & 25 \leq x < 75 \\ 0 & 75 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

Sol.:

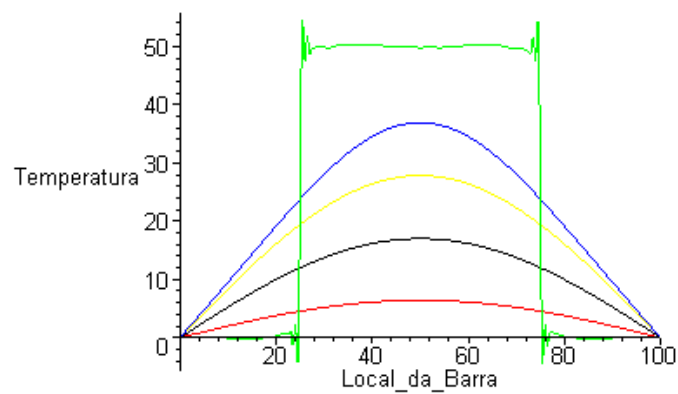
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\lambda_n)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad D_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$D_n = \frac{2}{100} \int_0^{100} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} dx = \frac{2}{100} \int_{25}^{75} 50 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} dx = -\frac{100}{n\pi} \left(\cos \frac{3}{4}n\pi - \cos \frac{1}{4}n\pi \right)$$

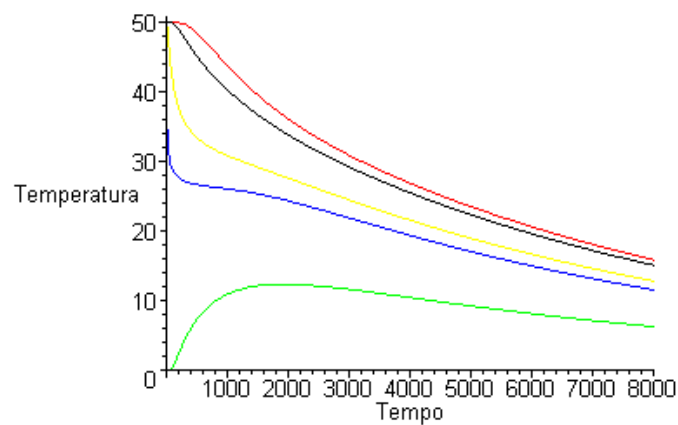
e portanto

$$u(x, t) = -\frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{3}{4}n\pi - \cos \frac{1}{4}n\pi \right) \times \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} \times e^{-(\lambda_n)^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{1,14n\pi}{100}$$

Distribuição da temperatura para diferentes Tempos



Dependência entre a temperatura e o tempo em diversas locais



Dependência entre a temperatura o tempo e o local

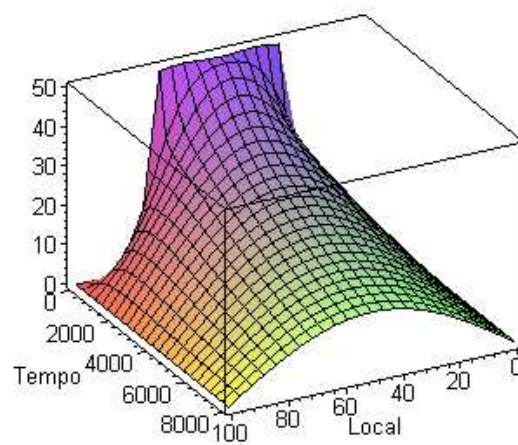


Figura 8.1: Gráfico.

Alguns gráficos relacionados à solução obtida

2) - Consideremos a condução de calor em uma barra metálica que tem $1m$ de comprimento e cujas extremidades são mantidas a $0^\circ C$ para todo $t > 0$. Achar uma expressão para a temperatura $u(x, t)$ se a distribuição inicial de temperatura na barra for dada por:

$$u(x, 0) = 10$$

Sol.:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\lambda_n)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad D_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} n\pi x dx, \quad D_n = 2 \int_0^1 10 \operatorname{sen} n\pi x dx = -20 \frac{\cos n\pi - 1}{n\pi}$$

e portanto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -20 \frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x e^{-(\lambda_n)^2 t} = \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} (2n-1)\pi x e^{-((2n-1)\pi)^2 t}$$

Alguns gráficos relacionados à solução obtida

8.3 Solução da Equação do Calor - Condições de contorno não homogêneo

Seja a equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

sujeita as condições de contorno

$$u(0, t) = T_1 \quad u(l, t) = T_2 \quad (2)$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

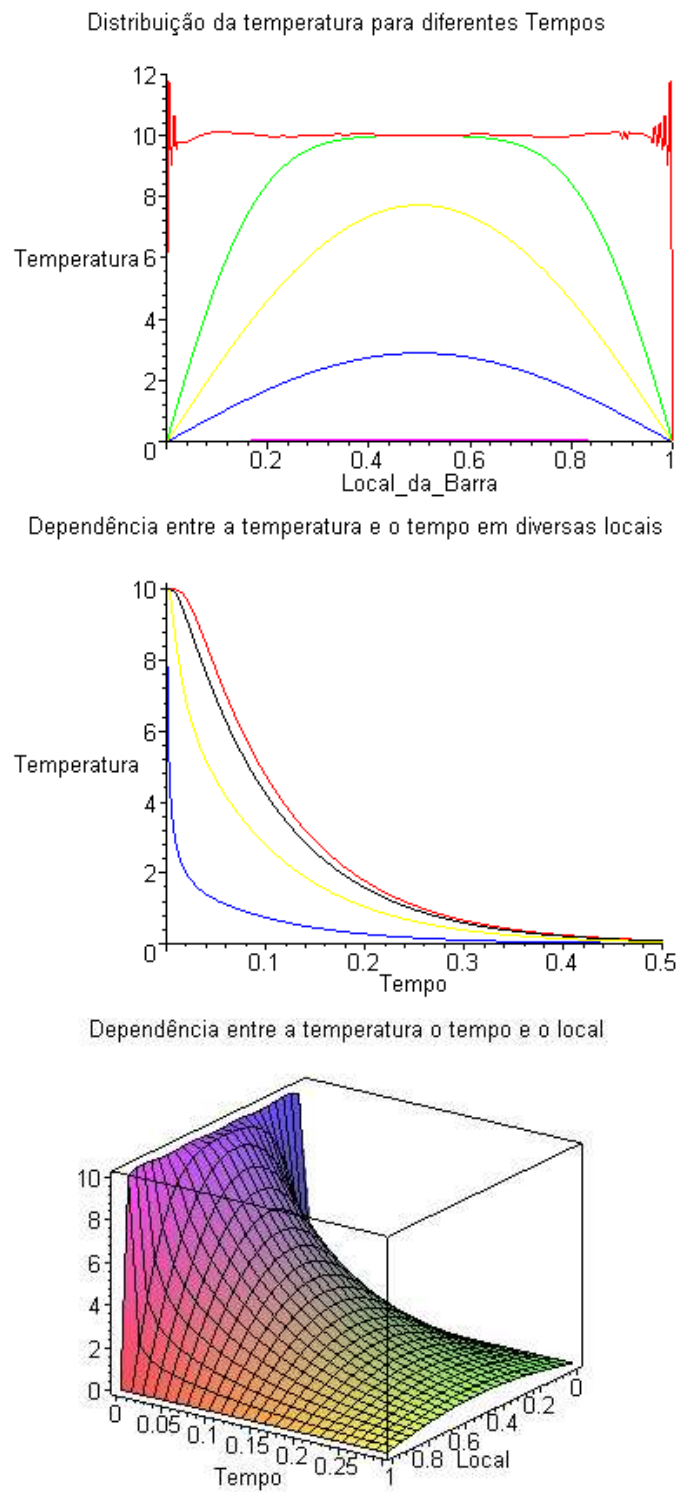


Figura 8.2: Gráfico.

Solução de (1) sujeito as condições (2) e (3):

Após um longo período de tempo, a temperatura terá uma distribuição permanente $v(x)$ que será independente do instante t e das condições iniciais. Portanto

$$v''(x) = 0 \quad 0 < x < l$$

$$v(0) = T_2$$

$$v(l) = T_2$$

e portanto

$$v(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1.$$

Vamos exprimir a distribuição como soma da distribuição da temperatura no estado permanente $v(x)$ e uma certa distribuição (transiente) de temperatura $w(x, t)$

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 (v+w)}{\partial x^2} &= \frac{\partial (v+w)}{\partial t} & \therefore \quad \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} \\ w(0, t) = u(0, t) - v(0) &= T_1 - T_1 = 0 \\ w(l, t) = u(l, t) - v(l) &= T_2 - T_2 = 0 \\ w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) &= f(x) - v(x) = 0 \\ u(0, t) = T_1 \quad u(l, t) &= T_2 \end{aligned}$$

Assim, de modo semelhante à equação considerando as extremidades não isolada tem-se a equação

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(\lambda_n)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{\alpha n\pi}{l}$$

onde

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) - (T_2 - T_1) \frac{x}{l} + T_1 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exemplo:

Seja uma barra de alumínio ($\alpha = 0,86$), de comprimento $l = 20\text{cm}$, com a temperatura inicial uniforme de 25°C . Suponhamos que no instante $t = 0$, a extremidade é resfriada a 0°C , enquanto a extremidade $x = l$ é aquecida a 60°C , mantendo-se depois imutáveis as temperaturas das duas extremidades.

a) Achar a distribuição de temperatura na barra em qualquer instante t .

$$u(x, t) = 60 \frac{x}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\left(\frac{n\pi \cdot 0,86}{20}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{20} \quad D_n = \frac{2}{20} \int_0^{20} \left[25 - (60 - 0) \frac{x}{20} + 0 \right] \sin \frac{n\pi x}{20} dx$$

$$D_n = \frac{1}{10} \int_0^{20} (25 - 3x) \sin \left(\frac{n\pi x}{20} \right) dx = 10 \frac{7n\pi \cos n\pi - 12 \sin n\pi + 5n\pi}{n^2 \pi^2} = \frac{70n\pi \cos n\pi + 50n\pi}{n^2 \pi^2}$$

$$\text{E portanto } u(x, t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{50}{n\pi} + \frac{70(-1)^n}{n\pi} \right) e^{-\left(\frac{n\pi \cdot 0,86}{20}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{20}$$

b) Usar apenas o primeiro termo da série $u(x, t)$ para achar a temperatura aproximada, em $x = 5\text{cm}$, quando $t = 30\text{s}$ e quando $t = 60\text{s}$.

$$u(5, 30) = 15 + \left(\frac{50}{\pi} - \frac{70}{\pi} \right) e^{-30 \left(\frac{\pi \cdot 0,86}{20} \right)^2} \sin \frac{\pi}{4} \approx 12,4^\circ\text{C}$$

$$u(5, 60) = 15 + \left(\frac{50}{\pi} - \frac{70}{\pi} \right) e^{-60 \left(\frac{\pi \cdot 0,86}{20} \right)^2} \sin \frac{\pi}{4} \approx 13,5^\circ\text{C}$$

c) Usar os dois primeiros termos da série de $u(x, t)$ para determinar um valor aproximado de $u(5, 30)$. Qual a diferença percentual entre as aproximações com um termo e com dois termos? O terceiro termo tem efeito apreciável para esse valor de t ?

$$u(5, 30) = 15 + \left(\frac{50}{\pi} - \frac{70}{\pi} \right) e^{-30 \left(\frac{\pi \cdot 0,86}{20} \right)^2} \sin \frac{\pi}{4} + \left(\frac{50}{2\pi} + \frac{70}{2\pi} \right) e^{-30 \left(\frac{2\pi \cdot 0,86}{20} \right)^2} \sin \frac{\pi}{2} \approx 14,5^\circ\text{C}$$

$$100(1 - 12,4/14,5) = 14,483\%$$

$$\text{O terceiro termo é } \left(\frac{50}{3\pi} - \frac{70}{3\pi} \right) e^{-30 \left(\frac{3\pi \cdot 0,86}{20} \right)^2} \sin \frac{3\pi}{4} \approx -0,0011^\circ\text{C}$$

Alguns gráficos desta equação estão plotados abaixo

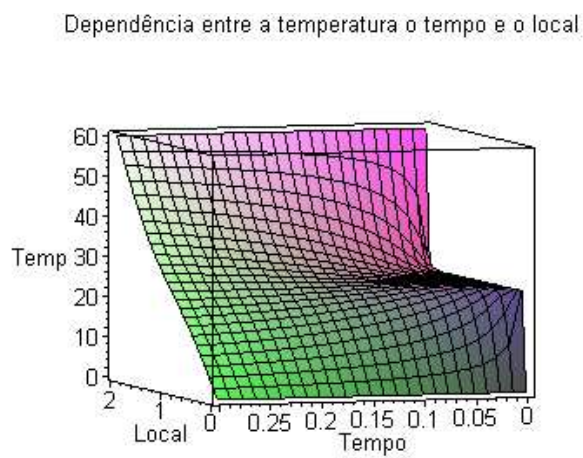
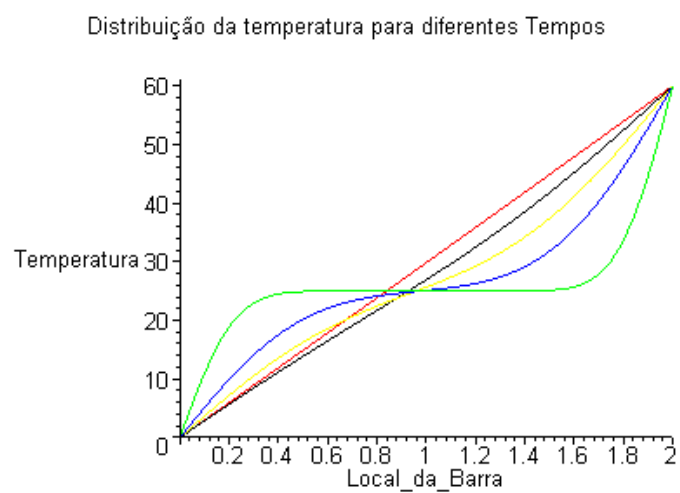
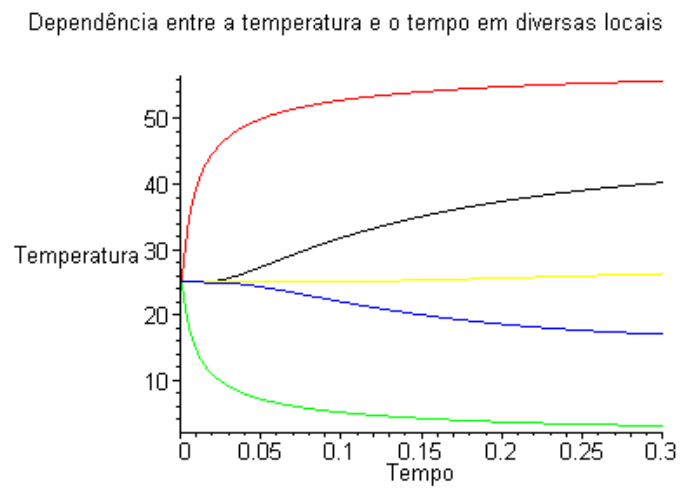


Figura 8.3: Gráficos.

Solução da Equação da Onda: Vibrações de uma Corda Elástica

9.1 Conceituação

Suponhamos que uma corda elástica seja movimentada (tangendo-a por exemplo) de modo a vibrar em um plano vertical, e seja $u(x, t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t . Se forem desprezados efeitos de amortecimento, como o da resistência do ar, e se a amplitude não for muito grande, então $u(x, t)$ obedece à equação diferencial parcial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

onde $\alpha^2 = T/\delta$ (α : é a velocidade de propagação das ondas; T : é a tensão (força) na corda, δ : a massa por unidade de comprimento do material da corda).

Sejam também as condições de contorno e as condições iniciais

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

(A equação (3) dá a posição inicial da corda e a equação (4) a velocidade inicial)

Deve-se ter também que

$$f(0) = f(l) = 0, g(0) = g(l) = 0 \quad (5)$$

O problema matemático consiste em determinar $u(x, t)$ que satisfaça à equação diferencial (1) sujeito as condições de contorno (2) e as condições iniciais (3) e (4).

9.2 Solução da equação diferencial da onda

1. Primeira etapa: Separação de Variáveis

Seja

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (6)$$

então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t)$$

e portanto

$$\frac{G''(t)}{\alpha^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -p^2 \quad (7)$$

Então tem-se duas equações diferenciais ordinárias

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0 \quad (8)$$

$$G''(t) + \alpha^2 p^2 G(t) = 0 \quad (9)$$

A constante p é arbitrária.

2. Segunda etapa: Determinação de soluções das equações (8) e (9) que satisfazem as condições de contorno

Isto é

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad u(l, t) = F(l)G(t) = 0 \quad t \geq 0$$

e portanto

$$(a) \quad F(0) = 0 \quad (b) \quad F(l) = 0 \quad (10)$$

A solução geral de (8) é

$$F(x) = A \cos(px) + B \operatorname{sen}(px) \quad (11)$$

logo,

$$F(0) = A = 0 \quad F(l) = B \operatorname{sen}(pl) = 0$$

Deve-se ter $B \neq 0$ pois senão $F = 0$. Assim, a condição $F(l) = 0$ conduz a

$$\operatorname{sen}(pl) = 0 \quad \text{isto é} \quad p = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Fazendo $B = 1$, obtêm-se as soluções

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

de (8) que satisfazem (2).

Para valores $p = \frac{n\pi}{l}$, a equação (9) apresenta a forma

$$G'(t) + (\lambda_n)^2 G(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{\alpha n\pi}{l}$$

cujas soluções gerais são

$$G_n(t) = C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \operatorname{sen}(\lambda_n t) \quad n = 1, 2, \dots$$

onde B_n e D_n^* são constantes não conhecidas. Assim as funções

$$u_n(x, t) = F_n(x) + G_n(t) = [C_n \cos(\lambda_n t) + D_n^* \operatorname{sen}(\lambda_n t)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad n=1, 2, \dots$$

são soluções da equação da onda (1) que satisfazem as condições de contorno (2).

3. Terceira etapa: *Determinação de soluções das equações (8) e (9) que satisfazem as condições iniciais*

Na terceira etapa deve-se determinar os valores de C_n e D_n tal que as equações

$$u_n(x, t) = [C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \text{sen}(\lambda_n t)] \text{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

satisfazem também a condição iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$.

Considerando a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \cos(C_n t) + D_n \text{sen}(\lambda_n t)] \text{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (12)$$

então da condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ tem-se que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

Esta última expressão é uma série de Fourier (tendo $A_n = 0$) e

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Analogamente, derivando (12) com relação a t e empregando a condição inicial (4), encontra-se

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} [-C_n \lambda_n \text{sen}(\lambda_n 0) + \lambda_n D_n \cos(\lambda_n 0)] \text{sen} \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l} = g(x).$$

que também é uma série de Fourier (tendo $A_n = 0$) e

$$\lambda_n D_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e portanto

$$D_n = \frac{2}{\alpha n \pi} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Segue-se, finalmente, de que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\lambda_n t) + D_n \operatorname{sen}(\lambda_n t)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (13)$$

onde $\lambda_n = \frac{\alpha n \pi}{l}$ e cujos coeficientes C_n e D_n são

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$D_n = \frac{2}{\alpha n \pi} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

é solução da equação diferencial parcial (1) sujeito às condições de contorno (2) e as condições iniciais (3) e (4).

9.3 Exercícios

I - Determinar a deflexão $u(x, t)$ da corda vibrante (comprimento $l = \pi$, extremidades fixas e $\alpha^2 = 1$) correspondente à velocidade inicial nula e deflexões iniciais:

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|---|
| 1) $0,001 \operatorname{sen} x$ | 2) $k \operatorname{sen} 2x$ | 3) $k(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x)$ |
| 4) $0,001x(\pi - x)$ | 5) $0,001x(\pi^2 - x^2)$ | 6) $k \left[\left(\frac{1}{2}\pi\right)^4 - \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^4 \right]$ |

II - Separando as variáveis, determinar soluções $u(x, t)$ das seguintes equações.

9) $u_x = u_y$

10) $xu_x = yu_y$

11) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Equação de Laplace

Uma das mais importantes equações diferenciais parciais que aparecem na matemática aplicada é a que está associada ao nome de Laplace: em duas dimensões tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e em três dimensões escreve-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Aplicações:

1. Equação da condução do calor bidimensional em estado permanente
2. Equação da condução do calor tridimensional em estado permanente
3. Na análise dos campos eletrostáticos
4. Função de energia potencial de uma partícula no vácuo (equação do potencial)
5. Investigação do movimento permanente (independente do tempo) de um fluido incompressível
6. Os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica sofre uma torção

Como é independente do tempo, então não tem condições iniciais a serem cumpridas.

10.1 Problema de Dirichlet em um retângulo

Consideremos o problema matemático de encontrar a função u que satisfaz equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, e também às condições de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0 & \quad u(x, b) = 0 & \quad 0 < x < a \\ u(0, y) = 0 & \quad u(a, y) = f(y) & \quad 0 \leq y \leq b \end{aligned} \quad (2)$$

onde f é uma função dada no intervalo $0 \leq y \leq b$. (Não tem condição inicial.)

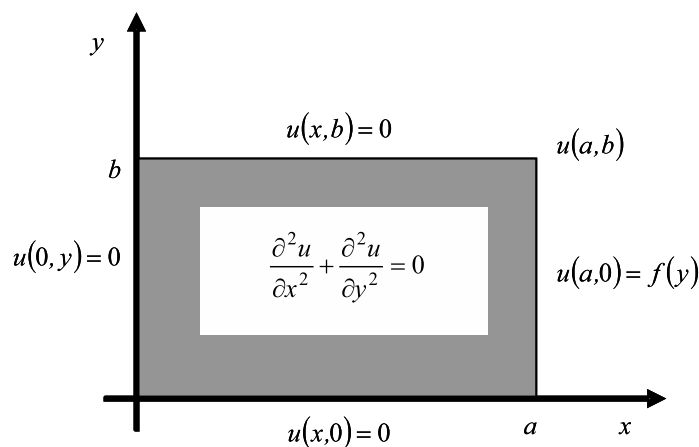


Figura 10.1: Gráfico.

10.2 Solução da equação de Laplace

1. Primeira etapa: Separação de Variáveis

Seja

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3)$$

então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

e

e portanto

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = k$$

Então tem-se duas equações diferenciais ordinárias

$$Y'' - kY = 0 \quad (4)$$

$$X'' + kX = 0 \quad (5)$$

A constante k é arbitrária.

Das equações em (2) e (3) obtém-se

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad (6)$$

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \quad (7a)$$

$$u(x, b) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \quad (7b)$$

2. Segunda etapa: *Determinação de soluções das equações (4) e (5) que satisfazem as condições de contorno homogêneas expressas em (2)*

Nesta etapa serão determinadas soluções das equações diferenciais (4) e (5) que atendem as condições de contorno (6), (7a) e (7b). Primeiro será determinada a solução de

$$Y'' - kY = 0$$

que atende as condições iniciais (7a) e (7b). A equação característica de (4) é $\lambda^2 - k = 0$, cuja solução é $\lambda = \pm\sqrt{k}$.

i) Se $k = \sigma^2 > 0$, então as raízes da equação característica são reais, e portanto a solução geral da equação (4) é

$$Y(y) = Ae^{\sigma y} + Be^{-\sigma y}$$

Das condições (7a) e (7b) tem-se $A = B = 0$, e $Y(y) = 0$, o que não interessa.

ii) Se $k = 0$, então a solução geral de (5) é

$$Y(y) = Ay + B$$

Das condições (7a) e (7b) tem-se $A = B = 0$, e $Y(y) = 0$, o que não interessa.

iii) Seja $k = -\sigma^2 < 0$. Neste caso as raízes da equação característica são complexas, e portanto a solução geral da equação (5) é

$$Y(y) = A \cos(\sigma y) + B \sin(\sigma y)$$

Das condições (7a) e (7b) tem-se que $Y(0) = A + 0 = 0 \Rightarrow A = 0$ e que $Y(b) = 0 + B \sin(\sigma b) = 0$ o que implica em $\sin(\sigma b) = 0$ para

$$\sigma = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, \dots$$

Fazendo $B = 1$, então

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}, n = 1, 2, \dots$$

são soluções da equação (4) e que satisfazem as condições de contorno (7a) e (7b).

Substituindo $k = \sigma^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ na equação (5) tem-se que

$$X'' - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X = 0$$

que apresenta raízes reais. Assim, a equação (5) possui soluções gerais

$$X(x) = Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}$$

Da condição inicial (6) $X(0) = 0$ tem-se que $X(0) = C + D = 0 \Rightarrow C = -D$. Portanto¹,

$$X_n(x) = D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}, n = 1, 2, \dots$$

são soluções gerais da equação (5) que satisfazem a condição de contorno (6).

Assim as funções

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}, n = 1, 2, \dots$$

são soluções da equação de Laplace que satisfazem as três primeiras condições de contorno em (2).

3. Terceira etapa: *Determinação de soluções das equações (4) e (5) que satisfazem a condição de contorno não homogêneo expressa em (2)*

Para determinar uma solução geral para a equação diferencial (1) sujeito as condições de contorno expressas em (2), deve-se determinar o valor de D_n da quarta condição de contorno. Ou seja,

$$u(a, y) = f(y)$$

Vamos admitir que pode-se representar a solução $u(x, y)$ na forma da série

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

Portanto

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(y)$$

cujos coeficientes $D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$ devem ser os coeficientes de uma série de senos de Fourier para f , com período $l = 2b$, e serão dados por

¹ $\cosh(\sigma x) = \frac{1}{2}(e^{\sigma x} + e^{-\sigma x})$ e $\sinh(\sigma x) = \frac{1}{2}(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x})$

$$D_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$D_n = \frac{2}{b \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \quad (9)$$

Desta forma, a solução da equação diferencial parcial (1), que obedece às condições de contorno expressas em (2) é dada pela equação (8) com os coeficientes D_n dados pela equação (9).

10.3 Exercícios

1. a) Achar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que também satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0 & & u(a, y) = 0 & & 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0 & & u(x, b) = g(x) & & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

b) Achar a solução se $g(x)$ for dado pela fórmula

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ a - x & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

2. Achar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, e que também obedece às condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0 & & u(a, y) = 0 & & 0 < y < b \\ u(x, 0) = h(x) & & u(x, b) = 0 & & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

11.1 Revisão: Séries de Fourier

Seja $f(x)$ satisfazendo a seguintes condições.

1. $f(x)$ é definida no intervalo $-l < x < l$;
2. $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $-l < x < l$;
3. $f(x + 2l) = f(x)$, i.é, $f(x)$ é periódica com período $2l$.

Então, em todo ponto de continuidade, temos

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

onde

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2a)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (2b)$$

Num ponto de descontinuidade $x = a$, tem-se a série converge em $f(a)$ para

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$$

11.2 Forma Complexa das Séries de Fourier

Em notação complexa, a série de Fourier (1) e coeficientes (2a-2b) pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{l}} \quad (3)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Para demonstrar a forma (4), utiliza-se nas equações (2a) e (2b) $\cos n\pi = \frac{1}{2}(e^{in\pi} + e^{-in\pi})$ e $\sin n\pi = \frac{1}{2i}(e^{in\pi} - e^{-in\pi})$.

11.3 Transformadas Finitas de Fourier

A transformada finita de Fourier em seno de $f(x)$, $0 < x < l$, é definida como

$$f_s(n) = \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (5)$$

A função $f(x)$ é chamada de transformada inversa de Fourier em seno de $f_s(n)$ sendo dada por

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

Notação: $f_s(n) = F_s\{f(x)\}$ e $f(x) = F_s^{-1}\{f_s(n)\}$.

A transformada finita de Fourier em cosseno de $f(x)$, $0 < x < l$, é definida como

$$f_c(n) = \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (7)$$

A função $f(x)$ é chamada de transformada inversa de Fourier em cosseno de $f_c(n)$ e é dada por

$$f(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (8)$$

Notação: $f_c(n) = F_c\{f(x)\}$ e $f(x) = F_c^{-1}\{f_c(n)\}$.

Para (de)monstrar estas propriedades considere

a) Uma função $f(x)$ ímpar em $(-l, l)$. Então

$$A_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Depois faz-se $f_s(n) = \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$ e portanto $B_n = \frac{2}{l} f_s(n)$.

b) Uma função $f(x)$ par em $(-l, l)$. Então

$$B_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Depois faz-se $f_c(n) = \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ e portanto $A_0 = \frac{1}{l} f_c(0)$ e $A_n = \frac{2}{l} f_c(n), \quad n = 1, 2, \dots$

Exercícios:

1) Seja $f(x) = 2x, \quad 0 < x < 4$. Encontre

a) A transformada finita de Fourier em seno:

$$\text{Como } l = 4, \text{ temos } f_s(n) = \int_0^4 2x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} dx = -32 \frac{-\operatorname{sen} n\pi + n\pi \cos n\pi}{n^2 \pi^2} = -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi}$$

b) A transformada finita de Fourier em cosseno:

$$f_c(n) = \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx = 32 \frac{\cos n\pi + n\pi \sin n\pi - 1}{n^2 \pi^2} = 32 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi^2} \text{ para } n > 0, \text{ e } f_c(0) = 16.$$

2) Encontre $f(x)$, se:

$$\text{a) } ,F_s(n) = \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ onde } 0 < x < 8 \quad (l = 8)$$

$$f(x) = F_s^{-1}\{f_s(n)\} = F_s^{-1}\left\{\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\right\} = \frac{2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{8}$$

b) $f_c(n) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{2n}$, $n = 1, 2, \dots$ e $\frac{\pi}{4}$ se $n = 0$, onde $0 < x < 2\pi$ ($l = 2\pi$)

$$f(x) = F_c^{-1}\{f_c(n)\} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{2n} \cos \frac{n\pi x}{2\pi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{nx}{2}$$

11.4 Integral de Fourier

Seja $f(x)$ uma função periódica $f_T(x)$ que possui período T e pode ser representada por uma série de Fourier:

$$f_T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ e considerando que a função não periódica resultante

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x)$$

é absolutamente convergente, i.é.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

existe, então podemos escrever, para todo ponto de continuidade,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x\} d\lambda$$

onde

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx \quad \text{e} \quad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \lambda x dx$$

Ou equivalentemente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(x-u) du d\lambda$$

Num ponto de descontinuidade $x = a$, deve-se substituir $f(x)$ por $\frac{1}{2}[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$.

Os 3 exemplos a seguir desenvolvidos mostram que a representação em integral de Fourier pode ser empregada para o cálculo de integrais.

Exercícios

1) (Pulso Isolado, Seno Integral) Determinar a integral de Fourier que representa a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \int_{-1}^1 1 \cos \lambda x dx = \frac{2}{\lambda} \text{sen } \lambda$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen } \lambda x dx = \int_{-1}^1 \text{sen } \lambda x dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda} \text{sen } \lambda \cos \lambda x d\lambda$$

Da definição da integral de Fourier, tem-se então que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & x = \pm 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

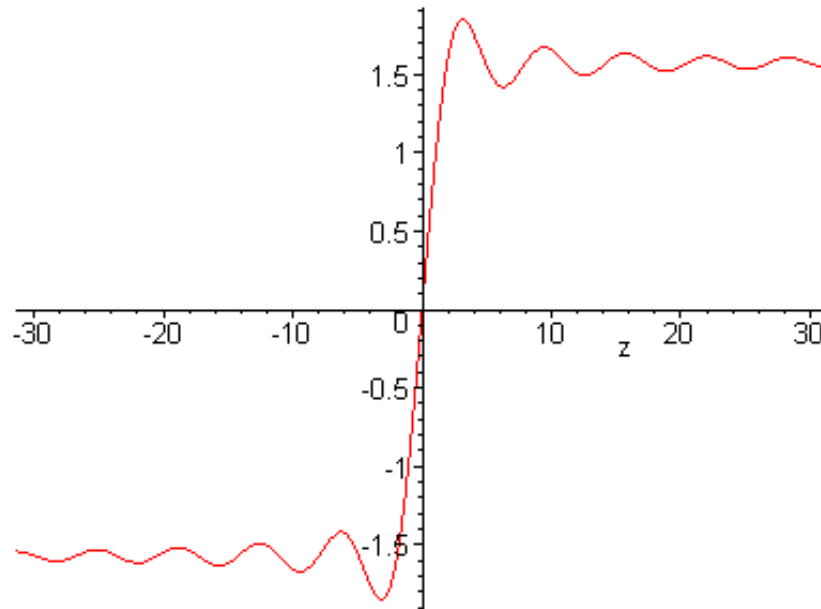
Em particular, se $x = 0$, então

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

Esta integral é o limite do chamado *seno integral*

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

quando $z \rightarrow \infty$. O Gráfico de seno integral $\text{Si}(z)$ é



No caso de uma série de Fourier os gráficos das somas parciais são curvas de aproximações da curva da função periódica representada pela série. Semelhantemente no caso da integral de Fourier, as aproximações são obtidas substituindo ∞ pelos números a . Assim a integral

$$\int_0^a \frac{\text{sen } \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

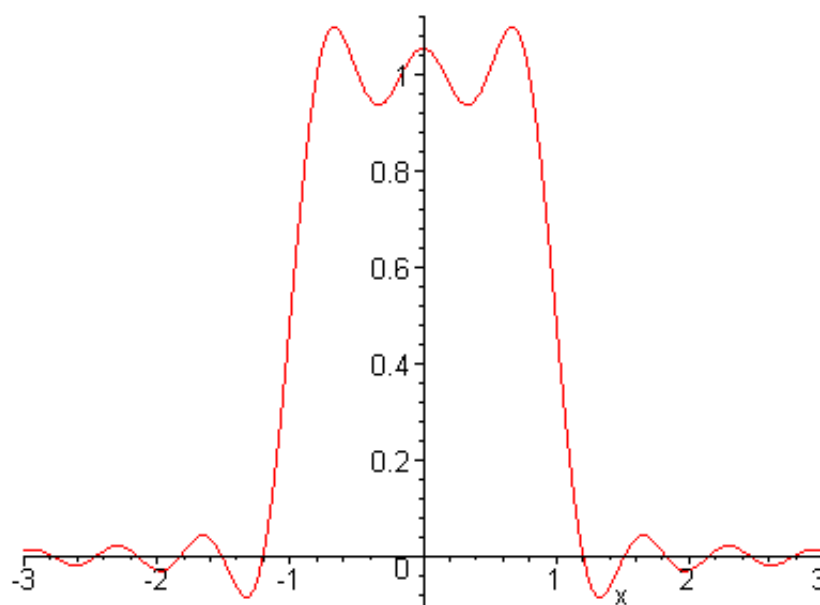
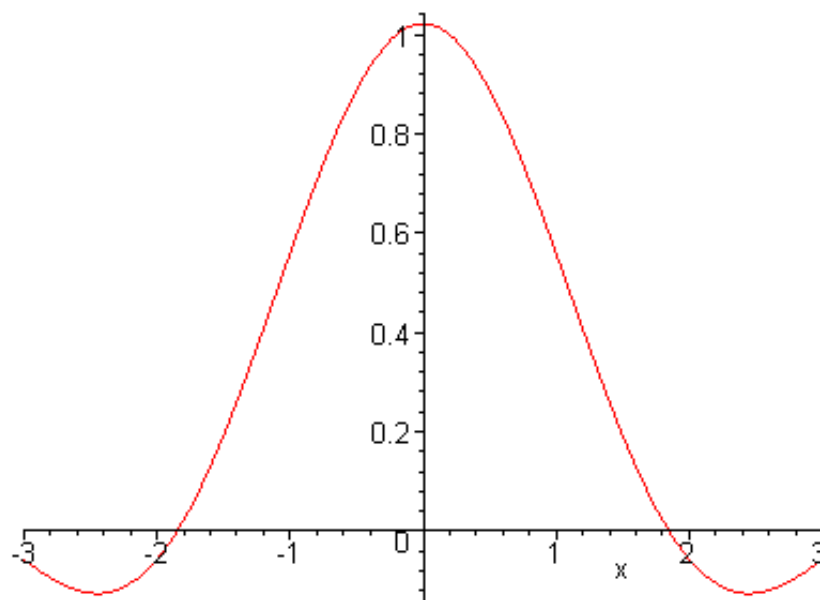
se aproxima da integral (A) e portanto de $f(x)$. A figura a seguir apresenta oscilações próximo dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ considerando respectivamente $a = 2$, $a = 10$ e $a = 30$.

Empregando substituições trigonométricas, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\text{sen } \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda &= \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{1}{2\lambda} \text{sen } \lambda (1+x) + \text{sen } \lambda (1-x) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\text{sen } \lambda (x+1)}{\lambda} d\lambda + \\ \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\text{sen } (-\lambda (x-1))}{\lambda} d\lambda & \\ = & \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda + \lambda x = t$, então $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dt}{t}$, $0 \leq t \leq (x+1)a$. Fazendo também $\lambda x - \lambda = t$, então $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dt}{t}$, e o intervalo $0 \leq \lambda \leq a$ corresponde a $0 \leq t \leq (x-1)a$. Então

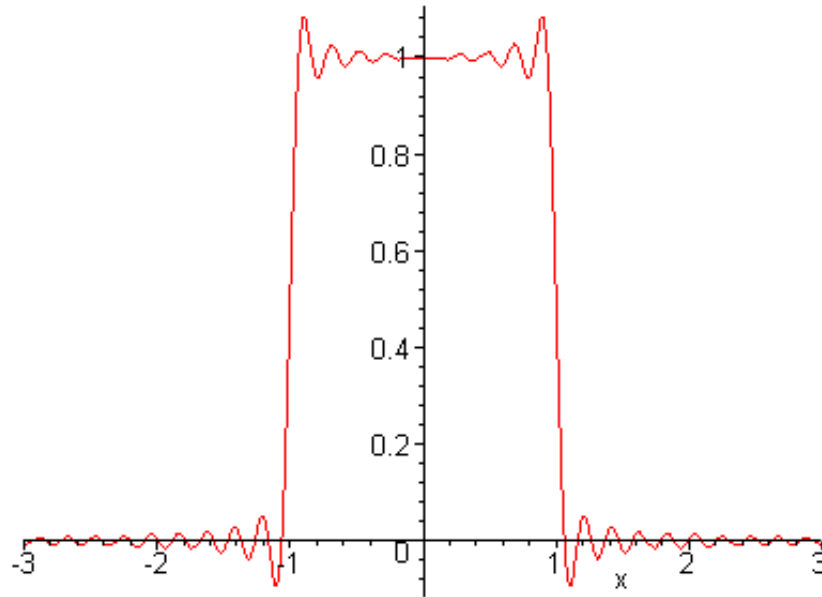
$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\text{sen } \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{x+1} \frac{\text{sen } t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{x-1} \frac{\text{sen } t}{t} dt. \text{ Daí decorre que a integral vale}$$



$$\frac{1}{\pi} \{ \text{Si} [a(x+1)] - \text{Si} [a(x-1)] \}$$

ou seja

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si} [a(1+x)] - \text{Si} [a(x-1)] \}$$



2) (Integral de Laplace). Determinar a integral de Fourier de $f(x) = e^{-kx}$, quando $x > 0$ e $f(-x) = f(x)$ ($k > 0$)

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx} \cos \lambda x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \lambda x dx = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-kx} \cos \lambda x dx = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{ke^{-ak} \cos a\lambda - \lambda e^{-ak} \sin a\lambda - k}{k^2 + \lambda^2} \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{ke^{-k\infty} \cos \lambda\infty - \lambda e^{-k\infty} \sin \lambda\infty - k}{k^2 + \lambda^2} \right) = 2 \left(-\frac{0 \cos \lambda\infty - 0 \sin \lambda\infty - k}{k^2 + \lambda^2} \right) = \frac{2k}{k^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx} \sin \lambda x dx = 0 \text{ pois } f(x) \text{ é uma função par}$$

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2} d\lambda, \quad (x > 0, k > 0)$$

Da definição da integral de Fourier tem-se que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

Esta última integral é chamada de integral de Laplace.

A integral de Laplace também pode ser obtida do cálculo de integrais reais usando variáveis complexas:

- Fazendo $\lambda = z$, $\cos \lambda x = e^{iz}$, e $d\lambda = dz$;
- $f(z) = \frac{e^{izx}}{k^2 + \lambda^2} = \frac{e^{izx}}{(z - ik)(z + ik)}$;
- Pólos: $z = ik$ (simples), $z = -ik$ (simples); ($z = -ik$ não interessa pois está abaixo do semiplano superior);
- Resíduos: para $z = ik$ o resíduo é $\frac{e^{-kx}}{2ki}$;
- $\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\frac{e^{-kx}}{2ki} \right] = \frac{\pi}{2k} e^{-kx}$.

3) (Integral de Laplace). Determinar a integral de Fourier de $f(x) = e^{-kx}$, quando $x > 0$ e $f(-x) = -f(x)$ ($k > 0$).

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \operatorname{sen} \lambda x}{k^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \cdot (x > 0, k > 0)$$

4) Empregando a representação em integral de Fourier, provar que

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x + \lambda \operatorname{sen} \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, (x > 0)$$

5) Representar as seguintes funções $f(x)$ sob a forma da integral de Fourier

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Forma Complexa da Integral de Fourier

Em notação complexa, a integral de Fourier pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) e^{i\lambda(x-u)} du d\lambda$$

Forma Complexa da Transformada Infinita de Fourier

Seja uma função $F(x)$. Da forma complexa da Integral de Fourier segue que se

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} F(u) du$$

então

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u} f(\lambda) d\lambda$$

que resulta em $f(x)$ substituindo u por x . Ou seja,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} f(\lambda) d\lambda$$

A função $f(\lambda)$ é chamada de *transformada de Fourier de $F(x)$* . A função $F(x)$ é a *transformada inversa de Fourier de $f(\lambda)$* .

11.5 Transformadas Infinitas de Fourier em senos e co-senos

A *transformada infinita de Fourier em seno de $F(x)$* , $0 < x < \infty$, é definida como

$$f_s(\lambda) = \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{sen} \lambda x dx$$

A função $F(x)$ é então chamada *transformada inversa de Fourier em seno de $f_s(\lambda)$* e é dada por

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

A *transformada infinita de Fourier em co-seno de $F(x)$* , $0 < x < \infty$, é definida como

$$f_c(\lambda) = \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{cos} \lambda x dx$$

A função $F(x)$ é então chamada *transformada inversa de Fourier em co-seno* de $f_c(\lambda)$ e é dada por

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda$$

As transformadas de Fourier (tanto a finita como a infinita) podem ser usadas na resolução de equações diferenciais.

Exercícios

1) Seja U uma função de x e t , para $0 < x < l$, $t > 0$,

a) A transformada finita de Fourier em seno de $\frac{\partial U}{\partial x}$ é:

$$F_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{n\pi}{l} F_c \{U\}$$

b) A transformada finita de Fourier em co-seno $\frac{\partial U}{\partial x}$ é:

$$F_c \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{n\pi}{l} F_s \{U\} - \{U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi\}$$

2) Seja U uma função de x e t , para $0 < x < l$, $t > 0$,

a) A transformada finita de Fourier em seno de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ é:

$$F_s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} F_s \{U\} + \{U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi\}$$

b) A transformada finita de Fourier em co-seno $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ é:

$$F_c \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} F_c \{U\} - \{U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi\}$$

3) Use as transformadas finitas de Fourier para resolver $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(4, t) = 0$, $U(x, 0) = 2x$, onde $0 < x < 4$, $t > 0$.

Tome a transformada finita de Fourier em seno (com $l = 4$) de ambos os lados da equação diferencial parcial para obter $F_s \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} = F_s \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right\}$, e portanto

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} dx = \int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} dx$$

Escrevendo $u = F_s \{U\}$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u \quad \Rightarrow \quad u(n, t) = Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t}$$

onde $u = u(n, t)$. Para determinar o valor de A , toma-se a transformada finita de Fourier em seno da condição $U(x, 0) = 2x$ ou seja,

$$u(n, 0) = F_s \{U(x, 0)\} = F_s \{2x\} = \int_0^4 2x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{4} dx = -32 \frac{-\sin n\pi + n\pi \cos n\pi}{n^2\pi^2} = -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi},$$

portanto $u(n, 0) = Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{16} \cdot 0} = -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi}$, $A = -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi}$. Assim,

$$u(n, t) = -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t}$$

Tomando a transformada inversa de Fourier em seno de $u(n, t)$ obtem-se

$$U(x, t) = \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} -32 \frac{\cos n\pi}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = -\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2}{16}t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

Fisicamente $U(x, t)$ representa a temperatura de uma barra finita.

4) Resolva $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$, onde $x > 0$, $t > 0$ e $U(x, t)$ é limitada e $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0$.

Tomando a transformada infinita de Fourier em seno tem-se

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{sen} \lambda x dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \operatorname{sen} \lambda x dx$$

Fazendo $u = u(\lambda, t) = \int_0^{\infty} U \operatorname{sen} \lambda x dx$ então

$$\frac{du}{dt} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \operatorname{sen} \lambda x - \lambda U \cos \lambda x \right\} \Big|_0^{\infty} - \lambda^2 \int_0^{\infty} U \operatorname{sen} \lambda x dx = \lambda U(0, t) - \lambda^2 u$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda U(0, t) - \lambda^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -\lambda^2 u \quad \Rightarrow \quad u(\lambda, t) = Ae^{-\lambda^2 t}$$

Das condições iniciais $U(x, 0)$, tem-se que

$$u(\lambda, 0) = Ae^{-\lambda^2 0} = \int_0^\infty U(x, 0) \operatorname{sen} \lambda x dx = \int_0^1 \operatorname{sen} \lambda x dx = -\frac{\cos \lambda - 1}{\lambda}, \quad A = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}, \text{ e}$$

portanto

$$u(\lambda, t) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t}$$

Tomando a transformada inversa de Fourier em seno de $u(\lambda, t)$, encontra-se a solução procurada

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

Fisicamente esta equação representa a temperatura de uma barra infinita.

5) Resolva $\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = U(4, t) = 0$, $U(x, 0) = 3 \operatorname{sen} \pi x - 2 \operatorname{sen} 5\pi x$, onde $0 < x < 4$, $t > 0$.

6) Resolva $\frac{\partial U}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = U(6, t) = 0$, $U(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 3 \\ 0, & 3 < x < 6 \end{cases}$, onde $0 < x < 6$, $t > 0$.

$$\int_0^\infty e^{-y} \cos(ay) dy = \frac{1}{1+a^2}$$

$$2 \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \cos y \sin \lambda y dy = \int_{-\pi}^\pi \cos(y) \sin(\lambda y) dy = 0$$

$$2 \int_0^\pi \cos(y) \cos(\lambda y) dy = -2(\operatorname{sen} \pi \lambda) \frac{\lambda}{-1+\lambda^2}$$

$$f(y) = \cos(y)$$

$$B(L) = \int_{-\infty}^\infty \cos L \cos(Ly) dy = 2 \int_0^\pi \cos(y) \cos(Ly) dy = -2(\operatorname{sen} \pi L) \frac{L}{-1+L^2}$$

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1000} \frac{-2L \operatorname{sen}(\pi L)}{-1+L^2} \cos(L\pi) dL = -\frac{1.5706}{\pi} = -.49994$$