Data Envelopment Analysis-DEA

Volmir Eugênio Wilhelm

Curitiba, 2013

Data Envelopment Analysis (DEA) is a powerful method widely used in the evaluation of performance of Decision Making Units (DMUs). These can be business units, government agencies, police departments, hospitals, educational institutions, and even people.

Prefácio

Estas notas foram feitas para sintetizar o conteúdo da bibliografia referenciada bibliográficas tendo em vista o conteúdo programático de uma disciplina introdutória de DEA. Sugere-se a sua aquisição. O único objetivo destas notas é facilitar as atividades dos alunos em sala de aula, de forma que o aluno tem um maior conforto em sala de aula. De nenhuma maneira a leitura ou consulta da bibliografia está descartada, isto é dever do aluno.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1

Data Envelopment Analysis

Universidade Federal do Paraná

Departamento de Engenharia de Produção

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

1.1 Ementa

Produtividade e mensuração da eficiência técnica; Medidas radiais da eficiência técnica; Medidas não radiais da eficiência técnica; Medidas DEA completas; Medidas cruzadas da eficiência técnica; Medidas da eficiência técnica em ambiente difuso; Outros aspectos; Índice de produtividade de Malmquist.

1.2 Avaliação

A avaliação do aproveitamento escolar será realizado através de uma avaliação escrita, apresentações de artigos e listas de exercícios.

1.3 Bibliografia

1. Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operations Research, vol.2, pág.429-444, 1978

2. Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., Data Envelopment Analysis: A omprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Kluwer

Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 2002

3. Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., *Production Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1994

4. Färe, R., Grosskopf, S., Russell, R.R., *Index Numbers: Essays in honour of Sten Malmquist*, Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1998

5. Fried, H., Lovell, C.A.K., Schmidt, S.S., *The Measurement of Productive Eficiency*, Oxford University Press, New York, USA, 1993

6. Girod, O.A., *Measuring technical efficiency in a fuzzy environment*, Doctoral (Ph.D.) Dissertation, Virginia Tech, Departament of Industrial and Systems Engineering, Blaksburg, Virginia, USA, 1996

7. Zimmermann, H.J., *Fuzzy sets theory and its applications*, 2nd Edition, Kluwer, Academic Press, Boston, USA, 1991

PS.: No final deste texto encontra-se uma bibliografia completa sobre DEA

2

Produtividade e eficiência eficiência

Quando se discute a desempenho de uma empresa, é comum descrevê-la como sendo mais ou menos 'eficiente' ou mais ou menos 'produtiva' [Lovell, 1993, p.3]. A eficiência possui duas componentes: a componente referente à habilidade do gerenciador em transformar insumos em produtos denominada de eficiência técnica, e a componente referente à habilidade do gerenciador em definir proporções ótimas dos insumos e dos produtos à luz dos preços praticados no mercado, denominada de eficiência alocativa. A mensuração da eficiência técnica originou-se da definição de eficiência técnica de Koopmans e da medida desenvolvida por Debreu [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.7]. Segundo Koopmans[1] [*apud* Lovell, 1993, p.10] uma organização é eficiente tecnicamente se e somente se um aumento em qualquer produto gerado pela organização requer a redução no nível de outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo empregado; e se uma redução em qualquer insumo empregado por ela implica num aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto. Em 1951 Debreu [*apud* Russell, 1998, p.7 e 28] introduziu a primeira medida radial da eficiência técnica em termos de um "coeficiente de utilização dos recursos", definindo-a como sendo a unidade menos a máxima redução equiproporcional do consumo de todos os insumos observados tal que o produtor possa continuar a fabricar os mesmos produtos. Um índice igual à unidade indica que o produtor é eficiente tecnicamente; um índice menor que a unidade indica ineficiência técnica e que o consumo de todos os insumos pode ser reduzido na mesma proporção. Em 1957 Farrell desenvolveu um método de programação matemática não paramétrica e empregou a medida de Debreu para mensurar índices de ineficiência em fazendas agrícolas dos Estados Unidos.

A definição de Koopmans sugere a comparação dos níveis dos insumos e dos produtos praticados com os níveis ótimos [Lovell, 1993, p.4] de uma empresa. Por vários anos o maior problema em se mensurar a eficiência técnica era a determinação dos níveis ótimos de uma empresa até que em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes-CCR formularam a abordagem *Data Envelopment Analysis*-DEA para mensurar radialmente índices da

[1] Em alguns textos esta definição é denominada de "Pareto-Koopmans".

eficiência técnica. Com o auxílio de programação matemática não paramétrica, DEA gera uma envoltória dos planos de produção observados. Todos os planos de produção pertencentes a esta envoltória, que é a fronteira de produção, são eficientes tecnicamente e seus níveis de consumo e de produção são ótimos[2]. Os índices da eficiência técnica associados aos demais planos de produção são os menores escalares positivos que contraem os consumos (ou os maiores escalares que expandem as produções) projetando os planos sobre planos *benchmarks*.

Após o desenvolvimento de DEA foram elaboradas outras medidas da eficiência técnica, como a medida radial de Banker, Charnes e Cooper-BCC [1984] e a medida radial de Deprins, Simar e Tulkens-DST [1984]. As medidas de CCR, BCC e DST diferenciam-se quanto a obtenção dos planos de produção *benchmarks* que constituem a envoltória. Na medida de CCR os *benchmarks* são gerados por combinações lineares positivas (e por isso é designada de *free disposal conical hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida radial de BCC as combinações lineares que geram os *benchmarks* são convexas (recebendo denominação de *convex free disposal hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida de DST os *benchmarks* são planos de produção observados na prática e portanto a fronteira de produção é constituída unicamente por planos observados, recebendo a denominação de *free disposal hull*.

Segundo Lovell [1993, p.13] as medidas radiais da eficiência técnica não são perfeitas pois em várias situações não coincidem com a definição de eficiência técnica de Koopmans. Empregando a notação de Färe, Grosskopf e Lovell [1994, p.26 e 39], seja a tecnologia de produção representada pela correspondência consumo $\mathrm{C}(y^o) = \{x : (x, y^o)\}$ é variável, onde $x \in R^N$ é um vetor de quantidades de insumos e $y^o \in R^M$ é o vetor da quantidade fixa dos produtos (qualquer par (x, y^o), com $x \in \mathrm{C}(y^o)$, é um plano de produção variável). Sejam os subconjuntos $Isoq_{C(y)} = \{x \in C(y) : \lambda x \notin C(y) \text{ se } \lambda < 1\}$ que é o conjunto isoquanta de $\mathrm{C}(y^o)$ e $Efc_{C(y^o)} = \{x \in C(y^o) : x' \leq x \Longrightarrow x' \notin \mathrm{C}(y^o)\}$ que é o subconjunto eficiência de $C(y^o)$. Tem-se que $Efc_{C(y^o)} \subseteq Isoq_{C(y^o)}$. A definição de Pareto-Koopmans é rigorosa e requer que o produtor eficiente tecnicamente pertença simultaneamente aos subconjuntos $Efc_{C(y^o)}$ e $Isoq_{C(y^o)}$, porém as medidas radiais identificam como eficientes os planos de produção do conjunto $Efc_{C(y^o)}$ e qualquer outro plano locado no conjunto $Isoq_{C(y^o)}$ 'fora' do subconjunto eficiência.

Para eliminar esta deficiência das medidas radiais, várias medidas alternativas (denominadas de medidas não radiais) da eficiência técnica foram apresentadas com o objetivo de torná-las Pareto-Koopmans [Lovell, 1993, p.14]. Lovell alerta que todas as medidas não radiais sugeridas tem suas deficiências, porém verifica-se na literatura que a mais empregada é a de Charnes, Cooper e Rhodes [1978]. A solução sugerida por eles consiste em contrair radialmente os insumos ou expandir radialmente os produtos alocando o plano de produção no conjunto isoquanta e em seguida realocá-lo tal que passe a pertencer ao conjunto eficiência. O segundo passo pode ser obtido através da inclusão das variáveis

[2]Neste trabalho os planos de produção pertencentes a fronteira de produção serão denominados de planos *benchmarks*.

de folga dos insumos e dos produtos na função objetivo do programa linear que calcula o índice da eficiência técnica radial o que leva a uma redução adicional do consumo de alguns insumos e/ou aumento da produção de alguns produtos.

Dentre as medida não-radiais está a categoria de medidas completas de eficiência técnica, que se caracterizam por possuírem duas propriedades (ser função escalar; avaliar eficiência Pareto-Koopmans) e atender a três critérios (utilizar algoritmos já existentes; ser de fácil manejo computacional; fornecer resultados de fácil interpretação no meio gerencial). Medidas completas de eficiência técnica têm sido apresentadas na literatura nos últimos anos. Uma delas merece especial atenção, pois ela permite ordenar os planos de operação observados de acordo com sua ineficiência técnicas. Tal medida é a Medida Ajustada por Amplitude (RAM)[3], apresentada por Cooper, Park e Pastor (1999).

Quanto às medidas da eficiência técnica comentadas anteriormente pressupõe-se a inexistência de incerteza em relação as quantidades consumidas e produzidas, ou seja, são consideradas quantidades determinísticas. Entretanto, em várias situações da vida real (p.ex. Campos e Verdegay [1989], Luhandjula [1989], Girod [1996], Triantis e Eeckaut [1997], Cooper, Park e Yu [1999]) é muito difícil conhecer o valor exato dos mesmos e segundo Triantis e Eeckaut [1997, p.2], na maioria dos estudos relativos a produção, os dados referentes aos planos de produção não podem ser coletados com exatidão e estas imprecisões são devidas ao fato dos sistemas de medição não serem originalmente projetados para o propósito de coletar dados e informações úteis para estudos da produção. Recentemente, a teoria dos conjuntos difusos tem sido proposta como ferramenta capaz de captar imprecisões associadas aos planos de produção [Triantis e Girod, 1998, p.2], sugerindo a avaliação da eficiência técnica em ambiente difuso, ou seja, quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

Para a avaliação da eficiência técnica em ambiente difuso, estão disponíveis alguns modelos que restringem as análises a poucas maneiras de expressar em termos de quantidades difusas os níveis consumidos e produzidos. A primeira medida desenvolvida por Sengupta [1992], não emprega quantidades difusas mas sugere a existência de imprecisões entre os planos de produção, o que é especificado através de restrições difusas no programa linear que mede o índice da eficiência técnica. O segundo trabalho envolvendo planos de produção difusos e a mensuração da eficiência técnica é o de Girod [1996]. Num trabalho mais completo que o de Sengupta, Girod desenvolveu um conjunto de medidas difusas derivadas das medidas de CCR, BCC e da medida FDH. Estas medidas são úteis nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são expressas através de limites inferiores e limites superiores, indicando ou níveis impossíveis de ocorrer na prática ou níveis que facilmente podem ser implementados pelos produtores.

[3]RAM - *Range Adjusted Measure.*

2.1 Produtividade e Eficiência

A[4] comparação da produtividade entre organizações do mesmo ramo de atividades gera medidas relativas de suas ineficiências. A produtividade varia conforme as diferenças nas tecnologias de produção disponíveis às organizações, nas condições de eficiência associadas à tecnologia empregada, e no ambiente em que ocorre a produção. A análise desses fatores leva à identificação de possíveis fontes de ineficiência técnica, bem como opções produtivas que possibilitam o aumento da produtividade (Lovell, 1993).

Tecnologia de produção é o conjunto de todos os planos de operações viáveis, os quais expressam relações que associam quantidades de insumos a quantidades de produtos através dos vários processos produtivos disponíveis à organização. Todavia, há organizações que, apesar de empregarem a mesma tecnologia, apresentam variações nos seus níveis de produtividade devido a diferenciais em suas habilidades de converter insumos em produtos. O capítulo três apresenta as definições, axiomas e propriedades básicas das tecnologias de produção.

é comum, em avaliações de desempenho produtivo, o uso de termos como "mais ou menos eficiente" e "mais ou menos produtiva" relacionados às organizações avaliadas. Por essa razão, é importante recordar os conceitos de produtividade e eficiência[5].

Na Teoria Econômica, a medida de desempenho mais tradicional é a produtividade, que compara a produção com o consumo. Dado o esperado comportamento otimizador da organização, essa medida indica que quanto maior a produtividade, melhor o desempenho produtivo, como ocorre quando essa medida, ao ser usada na avaliação de desempenho de trabalhadores, aparece na forma de "vendas por hora trabalhada" ou "lucro por trabalhador empregado". Essa forma simples de medir produtividade, que compara um único produto com um único insumo, é chamada convencionalmente de produtividade parcial por não considerar todos os fatores de produção. Todavia, ela não é bem aceita na área empresarial, uma vez que pode levar a uma interpretação incorreta por atribuir a um insumo o acréscimo produtivo que pode ter sido gerado por um insumo não incluído na análise (Cooper, Seiford e Tone, 2000).

Tal deficiência da produtividade parcial é eliminada com a produtividade total, uma medida que considera todos os insumos e todos os produtos e que corresponde à razão entre uma soma ponderada das quantidades de produtos geradas e uma soma ponderada das quantidades de insumos consumidas. Todavia, surgem problemas não somente quanto aos critérios de escolha de quais insumos e produtos devam ser incluídos na avaliação da

[4]Texto elaborado pelo Prof. Jair dos Santos Lapa, do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas-EPS da Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC.

[5]Um estudo mais detalhado sobre a relação eficiência versus produtividade pode ser encontrado em Coelli, Rao e Batese (1998).

produtividade total dos fatores, mas principalmente, quanto aos pesos a empregar no processo de agregação.

Sobre esses dois problemas, Knight (1933, *apud* Lovell, 1993, p. 4) pondera que, se todos os produtos e insumos envolvidos na produção fossem incluídos na medida de produtividade total dos fatores, essa medida seria sempre igual a 1, quaisquer que fossem as quantidades de produtos gerados e de insumos consumidos (desde que algumas delas sejam diferentes de zero). Diante disso, Knight propôs definir produtividade como a razão entre a produção útil e o consumo útil, como mostra a equação (2.1), na qual os preços virtuais da agregação μ_m e ν_n representam, respectivamente, as utilidades dos produtos e dos insumos relevantes para a organização. Esse autor sugere que, na prática econômica, os preços virtuais μ_m e ν_n sejam representados pelos respectivos preços de mercado. Há, porém, dificuldades no emprego dessa fórmula para medir a produtividade total quando o preço de algum produto ou insumo útil não existe ou não é confiável.

$$\text{Produtividade} = \frac{\sum \mu_m y_m}{\sum \nu_m x_m} \tag{2.1}$$

onde:

$y_m \geq 0$ - quantidade gerada do produto m, com $\sum y_m > 0$

$x_m \geq 0$ - quantidade consumida do insumo n, com $\sum x_m > 0$

$\mu_m > 0$ - utilidade do produto m na composição da produção útil;

$\nu_m > 0$ - utilidade do insumo n na composição do consumo útil.

Quanto à eficiência técnica, sua definição original diz respeito à comparação entre a produtividade do plano de operação executado por uma organização e a máxima produtividade que essa organização pode alcançar. Para operações que envolvem o emprego de múltiplos insumos na geração de múltiplos produtos, a definição atualmente empregada de eficiência tem origem nos trabalhos de Vilfredo Pareto, que propôs o bem-estar geral como critério para o julgamento de qualquer política social. Partindo desse critério, esse autor defende que uma política social deve ser adotada sempre que ela cause alguma melhoria ao bem-estar de um indivíduo, sem reduzir o bem-estar de algum outro indivíduo.

Adotando a concepção de Pareto, Koopmans (1951), em seus estudos sobre eficiência na alocação de recursos produtivos, conceitua eficiência técnica do plano de operação executado por uma organização como a condição em que a organização não pode aumentar a quantidade gerada de qualquer produto sem uma redução da quantidade gerada de pelo menos um outro produto ou sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos um insumo, nem pode reduzir a quantidade consumida de qualquer insumo sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos outro insumo ou sem reduzir a quantidade gerada de pelo menos um produto. Nesse contexto, o conjunto de todos os planos de operação eficientes é denominado fronteira de eficiência técnica ou alternativamente, fronteira da produção eficiente.

A análise da eficiência de uma organização pode ser feita sob dois pontos de vista: da eficiência alocativa e da eficiência técnica. A eficiência técnica refere-se à habilidade de evitar o desperdício na geração de tantos produtos quanto os insumos utilizados permitirem ou na mínima utilização dos insumos necessários para a produção. Como a análise da eficiência técnica exclui o fator preço, costuma-se, no meio gerencial, atribuir a ineficiência técnica detectada integralmente ao gestor que escolheu o plano de operação observado, e não ao mercado. A eficiência alocativa, por sua vez, refere-se à habilidade da organização selecionar o plano de operação tecnicamente eficiente, de maior produtividade possível, considerando, como utilidade, os preços de mercado dos insumos e dos produtos envolvidos na operação produtiva. A avaliação da eficiência técnica pode ser orientada para o crescimento da produção, para a economia de recursos ou para alguma combinação desses dois objetivos. Porém, em todos os casos, o objetivo é obter ganhos de produtividade através da eliminação das fontes de ineficiência.

Debreu (1951) estabelece a primeira medida empírica de eficiência técnica moderna ao conceituar o seu "coeficiente de utilização de recursos": uma medida radial, orientada para o uso de insumos que calcula a maior redução equiproporcional que pode ser dada aos insumos, sem reduzir as quantidades geradas de produtos. Entretanto, essa não é uma medida completa, pois, mesmo após a máxima contração equiproporcional do consumo, pode ser que a operação produtiva ainda continue com excesso de algum insumo além do mínimo necessário para a produção gerada. Dessa forma, um plano de operação pode ser considerado eficiente no consumo, com base na medida radial de Debreu, quando ele é realmente ineficiente de acordo com o conceito Pareto-Koopmans, pois nele há algum insumo em excesso, além de existir a possibilidade adicional da produção poder ser maior que aquela já gerada.

Essa medida radial de Debreu é semelhante ao conceito da função distância de Shephard (1953), que mede a distância radial do plano de operação observado à fronteira de eficiência da produção. De acordo com esse conceito, é zero a distância de um plano eficiente a essa fronteira, enquanto que a distância de todo plano ineficiente é positiva; além disso, quanto maior a distância, maior a ineficiência do plano correspondente. Essas duas medidas, assim como todas aquelas apresentadas nas últimas décadas, comparam a produtividade do plano de operação executado com a produtividade máxima observada, quando consideradas sob o conceito de Knight, expresso na equação (2.1).

Até a primeira metade do século XX, a Teoria Econômica concentrava seus estudos nas organizações "racionais", cujos planos de operação estão n fronteira de produção eficiente; assim, os estudos não abordavam a ineficiência e suas causas, pois todos os planos de operação observados eram considerados eficientes, do ponto de vista teórico. Entretanto, o conceito de função distância de Shephard e a medida radial de Debreu fizeram com que a Teoria Econômica começasse a interpretar a tecnologia produtiva como um conjunto composto de dois tipos de planos de operação viáveis: os planos eficientes, que formam a fronteira da produção eficiente, e os demais planos de operação viáveis, obviamente ineficientes, que formam o interior da tecnologia.

Inspirado nos trabalhos de Debreu e Koopmans, Farrell (1957) emprega o "coeficiente de utilização de recursos" de Debreu para a eficiência do setor agrícola dos Estados Unidos, construindo, para esse setor, uma fronteira de eficiência empírica, sem estabelecer, a priori, a sua forma funcional, uma exigência dos métodos paramétricos tradicionais. Esse autor definiu uma medida de eficiência produtiva[6] e mostrou como decompô-la em suas componentes técnica e alocativa. Essa componente técnica é radial e voltada para o consumo, pois calcula a máxima contração possível do consumo, mantendo-se inalterada a produção observada. Um escore unitário dessa componente indica que o plano de operação executado é eficiente, pois ele não pode ter uma redução equiproporcional nos seus insumos sem uma redução consequente da produção, enquanto que um escore menor que 1 indica o grau de ineficiência desse plano, pois ele corresponde à proporção entre a produtividade do plano executado e a produtividade máxima que a organização pode alcançar, mantida a proporcionalidade do consumo e a produção observada.[7]

De acordo com Forsund e Sarafoglou (2000), a contribuição de Farrell foi pioneira em três aspectos, pois a medida Debreeu-Farrell permite: (1) avaliar a eficiência técnica por meio de uma contração radial uniforme; (2) construir uma fronteira de eficiência técnica linear por partes, que envelopa os planos de operação observados, de forma altamente conservadora, visto que essa fronteira empírica fica o mais próximo possível das observações; e (3) calcular tal fronteira usando sistemas de equações lineares. Todavia, ela não mede eficiência Pareto-Koopmanns.

O problema teórico da componente técnica da medida Debreu-Farrell é mostrado na Figura 2.1, que possibilita analisar eficiência técnica orientada para a diminuição do consumo em operações que geram um único produto[8].

[6]Essa medida é chamada Debreu-Farrell em homenagem a esses dois estudiosos.

[7]A medida Debreu-Farrell pode ser transformada facilmente para calcular a máxima expansão equiproporcional da produção, mantendo inalterado o consumo observado. Nesse caso, um escore igual a 1 indica que o plano de operação observado é eficiente, enquanto que um escore maior que 1 indica que o plano observado é ineficiente, pois a organização poderia expandir sua produção e operar com uma produtividade maior.

[8]Essa análise supõe que a tecnologia produtiva exibe retorno de escala constante e descarte forte de insumos e produtos, nos termos definidos com maior precisão no capítulo três e adotados na maioria dos livros sobre eficiência produtiva.

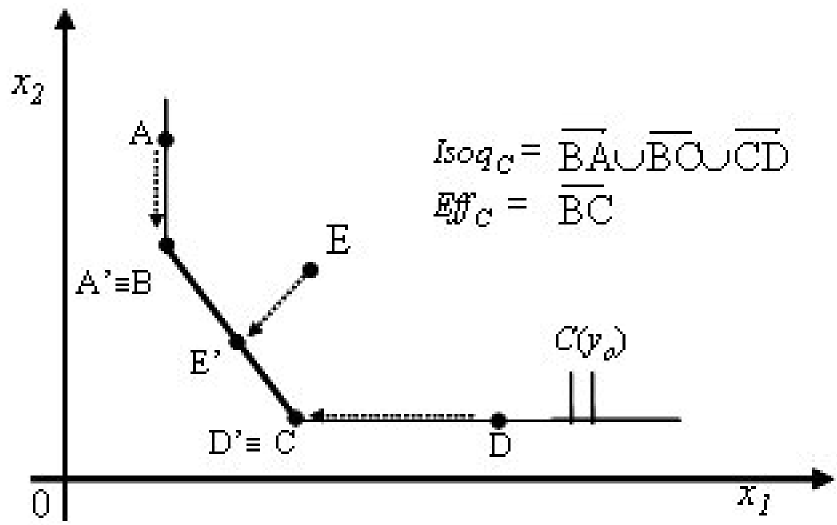

Figura 2.1: **Fronteiras de produção.**

Nesta figura, os produtores A, B, C, D e E geram uma unidade de um único produto empregando dois insumos em quantidades x_1 e x_2. O conjunto $C\,(y_o)$ é formado por todos os planos de operação viáveis, isto é, das combinações de quantidades de insumos (x_1, x_2) capazes de gerar uma unidade do produto y_o.[9] A linha $Isoq_C$, que limita esse conjunto a sudoeste, é chamada isoquanta, sendo formada por todos os planos de operações capazes de gerar uma unidade de produto empregando as menores quantidades de insumos, para cada proporção de insumo $x_1 : x_2$. O segmento $\overline{BC}$ da isoquanta é especial, pois seus planos de operação têm uma característica específica: a diminuição da quantidade de qualquer insumo inviabiliza a geração de uma unidade do produto, quer quando a quantidade do outro insumo é reduzida, quer quando permanece inalterada. Por essa razão, o segmento $\overline{BC}$ é chamado fronteira de eficiência técnica, segundo o conceito Pareto-Koopmans, e costuma ser designado por Eff_C.

Essa ilustração mostra que a medida Debreu-Farrell é inadequada para verificar se um plano de operação observado é Pareto-Koopmans eficiente, visto que:

- os planos de operação A, D e E são ineficientes tecnicamente, pois há planos de operação que geram uma unidade de produto consumindo menores quantidades de insumos;
- uma redução equiproporcional das quantidades dos insumos identifica como meta eficiente o planos E' da isoquanta, que é Debreu-Farrell eficiente;
- os planos de operação A, B, C e D são identificados como eficientes quando avaliados com a medida Debreu-Farrell, por pertencerem à isoquanta;

[9]A proporção $x_1 : x_2$ pode ser interpretada como característica do processo tecnológico empregado.

- todavia, somente os planos de operação B e C são Pareto-Koopmans eficientes, pois apenas eles pertencem à fronteira de eficiência técnica $\overline{BC}$;
- claramente, o plano D não é Pareto-Koopmans eficiente, apesar de ser Debreu-Farrell eficiente, uma vez que ele consome uma quantidade excessiva de insumo x_1, quando comparado com o plano C;
- claramente, o plano A não é Pareto-Koopmans eficiente, apesar de ser Debreu-Farrell eficiente, uma vez que ele consome uma quantidade excessiva de insumo x_2, quando comparado com o plano B.

Por conseguinte, a medida Debreu-Farrell não é completa, visto que ela não reflete todas as ineficiências técnicas dos planos de operação observados. O ponto forte dessa medida reside no fato de ela ter uma fácil interpretação gerencial, uma vez que ela indica a maior contração que o consumo pode ter sem que a produção seja prejudicada. Por essa razão, ela continua a ser bastante empregada na prática. Porém, ela apresenta três deficiências sérias: (1) aplica-se somente a tecnologias com retorno de escala constante e descarte forte de insumo e produto; (2) não permite lidar simultaneamente com múltiplos produtos e múltiplos insumos; e, (3) as ineficiências do consumo e da produção só podem ser avaliadas separadamente. Apesar disso, ela continua a ser estudada na academia, por ela ser a origem da maioria dos estudos sobre medidas de eficiência não-paramétricas realizados até hoje.

A maioria dos estudos baseados na ideia original de Farrell tem como objetivo aprimorar a sua medida de eficiência, através de diferentes meios, a fim de chegar a uma medida adequada ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans. Os esforços que vêm sendo desenvolvidos desde 1957 para eliminação das deficiências da medida Debreu-Farrell deram origem à abordagem Análise Envoltória de Dados (DEA)[10], que estuda a produtividade e a eficiência técnica de organizações que empregam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos. No final da década de 70 já estavam consolidadas duas linhas de pesquisa que empregam programação matemática para construir fronteiras não-paramétricas de eficiência técnica:

- uma, originária do trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes (1978), que estuda medidas radiais baseadas na medida Debreu-Farrell; e,
- outra, orientada pelo trabalho de Färe e Lovell (1978), que estuda medidas não-radiais, baseadas na medida Russell, que minimiza os excessos de insumo.

Apesar de aparentemente conflitantes, essas duas linhas desenvolveram-se de forma complementar e congruente na busca de medidas completas de eficiência técnica. A medida seminal proposta por Charnes, Cooper e Rhodes em 1978 é de fácil interpretação no

[10] *Data Envelopment Analysis*

meio gerencial, mas não mede eficiência Pareto-Koopmanns. Em 1979, esses autores aperfeiçoaram essa medida impondo restrições aos preços virtuais no emprego de (2.1) para calcular a produtividade. Com essa modificação, mede-se eficiência Pareto-Koopmans, mas deixa-se de ter uma medida de interpretação gerencial direta. Färe, Grosskopf e Lovell (1985) corrigem a falha da medida Russell de não considerar todas as ineficiências técnicas do plano de operação observado, apresentando uma nova medida não-radial chamada Russell Grafo, que permite a avaliação conjunta de todas as ineficiências do consumo e da produção da operação produtiva observada. A medida Russell Grafo avalia eficiência Pareto-Koopmans, mas é de difícil cálculo e o escore de eficiência obtido não é de fácil interpretação gerencial.

Uma medida não-radial seminal adequada a tecnologias produtivas complexas e que permite a avaliação conjunta de todas as ineficiências do consumo e da produção é a medida Aditiva apresentada por Charnes *et al* (1985). Trata-se de uma medida de fácil cálculo, baseada na soma dos excessos no consumo e folgas na produção, todavia, ela também não fornece um resultado adequado à tomada de decisão e de fácil interpretação no meio gerencial.

Nos últimos anos do século XX apareceram na literatura científica as primeiras propostas de medidas completas de eficiência técnica. Uma delas merece atenção especial por permitir ordenar os planos observados segundo suas ineficiências: a Medida Ajustada por Amplitude, que é um aperfeiçoamento da medida Aditiva proposta em 1985 por Charnes *et al.*

2.2 Tecnologia de produção

O conceito de eficiência na produção tem recebido um significado mais preciso na economia depois que Koopmans e Debreu introduziram em 1951 a noção de conjunto produção [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.474], geralmente denominado de tecnologia da produção [Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.25]. Segundo a terminologia de Koopmans-Debreu, a tecnologia de produção é a coleção GR de pares (x, y) onde $x \in R^N$ é um vetor de quantidades de insumos e $y \in R^M$ um vetor das quantidades de produtos que possuem a propriedade de serem viáveis[11]

$$GR = \{(x, y) : x \in R^N, y \in R^M; (x, y) \text{ é viável}\} \tag{2.2}$$

A utilidade da noção de conjunto produção para o propósito deste trabalho é o fato de que nos traz a noção de *fronteira* e de *interior* do conjunto. Assim podem-se distinguir

[11] O par (x, y) também é denominado de vetor insumo-produto, ou de fatores de produção, ou ainda de plano de produção.

planos de produção pertencentes ao interior da tecnologia de produção, denominados de ineficientes, e aqueles que pertencem à fronteira, denominados de eficientes. Portanto, a eficiência de um plano de produção pode ser calculada em termos da distância entre este e a fronteira [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.475].

A eficiência técnica pode ser calculada segundo orientação consumo e orientação produção. Na orientação consumo procura-se a maior contração possível do consumo (mantendo o nível de produção observado). Na orientação produção procura-se pela maior expansão possível do vetor produção, sem alterar o nível atual de consumo. Devido a estas duas orientações será útil a representação da tecnologia pelos conjunto consumo ($C(y)$), conjunto produção ($P(x)$) e o gráfico da tecnologia de produção (GR).

1. $C : R_+^M \to C(y) \in R_+^N \Rightarrow C(y)$ é o conjunto dos vetores consumo que produzem pelo menos o vetor produção y;
2. $P : R_+^N \to P(x) \in R_+^M \Rightarrow P(x)$ é a coleção dos vetores produção possíveis de serem gerados a partir do consumo de x;
3. $GR = \{(x, y) \in R_+^{N+M} : y \in \mathrm{P}(x),\ x \in R_+^N\} = \{(x, y) \in R_+^{N+M} : x \in C(y),\ y \in R_+^M\} \Rightarrow GR$ é a coleção de todos os vetores consumo-produção viáveis.

Na figura 2.2 encontram-se ilustrados os conjuntos $P(x)$-gráfico (a) e $C(y)$-gráfico (b). Na figura 2.3, página 21, o gráfico de GR da tecnologia, que é a área limitada pelo eixo dos x e a semi-reta $\overrightarrow{0a}$, e os conjuntos $P(x^o) = [0, y^o)$ e $C(y^o) = [x^o, +\infty)$ modelam a mesma tecnologia, porém representam diferentes aspectos da mesma. O conjunto consumo modela substituição de insumos e o conjunto produção modela substituição de produtos. O gráfico modela ambas as substituições e adicionalmente modela a transformação insumo-produto. A característica que $P(x)$, $C(y)$ e GR têm em comum é a possibilidade das representações de tecnologias em termos de quantidades de insumos e de quantidades de produtos que não envolvem o conhecimento de preços.

A superfície do gráfico de GR, além de modelar a transformação insumo-produto, modela também mudanças proporcionais que ocorrem na tecnologia caracterizando o que se chama de retornos de escala. Os seguintes tipos de comportamento de escala exibidos por tecnologias, ilustrados nos três gráficos da figura 2.4, serão considerados neste trabalho.

1. *Retornos Constantes de Escala* (RCE): se $GR\theta \equiv GR$, $\theta \in R$, $\theta > 0$;
2. *Retornos Não Crescentes de Escala* ($RNCE$) (também denominado de diseconomia de escala): se $GR\theta \subseteq GR, 0 < \theta \leq 1$, ou seja, se $GR \subseteq \theta GR$, $\theta \geq 1$;
3. *Retornos Não Decrescentes de Escala* ($RNDE$) (também denominado de economia de escala): se $GR\theta \subseteq GR$, $\theta \geq 1$, ou seja se $GR \subseteq \theta GR$, $0 < \theta \leq 1$.

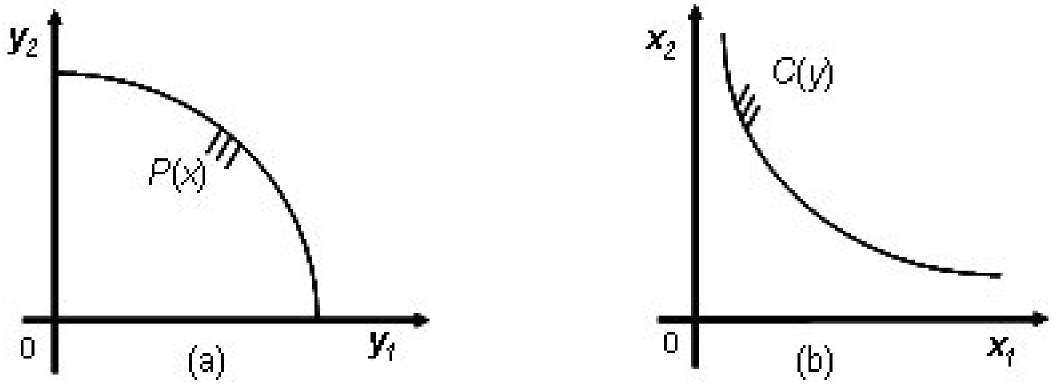

Figura 2.2: **Conjunto Produção-(a) e Conjunto Consumo-(b).**

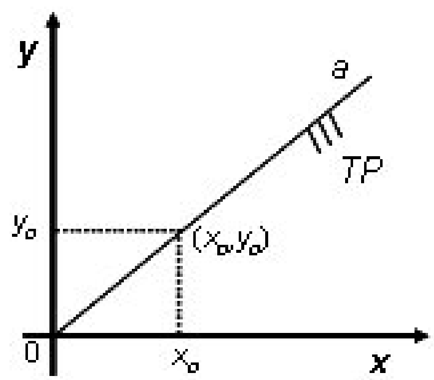

Figura 2.3: **A tecnologia de produção.**

Numa tecnologia que exibe retornos constantes de escala, duplicar o consumo acarreta na duplicação da produção. No caso de exibir retornos não crescentes de escala a duplicação do nível de consumo geralmente não leva a duplicação da produção, mas sim a um valor abaixo deste. Quando a tecnologia apresenta retornos não decrescentes de escala, na duplicação do consumo geralmente ocorre mais que uma duplicação da produção.

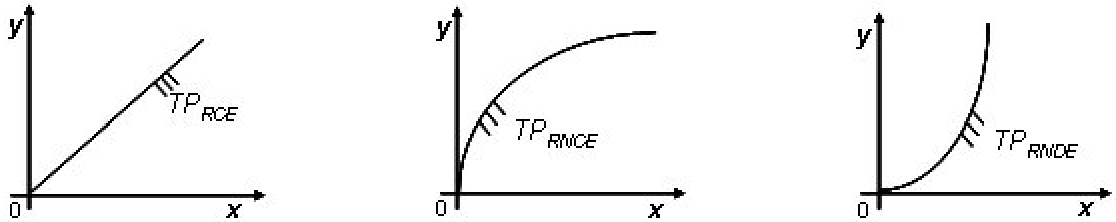

Figura 2.4: **Retornos de escala caracterizados pelo gráfico da tecnologia.**

Para garantir a existência das medidas da eficiência técnica que serão definidas nas próximas seções, os conjuntos C, P e GR devem satisfazer as seguintes propriedades

[Grosskopf, 1986, p.502; Färe, Grosskopf, Lovell, 1993, p.45, 63, 97]:

T1. $GR(x, y)$ é fechado;

T2. $0 \notin C(y)$;

T3. $C(y)$ é fechado;

T4. $u \geq x \in C(y) \Rightarrow u \in C(y)$ (propriedade do descarte forte dos insumos);

T5. $P(x)$ é fechado e limitado;

T6. $w \leq y \in P(x) \Rightarrow w \in P(x)$, (propriedade do descarte forte dos produtos).

A primeira propriedade indica que para produzir y é necessário consumir uma quantidade positiva de pelo menos um insumo. T4 indica que o consumo pode ser aumentado sem restrições e T6 indica que se pode reduzir livremente a produção.

O cálculo da eficiência técnica requer ainda a definição de dois subconjuntos de $C(x)$ em relação aos quais a eficiência técnica é mensurada. Por exemplo, pode-se observar que os planos de produção viáveis de C(y) são limitados superiormente, e dois subconjuntos contidos nestes limites são[12]:

1. O conjunto isoquanta de $C(y)$: $Isoq_{C(y)} = \{x \in C(y) : \lambda x \notin C(y) \text{ se } \lambda < 1\}$,
2. O conjunto eficiência de $C(y)$: $Eff_{C(y)} = \{x \in C(y) : x\text{'} \leq x \Longrightarrow x\text{'} \notin C(y)\}$[13].

Se $C(y)$ é fechado não vazio então $Isoq_{C(y)}$ e $Efc_{C(y)}$ também são conjuntos não vazios e $Efc_{C(y)} \subseteq Isoq_{C(y)}$ [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.40]. Podem ser definidos subconjuntos semelhantes em $P(x)$ e GR.

No estudo desenvolvido neste trabalho o conjunto C apresenta a propriedade do descarte forte e portanto $Isoq_{C(y)} \equiv Eff_{C(y)}$ [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.40, 41].

Mensurar a eficiência técnica orientação consumo do plano (x^o, y^o) consiste então, em determinar quão longe da fronteira de $C(y^o)$ está x^o através de uma projeção de x^o sobre $Eff_{C(y^o)}$ ou $Isoq_{C(y^o)}$ e na orientação produção através de uma projeção de y^o sobre $Eff_{P(x^o)}$ ou $Isoq_{P(x^o)}$. Dependendo do modelo de projeção, da tecnologia de produção e da parte da fronteira sobre a qual o plano será projetado, podem-se obter diferentes medidas

[12]Se os insumos não satifazem a propriedade do descarte forte então convém definir o conjunto de eficiência fraca de $C(y) : Eff_{C(y)} = \{x \in C(y) : x' \leq x \Longrightarrow x' \notin C(y)\}$

[13]Veja definição de $\leq$ no apêndice B.

da eficiência técnica. Em 1978 Färe e Lovell, [1978, p.157], sugeriram três condições que uma medida da eficiência técnica deve satisfazer[14]. Russell [1990, p.256] propôs, numa quarta propriedade, que uma medida da eficiência deve ser independente da unidade de medida. Assim, se $EFC : C(x^o) \to R_+$ for uma medida de eficiência, então $EFC(x^o, y^o)$, $x^o \in C(y^o)$, $y^o > 0$, satisfaz as seguintes propriedades:

I $EFC(x^o, y^o) = 1 \Leftrightarrow x \in Eff_{C(y^o)}$;

H Se $\delta x^o \in C(y^o)$, então $EFC(\delta x^o, y^o) = \delta^{-1} EFC(x^o, y^o)$, $\forall \delta > 0$;

M Se $x^o \leq u$, $u \in C(y^o)$, então $EFC(x^o, y^o) > EFC(u, y^o)$;

Co $EFC(x^o, y^o)$ é independente da unidade de mensuração.

A propriedade **I** indica que aos planos de produção pertencentes ao conjunto eficiência de $C(y^o)$ é atribuída eficiência igual à unidade. **H** reflete a homogeneidade de EFC, e diz que reescalonar radialmente o vetor insumo por $\delta > 0$ implica no reescalonamento da eficiência técnica deste vetor na proporção δ^{-1}. A propriedade **M** está relacionada com a monotonicidade de EFC e indica que se o consumo aumentar de x^o para u, $u \in C(y^o)$, então a eficiência técnica de (u, y^o) será estritamente menor que a eficiência de (x^o, y^o). A quarta propriedade relacionada, denominada por Russell de propriedade da comensurabilidade, sugere que trocar a medida das quantidade dos insumos e dos produtos não altera o índice de eficiência atribuído aos produtores por EFC.

Em 1986, Bol [*apud* Russell, 1998, p.34] enunciou, através de um teorema, que não existe nenhuma medida da eficiência técnica que satisfaz simultaneamente as propriedades **I**, **H** e **M** para todas as tecnologias de produção. Para superar este empecilho, Bol sugere dois caminhos: (i) relaxar os axiomas de Färrell/Lovell; (ii) ou restringir a classe das tecnologias nas quais o índice de eficiência será aplicado. Neste estudo serão relaxados os axiomas **I** e **M**. Considerando $x^o \in C(y^o)$, com $y^o > 0$, estas duas propriedades serão substituídas por:

WI $EFC(x^o, y^o) = 1 \Leftrightarrow x^o \in Isoq_{C(y^o)}$;

WM Se $x^o \leq u$, $u \in C(y^o)$, então $EFC(x^o, y^o) \geq EFC(u, y^o)$.

Pela propriedade **WI**, se EFC for uma medida de eficiência, qualquer plano de produção pertencente ao conjunto isoquanta é eficiente tecnicamente. **WM** é denominada de propriedade de monotonicidade fraca pois exige que EFC atribua um índice de

[14]Färe e Lovell também sugerem uma quarta propriedade - que $EFC(x^o, y^o)$ "compara x com $u \in Efc_{C(y)}$", mas segundo Russell [1985, p.113] esta condição não é bem definida para medidas arbitrárias da eficiência, sendo redundante quando for bem definida.

eficiência técnica a (u, y^o) menor ou igual ao de (x, y^o), ao invés de um índice estritamente menor.

A seguir serão definidas as medidas radiais da eficiência técnica que mais comumente ocorrem na literatura e que satisfazem as propriedades **WI**, **H**, **WM** e **Co** (as medidas não radiais a serem sugeridas não satisfazem a proriedade **Co**). Todas as medidas radiais orientação consumo a serem definidas neste trabalho são baseadas na medida de Debreu/Farrell, ou seja, na contração radial do consumo alocando o consumo no conjunto isoquanta de C. As medidas radiais orientação produção, também baseadas no trabalho de Debreu/Farrell, consistem na expansão da produção alocando o vetor produção no conjunto isoquanta de P. O cálculo da eficiência via medida não radial consiste em inicialmente alocar radialmente o consumo no conjunto isoquanta de C (ou a produção no conjunto isoquanta de P) e em seguida na sua realocação no conjunto eficiência.

2.3 Algumas definições

1. ***Benchmark***: *Benchmark* é algo que pode ser usado como padrão e que serve de referência para outras coisas.

2. **Conjunto difuso** $\tilde{A}$: Se X é uma coleção de objetos denotados genericamente por x, então o conjunto difuso $\tilde{A}$ em X é um conjunto de pares ordenados $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é chamado de função de pertinência ou grau de pertinência (também denominada de grau de compatibilidade ou grau de certeza) de x em $\tilde{A}$ que mapeia X no espaço de pertinência P. Geralmente $P = [0, 1]$, porém se $P = \{0, 1\}$, então $\tilde{A}$ não é difuso e $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é idêntica à função característica de um conjunto não difuso [Zimmermann, 1991, p.12 e 13].

3. **Conjunto corte** μ **de** $\tilde{A}$: O conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto difuso $\tilde{A}$ e que apresentam pelo menos o grau de pertinência μ é chamado de conjunto corte μ de $\tilde{A}$. O conjunto corte μ de $\tilde{A}$, $A_\mu = \{u \in R : \mu_{\tilde{a}}(u) \geq \mu\}$ é um subconjunto convexo de R tal que existe $m \in R$ com $\mu_{\tilde{A}}(m) = 1$. Quando m é único, a quantidade difusa é denominada de número difuso, e se m não é único geralmente a quantidade difusa é denominada de intervalo difuso [Zimmermann, 1991, p.14].

4. **Conjunto eficiência**: é um subconjunto da fronteira de produção formado pelos planos de produção eficientes tecnicamente, segundo a definição de Koopmans. Para estes planos de produção, um aumento em qualquer produto requer uma redução em pelo menos um outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo, e uma redução em qualquer insumo requer um aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto.

5. ***Data Envelopment Analysis-DEA***: Uma técnica de programação linear que identifica as melhores práticas de uma amostra de produtores e mede a eficiência

técnica baseado na diferença entre o nível dos insumos (produtos) de um produtor observado e o nível dos insumos (produtos) daquele que apresenta a melhor prática mantendo fixo o nível dos produtos (insumos).

6. ***Decison Making Unit*-DMU**: As organizações ou unidades de produção ou produtores a serem analisadas num estudo de análise de eficiência ou produtividade. As organizações podem ser públicas ou privadas, com ou sem fins lucrativos.

7. **Eficiência alocativa**: Indica se o produtor emprega os insumos à luz dos preços (dos insumos) numa proporção ótima que minimiza os custos da produção.

8. **Eficiência produtiva**: habilidade de escolher o plano de operação viável cuja produtividade é a maior dentre os planos de operação viáveis, sendo essa produtividade medida, em geral, em termos dos preços de mercado dos insumos e dos produtos.

9. **Eficiência técnica**: habilidade de evitar desperdícios, gerando tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e consumindo as menores quantidades de insumos necessárias para a produção.

10. **Eficiência técnica Debreu-Farrell no consumo**: o plano de operação [U0 ; X0] é Debreu-Farrell eficiente no consumo quando não é possível contrair (redução equiproporcional) o consumo sem uma conseqüente redução da produção.

11. **Eficiência técnica Debreu-Farrell na produção**: o plano de operação [U0 ; X0] é Debreu-Farrell eficiente na produção quando não é possível expandir (aumento equiproporcional) a produção sem uma consequente aumento do consumo.

12. **Eficiência técnica Pareto-Koopmans**: o plano de operação (X^o, Y^o) é Pareto-Koopmans eficiente se não for possível aumentar a quantidade gerada de qualquer produto sem uma redução da quantidade gerada de pelo menos um outro produto ou sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos um insumo; bem como se não for possível reduzir a quantidade consumida de qualquer insumo sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos outro insumo ou sem reduzir a quantidade gerada de pelo menos um produto.

13. **Fatores de produção**: São os insumos consumidos e os produtos gerados por um produtor. O conjunto dos fatores de produção também é denominado de plano de produção ou vetor insumo-produto.

14. **Folgas**: São as quantidades extras a serem reduzidas (aumentadas) nos insumos (produtos) para que o produtor atinja o conjunto eficiência após todos os insumos (produtos) terem sido reduzidos (aumentados) para atingir a isoquanta. Após as reduções (aumentos) adicionais, o plano de produção resultante pertence ao conjunto eficiência e portanto é eficiente tecnicamente segundo a definição de Koopmans.

15. **Fronteira de eficiência**: conjunto de todos os planos de operação eficientes.

16. **Isoquanta**: é a curva que representa a quantidade de insumos necessários para produzir um nível fixo de produtos. Diferentes produtores localizados na mesma isoquanta produzem o mesmo nível dos produtos podendo empregar níveis diferentes dos insumos.

17. **Medida completa de eficiência técnica**: medida de eficiência técnica que gera um escalar como resultado, que avalia eficiência técnica Pareto-Koopmans, que é de fácil manipulação computacional e que é de fácil interpretação no meio gerencial.

18. **Medida de (in)eficiência produtiva de um plano de operação**: a razão entre a produtividade desse plano e a maior produtividade entre os planos de operação viáveis.

19. **Medida de (in)eficiência técnica de um plano de operação**: o componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a inabilidade de evitar desperdício na geração de tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e na utilização das menores quantidades de insumos capazes de gerar a produção desejada.

20. **Medida de (in)eficiência alocativa de um plano de operação**: componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a inabilidade de escolher o plano de operação tecnicamente eficiente mais adequado aos preços de mercado de insumos e de produtos.

21. **Medida de (in)eficiência de escala de um plano de operação**: componente da medida de (in)eficiência produtiva que reflete a impossibilidade de executar o plano de operação de maior produtividade dentre os planos de operação viáveis, mantendo a escala de operação do plano executado.

22. **Medida de (in)eficiência de gestão de um plano de operação**: componente da medida de (in)eficiência produtiva resultante da diferença entre a ineficiência técnica e a ineficiência de escala.

23. **Medida *Free Disposal Hull-FDH***: Medida de eficiência técnica derivada da medida BCC cuja condição de convexidade (exigida na medida BCC) não necessita ser atendida. Nesta medida os produtores *benchmarks* são produtores observados na prática.

24. **Melhores práticas**: é o conjunto de práticas de gerenciamento e de trabalho, de um grupo de organizações similares, que resultam no potencial de produção mais alto ou na quantidade ótima de combinação dos produtos para um dado nível fixo de combinação de insumos.

25. **Número difuso**: Um número difuso $\tilde{M}$ é um conjunto difuso convexo normalizado contido na reta dos números reais R tal que: i) existe um único $x_o \in R$. com $\mu_{\tilde{M}}(x_o) = 1$ (x_o é chamado de valor médio de $\tilde{M}$); ii) a função $\mu_{\tilde{M}}(x)$ é contínua por partes. [Zimmermann, 1991, p.57]

26. **Organizações**: São empresas públicas ou privadas com ou sem fins lucrativos. As empresas podem ser bancos, hospitais, bibliotecas, fazendas agrícolas, universidades, fundações e lojas de comércio.

27. **Plano de operação**: associação de quantidades de insumos e quantidades de produtos envolvidos em uma operação produtiva.

28. **Plano de produção**: é o conjunto dos insumos utilizados e dos produtos gerados num determinado período de tempo por uma organização.

29. **Plano de operação viável**: plano de operação cujas quantidades de produtos podem ser geradas com as quantidades de insumos disponíveis.

30. **Produtividade**: medida de desempenho produtivo de um plano de operação que compara a produção com o consumo.

31. **Quantidade crisp**: é um número exato, sem imprecisões e probabilidades associadas.

32. **Quantidade difusa**: é um conjunto difuso.

33. **Retorno de escala**: Relação entre produtos e insumos. Retornos podem ser constantes, crescentes ou decrescentes, dependendo se a produção cresce na mesma proporção, numa proporção maior ou numa proporção menor que os insumos, respectivamente.

34. **Tecnologia de produção**: Conjunto de todos os planos de operações viáveis. Relação incorporada no processo de produção que determina a maneira de como os insumos podem ser convertidos em produtos.

3

Medidas radiais

Nesta seção serão desenvolvidas medidas radiais das eficiências orientação consumo e orientação produção. As medidas chamam-se de radiais pois na orientação consumo (orientação produção) contrai-se (expande-se) o vetor insumo (produto) através de um escalar positivo, ou seja, todas as componentes do vetor são escalonadas na mesma proporção. Para definir estas medidas sejam J planos de produção observados, cada um transformando n insumos para produzir m produtos. Seja M $(j \times m)$ a matriz das quantidades dos produtos observados e N $(j \times n)$ a matriz das quantidades dos insumos observados. O escalar $y_{jm} \in M$ é a quantidade que o j-ésimo produtor gera do m-ésimo produto e $x_{jn} \in N$ é a quantidade que o j-ésimo produtor consome do n-ésimo insumo.

3.1 Orientação consumo

No cálculo da eficiência técnica radial orientação consumo, a tecnologia será modelada pela correspondência consumo $y \rightarrow C(y)$. No cálculo o nível de produção y^o observado será mantido inalterado e os recursos serão reduzidos até a isoquanta de $C(y^o)$. Se $C_c(y^o) = \{x : x \geq zN;\, zM \geq y^o;\, z \in R_+^J\}$ é o conjunto consumo que contém os vetores insumo que produzem pelo menos y^o, então uma indicação da proximidade de x^o da $Isoq_{C_c(y^o)}$ é dada pela

Definição 1 *A função*

$$
\begin{array}{rll}
EFC_{cIn}(y^o, x^o) = & \min & \lambda^{oc} \\
& s.a & zM \geq y^o \\
& & \lambda^{oc} x^o \geq zN \\
& & z \in R_+^J
\end{array}
\tag{3.1}
$$

é chamada de medida radial da eficiência técnica orientação consumo supondo retornos constantes de escala.

A medida definida (geralmente denominada de medida radial de CCR orientação consumo) para uma tecnologia linear por partes mede a eficiência de x^o na produção de y^o assumindo retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos (figura 3.1). Seu valor está em $(0, 1]$ (pois $\vec{0} \notin C_c(y^o)$), e atinge seu limite superior se e somente se x^o pertence a isoquanta de $C_c(y^o)$-conjunto consumo supondo retornos constantes (c) de escala. A medida também é independente de unidades, por exemplo trocar trabalho/hora por trabalho/ano não afeta o valor do índice de eficiência [Färe, Krosskopf e Lovell, 1994, p.64].

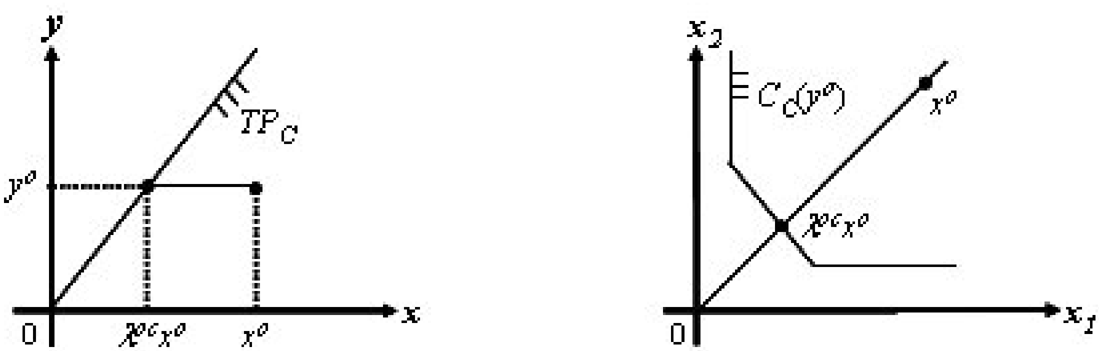

Figura 3.1: **Medida radial da eficiência técnica orientação consumo considerando retornos constantes de escala.**

A medida radial da eficiência técnica orientação consumo encontra-se ilustrada na figura 3.1. No gráfico (a) tem-se $n = m = 1$ e no segundo $n = 2$. Em ambos os casos λ^{oc} é o valor ótimo do programa linear da definição 1 e $\lambda^{oc}x^o$ é eficiente tecnicamente em relação a tecnologia considerada. O novo nível de consumo $\lambda^{oc}x^o$ pertence a $Isoq_{C_c(y^o)}$ (que é a envoltória gerada), e $(\lambda^{oc}x^o, y^o)$ é o plano de produção *benchmark* de (x^o, y^o).

Utilizando raciocínio análogo que levou à definição 1, podem ser definidas medidas radiais da eficiência técnica orientação consumo considerando diferentes economias de escala.

Definição 2 $EFC_{nIn}(y^o, x^o) = \min \left\{ \lambda^{on} : y^o \leq zM, zN \leq \lambda^{on}x^o, \sum_{j=1}^{n} z_j \leq 1, z \in R_+^J \right\}$

Definição 3 $EFC_{vIn}(y^o, x^o) = \min \left\{ \lambda^{ov} : y^o \leq zM, zN \leq \lambda^{ov}x^o, \sum_{j=1}^{n} z_j = 1, z \in R_+^J \right\}$

As tecnologias consideradas nas definições 2 e 3 (que são geradas pelos conjuntos de restrições) satisfazem, respectivamente, retornos não crescentes de escala-(n) e retornos variáveis de escala-(v). A última medida foi desenvolvida por Banker, Charnes e Cooper em 1984 e geralmente é denominada de medida radial orientação consumo de BCC. Ambos os índices calculados nas definições 2 e 3 pertencem ao intervalo $(0, 1]$, e $EFC_{vIn}(y^o, x^o)$ atinge 1 se e somente se x^o está na isoquanta de $C_n(y^o)$ e $EFC_{vIn}(y^o, x^o)$ atinge 1 se e somente se x^o está na isoquanta de $C_v(y^o)$.

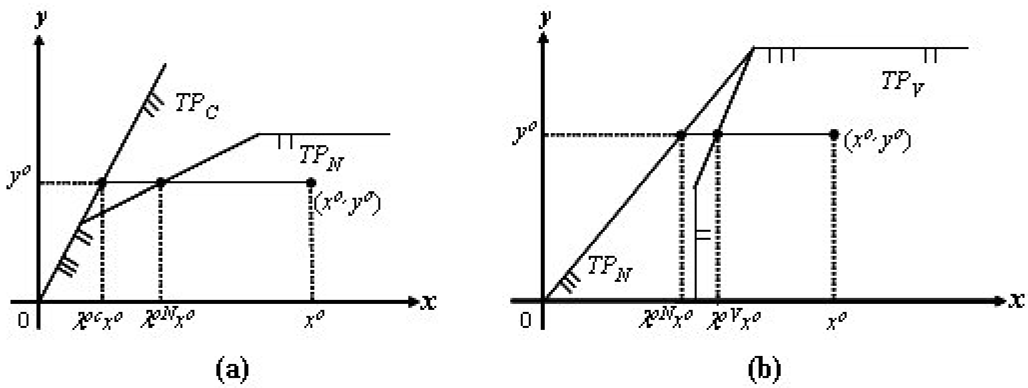

Figura 3.2: **Comparação da eficiência radial orientação consumo considerando retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala.**

A comparação das medidas com a hipótese de retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala, encontra-se no gráfico (a) da figura 3.2. A comparação entre as medidas considerando retornos variáveis de escala e retornos não crescentes de escala, está representada no gráfico (b).

3.2 Orientação produção

Na seção anterior foram definidos índices da eficiência técnica relativos ao conjunto consumo. Na obtenção da eficiência da atividade de um produtor era dada a quantidade dos produtos e procurava-se a maior redução radial viável no consumo. Nesta seção a medida de eficiência a ser desenvolvida é orientação produção e será relativa ao conjunto produção $P(x)$. Nos cálculos serão dadas as quantidades consumidas dos insumos e obter-se-á a eficiência a partir da máxima expansão radial do vetor dos produtos.

Seja $P_c(x^o)$ o conjunto produção supondo retornos constantes de escala e descarte forte dos produtos. Deseja-se determinar a eficiência de y^o, isto é, quão próximo radialmente y^o está da fronteira superior de $P_c\,(x^o)$, ou seja, quão próximo y^o está da isoquanta de $P_c\,(x^o)$. Se $P_c(x^o) = \{y : x^o \geq zN;\, zM \geq y;\, z \in R_+^J\}$ for o conjunto produção supondo retornos constantes de escala e descarte forte dos produtos, então uma indicação da proximidade de y^o da $Isoq_{P_c(x^o)}$ é dada pela seguinte medida.

Definição 4 *A função*

$$
\begin{array}{rll}
EFC_{cOut}(y^o, x^o) = & \max & \theta^{oc} \\
 & s.a & zM \geq \theta^{oc} y^o \\
 & & x^o \geq zN \\
 & & z \in R_+^J
\end{array}
\tag{3.2}
$$

é chamada de medida radial da eficiência técnica orientação produção supondo retornos constantes de escala.

A medida $EFC_{cOut}(x^o, y^o)$ para uma tecnologia linear por partes, também denominada de medida de CCR orientação produção, ilustrada na figura 3.3, mede a eficiência técnica radial de y^o que é produzido a partir do consumo de x^o quando a tecnologia satisfaz retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos. Seu valor está contido no intervalo $[1, \infty)$ e atinge a unidade se e somente se $y^o \in Isoq_{P_c(x^o)}$.

A medida da eficiência técnica orientação produção encontra-se ilustrada na figura 3.3 para $n = m = 1$ (gráfico (a)) e $n = 2$ (gráfico (b)). Em ambos os casos θ^{oc} é o valor ótimo do programa linear (da definição 4) e $\theta^{oc} y^o$ é um nível de produção eficiente em relação à tecnologia considerada e portanto pertence a $Isoq_{P_c(x^o)}$. (O plano $(x^o, \theta^{oc} y^o)$ é o plano de produção *benchmark* de (x^o, y^o)).

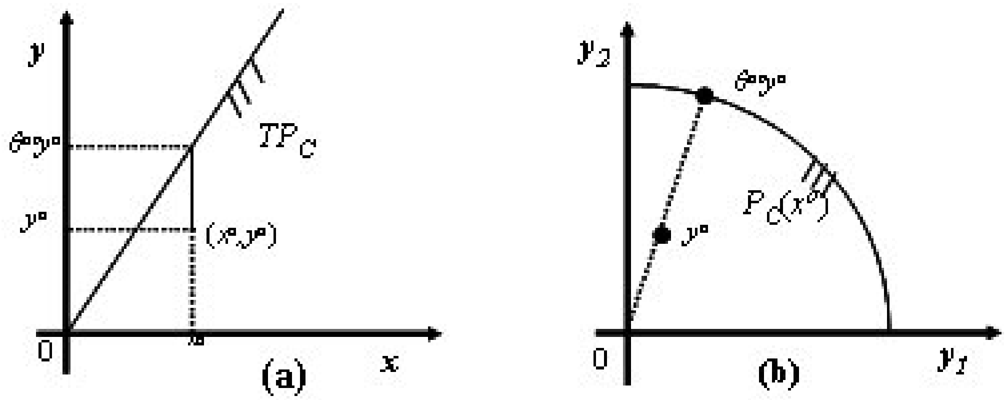

Figura 3.3: **Medida radial da eficiência técnica orientação produção considerando retornos constantes de escala.**

As medidas de eficiência definidas na sequência são menos restritivas que as da definição 4. Incluindo uma nova equação no conjunto de restrições que gera o conjunto produção pode-se mensurar a eficiência técnica considerando retornos não crescentes de escala e retornos variáveis de escala.

Definição 5 $EFC_{nOut}(y^o, x^o) = \max\left\{\theta^{on} : \theta^{on} y^o \leq zM, zN \leq x^o, \sum_{j=1}^{J} z_j \leq 1, z \in R_+^J\right\}$

Definição 6 $EFC_{vOut}(y^o, x^o) = \max\left\{\theta^{ov} : \theta^{ov} y^o \leq zM, zN \leq x^o, \sum_{j=1}^{J} z_j = 1, z \in R_+^J\right\}$

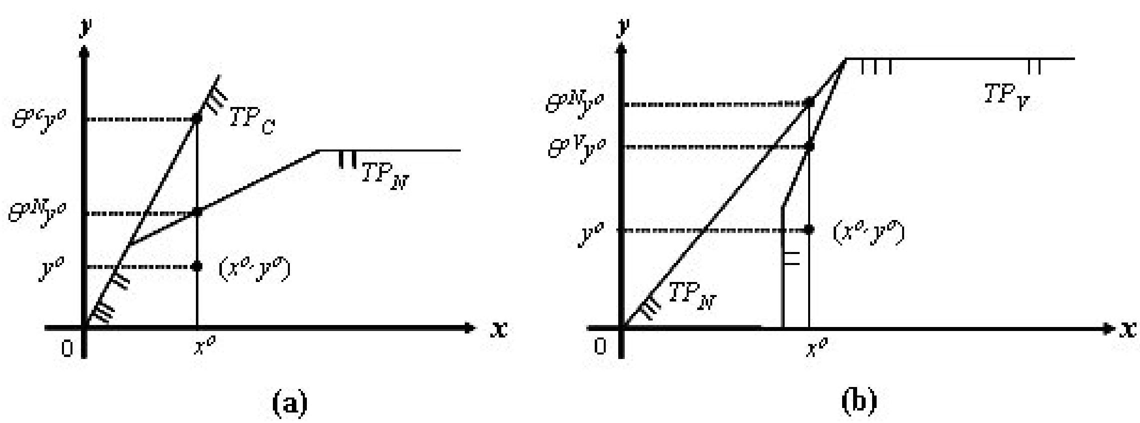

Figura 3.4: **Comparação entre a eficiência radial orientação produção considerando retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala.**

A comparação das medidas considerando retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala orientação produção encontra-se ilustrada no painel (a) da figura 3.4. A comparação entre as medidas supondo retornos variáveis de escala e retonos não crescentes de escala está representada no painel (b).

3.3 Orientação consumo-produção

Medidas que contraem o consumo e expandem a produção.

- Há as medidas de Russell [livro de Färe Grosskopf e Lovell (1993)]
- Um conjunto importante destas medidas serão vistas no quinto capítulo.

4

Medidas não radiais

Na definição de Debreu/Farrell um produtor é tecnicamente eficiente se pertencer à isoquanta enquanto que a definição de Koopmans é mais restritiva e classifica como eficiente tecnicamente somente o produtor pertencente ao subconjunto de eficiência (que por sua vez está contido na isoquanta). Como as medidas definidas na seção anterior geralmente não são Koopmans, surgiram algumas modificações (Färe e Lovell, [1978], Zieschang [1984], Charnes, Cooper, Golany, Seiford and Stuts, [1985]) na tentativa de torná-las Koopmans. Todas as variações sugeridas apresentam vantagens e desvantagens [Lovell, 1993, p.13-14]; entretanto a modificação mais empregada na literatura é a inserção, na função objetivo e nas restrições do programa linear que mede radialmente a eficiência técnica, das variáveis de folga fazendo com que o programa linear tenha somente restrições de igualdade [Charnes, Cooper, Rhodes, 1978, p.437]. A modificação é idêntica em todos os modelos de medidas radiais, e portanto o estudo será restrito à medida EFC_{ICS}.

A medida EFC_{CIn} (da definição 1) pode ser escrita no seguinte programa linear (PL)

$$
\begin{aligned}
EFC_{CIn}(y^o, x^o) = \quad & \min \quad \lambda \\
& s.a \quad \sum_{j=1}^{J} z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o,\ k = 1, ..., m \\
& \qquad \lambda x_i^o - \sum_{j=1}^{J} z_j x_{ij} - s_i^2 = 0,\ i = 1, ..., n \\
& \qquad z_j,\ s_k^1,\ s_i^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

onde s^1 e s^2 são respectivamente as folgas dos produtos e dos insumos. A medida não radial da eficiência técnica supondo retornos constantes de escala (denominada de medida não radial de CCR orientação consumo) é dada por:

Definição 7 *A medida EFC_{CIna} é a medida não radial da eficiência técnica orientação consumo com retornos constantes de escala, onde*

$$
\begin{aligned}
EFC_{CIna}(y^o, x^o) = \quad & \min \quad \lambda - \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{m} s_k^1 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \right) \\
& s.a \quad \sum_{j=1}^{J} z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o,\ k = 1, ..., m \\
& \qquad \lambda x_i^o - \sum_{j=1}^{J} z_j x_{ij} - s_i^2 = 0,\ i = 1, ..., n \\
& \qquad z_j,\ s_k^1,\ s_i^2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

e $\varepsilon > 0$ *é uma quantidade infinitesimal positiva.*

No modelo radial um produtor é considerado eficiente tecnicamente quando $\lambda = 1$ e na medida não radial o produtor é eficiente quando $\lambda = 1$ e $s^2 = s^1 = 0$. Deve-se ressaltar que o índice de eficiência atribuído em 4.1 é igual ao atribuído em 4.2 entretanto o nível ótimo do consumo, que é comparado com o observado, pode ser diferente, ou seja, o plano de produção *benchmark* (x^*, y^o) de (x^o, y^o) pode ser diferente na medida não radial.

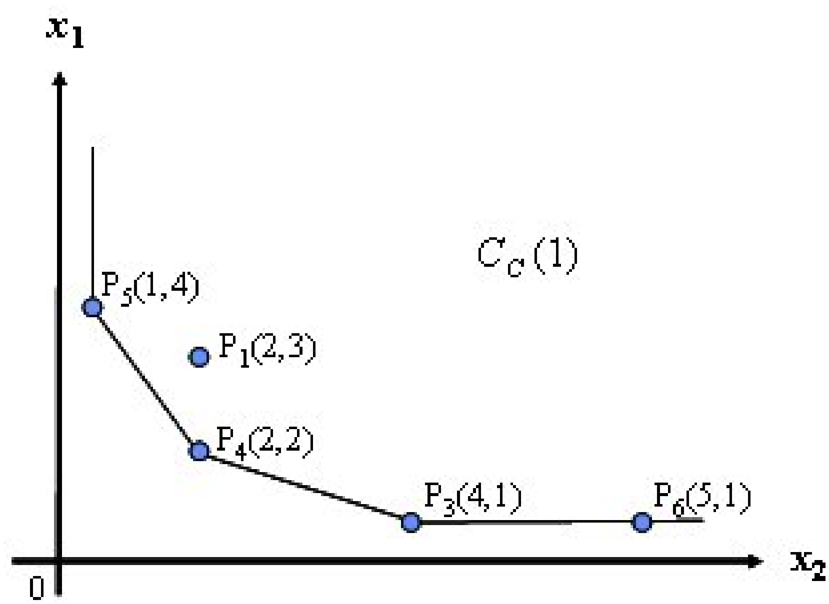

Figura 4.1: **Eficiência técnica não radial orientação consumo considerando retornos constantes de escala.**

No exemplo representado na figura 4.1 pode-se identificar a diferença entre a definição dos índices radial e não radial da eficiência técnica do produtor P_6. Para o produtor P_6

existem duas possibilidades de mínimo: (i) $\lambda = 1$ e todas as folgas nulas e (ii) $\lambda = 1$ com a folga do primeiro insumo igual à unidade. é obvio que P_6 é ineficiente tecnicamente pois emprega uma unidade de insumo a mais que P_3 e produz a mesma quantidade que P_3. A solução ótima do ppl 4.1, com $o = 6$, é $\lambda = 1$, $z_6 = 1$, $s_1^2 = s_2^2 = s_1^1 = 0$, ou seja P_6 é eficiente. O modelo 4.2 resulta em $\lambda = 1$, $z_3 = 1$, $s_1^2 = 1$, $s_2^2 = s_1^1 = 0$, ou seja, P_6 é ineficiente tecnicamente. O parâmetro $\lambda = 1$ expressa a impossibilidade de qualquer contração radial do consumo dos dois insumos, porém o consumo de x_2 pode ser reduzido em uma unidade (fazendo com que $P_6 \equiv P_3$).

Dependendo do valor atribuído a ε, o programa linear 4.2 será resolvido em duas etapas. Seja então, λ^*, s^{1*} e s^{2*} a solução ótima do programa linear 4.2. Na primeira etapa da sua resolução é determinada a maior contração radial do consumo, alocando o plano de produção observado num plano intermediário pertencente a $Isoq_{C(y^o)}$. Numa segunda etapa são determinadas as folgas máximas, realocando este plano intermediário até a fronteira de eficiência [Ali, Seiford, 1993, p.138]. Para que o programa linear 4.2 seja resolvido seguindo corretamente as duas etapas de cálculo mencionadas, não se pode atribuir qualquer valor a ε pois dependendo dos níveis dos insumos, a solução do programa não é a correta. Em 1993 Ali e Seiford [1993, p.292] apresentaram um teorema onde relacionam ε com os valores dos insumos. Segundo eles, a solução do programa 4.2 é ilimitada sempre que

$$\varepsilon \geq \frac{1}{\max\limits_{j=1,\ldots,J} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}} \tag{4.3}$$

ou seja, sempre que $\varepsilon < \left(\max\limits_{j=1,\ldots,J} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right)^{-1}$ o ppl 4.2 terá solução.

Como a maioria dos modelos de análise de eficiência é baseada em programação linear, Ali e Seiford ainda chamam atenção ao seguinte detalhe. Ao determinar se uma variável não básica é ou não é candidata a entrar na base, o preço reduzido desta deveria ser comparado com o valor nulo. Entretanto, a maioria dos *softwares* não faz a comparação com o valor nulo mas sim com um preço tolerância, tal como 10^{-5} ou 10^{-15}. Dependendo do valor de ε usado e do valor dos insumos e dos produtos, o preço reduzido (*reduced cost*) da variável não básica pode tornar-se muito próximo a este preço tolerância; se for menor que o preço tolerância a variável será descartada e não será candidata a entrar na base quando na verdade deveria ser candidata. Assim, a verdadeira otimalidade não será alcançada. Portanto, ao utilizar-se um *software* de programação ppl 4.2 deve-se descobrir, antes, qual o valor desta tolerância e não atribuir a ε qualquer quantidade que satisfaça a condição do teorema de Seiford e Ali.

Para evitar o uso de ε no cálculo do índice não radial da eficiência técnica orientação consumo considerando retornos constantes de escala, alguns pesquisadores sugerem que a resolução do programa (2) seja substituída pela resolução dos programas 4.1 e 4.4

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum_{k=1}^{m} s_k^1 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \\
s.a & \sum_{j=1}^{J} z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o,\ k = 1, ..., m \\
 & \lambda^* x_i^o - \sum_{j=1}^{J} z_j x_{ij} - s_i^2 = 0,\ i = 1, ..., n \\
 & z_j,\ s_k^1,\ s_i^2 \geq 0
\end{array} \tag{4.4}$$

Do programa 4.1 obtém-se o índice radial da eficiência técnica $EFC_{CIn}(y^o, x^o) = \lambda^*$, que é a maior contração radial viável do consumo, alocando o plano (x^o, y^o) sobre $Isoq_{C(y^o)}$. O ppl 4.4, onde λ^* é constante, tem a finalidade de maximizar as folgas dos insumos e dos produtos para realocar o plano intermediário $(\lambda^* x^o, y^o)$ sobre $Efc_{C(y^o)}$.

5

Medidas DEA completas

Estudos em busca de uma medida capaz de atender ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans deram origem a duas linhas de pensamento. Ambas são voltadas ao desenvolvimento de medidas não-paramétricas de eficiência técnica que permitem a avaliação de processos que empregam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos. Essas linhas utilizam a programação matemática sendo que uma delas concentra-se na criação de medidas radiais enquanto que a outra, de medidas não-radiais. As medidas radiais são aquelas descritas nas seções anteriores, de Charnes, Cooper e Rhodes e também de Banker, Charnes e Cooper e estudos que se seguiram. Dentre as medidas não-radiais está a categoria de medidas completas de eficiência técnica.

As medidas completas se caracterizam por possuírem duas propriedades e a atenderem dois critérios. São eles:

- P1) apresentar um resultado escalar e compatível com os resultados das demais medidas existentes, de modo a ser consistente com os estudos sobre medidas de eficiência produtiva desenvolvidos anteriormente;
- P2) ser abrangente de modo a atender ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans;
- C1) requerer formulações e cálculos matemáticos simples, podendo ser calculada com algoritmos e métodos computacionais já disponíveis; e
- C2) permitir fácil interpretação no meio gerencial, não tendo sua aplicação restrita a contextos e ambientes específicos.

Várias medidas completas têm aparecido na literatura nos últimos anos, dentre elas, duas são as mais conhecidas:

- a Medida Baseada em Folgas (SBM)[1] , proposta por Tone (2000); e
- a Medida Ajustada por Amplitude (RAM)[2] , proposta por Cooper, Park e Pastor (1999).

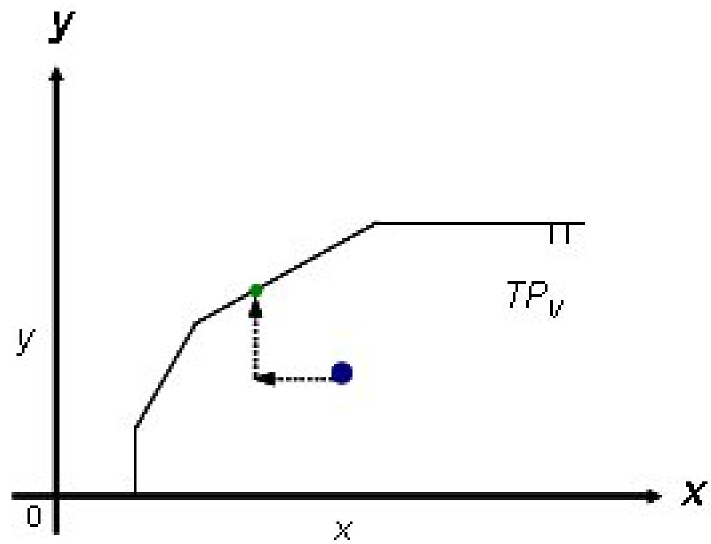

Figura 5.1: **Projeção de uma medida DEA Completa.**

Na figura 5.1 encontra-se ilustrada uma possível projeção até a fronteira de produção via uma medida DEA Completa.

Um estudo detalhado dessas duas medidas encontra-se na dissertação de mestrado da Simone G. Brito (2003), orientada pelo professor Jair S. Lapa. A seguir, tem-se uma breve explanação dessas medidas completas de eficiência.

5.1 Medida baseada em folgas (SBM)

A Medida Baseada em Folgas, Tone (2001), pode ser facilmente interpretada como o produto das (in)eficiências do consumo e da produção; pode ser calculada pelo Simplex; e fornece interpretação econômica dos multiplicadores obtido pelo cálculo do seu problema dual. A medida SBM é baseada nos excessos de consumo e nas folgas na produção relativamente às quantidades observadas. Além de identificar as organizações eficientes e ineficientes, a medida SBM fornece às organizações ineficientes orientação para identificar planos de produção eficientes com a eliminação dos excessos e folgas existentes.

[1]SBM - *Slack Based Measure*
[2]RAM - *Range Adjusted Measure*

Para todo plano de produção observado, tal medida é

$$
\begin{aligned}
\tau^*(x_o, y_o) = \quad & \min \tau = \frac{1 - \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{x_{on}}}{N}}{1 + \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{t_m}{y_{om}}}{M}} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{J} \lambda_j x_{jn} + s_n = x_{on}, \;\; n = 1, ..., N \\
& \sum_{j=1}^{J} \lambda_j y_{jm} - t_m = y_{om}, \;\; m = 1, ..., M \\
& \lambda_j \geq 0 \, \forall j, \; s_n \geq 0 \, \forall n, \; t_m \geq 0 \, \forall m
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

onde s_n e t_m são vetores de quantidades de excessos de consumo e folgas na produção, respectivamente, e N e M o número de insumos e de produtos respectivamente.

Esta eficiência, colocada desta maneira, atende às duas propriedades exigidas a uma medida completa. Basta averiguar se atende também aos dois critérios para ser uma medida completa de eficiência técnica, isto é, que o valor da eficiência possa ser calculado através de algoritmos computacionais de uso generalizado e que seja de fácil interpretação. Quanto à parte computacional, qualquer pacote que resolva problemas de programação linear.

Para a interpretação, a eficiência pode ser vista como o seguinte quociente:

$$\tau = \frac{\rho_c}{\rho_p} \tag{5.2}$$

onde

$$\rho_c = 1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{x_{on}}, \;\; \rho_c \in [0, 1] \tag{5.3}$$

e

$$\rho_p = 1 + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{t_m}{y_{om}},\ \rho_p \in [1, +\infty)\,. \tag{5.4}$$

Desta maneira, pode-se dizer que ρ_c é um escore de eficiência do consumo, assim $(1-\rho_c^*)$ reflete a maior redução "média" que o consumo pode ter. Analogamente, ρ_p é um escore de eficiência da produção, portanto, $\left(\rho_p^* - 1\right)$ reflete o maior aumento "médio" que a produção pode ter.

$\tau^* = \frac{\rho_c^*}{\rho_p^*}$ é então um indicador de eficiência global do plano de operação (x_o, y_o), já que reflete a ineficiência total desse plano como a razão da ineficiência de consumo, expresso por ρ_c^*, e a ineficiência de produção, expresso por ρ_p^*.

A medida SBM não identifica somente as organizações eficientes e ineficientes, ela também fornece orientação para identificar planos de operação eficientes para as organizaçõesineficientes. Isso é feito com a eliminação dos excessos e folgas existentes, ou seja, pode-se empregar $x_{on}^* = x_{on} - s_n^*\ \forall n$ para poder gerar $y_{om}^* = y_{om} + t_m^*\ \forall m$, tal que (x_o^*, y_o^*) é eficiente tecnicamente.

Tone (2001) mostra que $\tau^*(x_o, y_o)$ pode sercalculado resolvendo o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}^*(x_o, y_o) = \quad \min \widehat{\tau} = \quad & f - \tfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\widehat{s}_n}{x_{on}} \\
\text{s.a} \quad & f + \tfrac{1}{M}\sum^{m=1M}\frac{\widehat{t}_m}{y_{on}} = 1 \\
& f x_{on} - \sum_{j=1}^{J}\widehat{z}_j x_{jn} - \widehat{s}_n = 0,\ \ n = 1, ..., N \\
& f y_{om} - \sum_{j=1}^{J}\widehat{z}_j y_{jm} + \widehat{t}_m = 0,\ \ m = 1, ..., M \\
& f \geq 0,\ \widehat{z}_j \geq 0\,\forall j,\ \widehat{s}_n \geq 0\,\forall n,\ \widehat{t}_m \geq 0\,\forall m
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde

$$\widehat{z}_j = fz_j \, \forall j, \widehat{s}_n = fs_n \tag{5.6}$$

$$\forall n, \widehat{t}_m = ft_m \, \forall m. \tag{5.7}$$

Para detalhes da transformação do programa fracionário num problema de programação linear, sugere-se consultar Tone (2001) e Brito (2003).

5.2 Medida ajustada por amplitude (RAM)

A Medida Ajustada por Amplitude é baseada nos excessos no consumo e folgas na produção e é calculada com base na amplitude das quantidades de insumos e produtos, o que a torna adimensional. Portanto, a medida é invariante a mudanças nas unidades de insumos e produtos, o que permite uma interpretação gerencial adequada da somatória das folgas de produto e excessos de insumos.

Tem-se, então, para todo plano de produção observado:

$$\begin{array}{rll} \Gamma^* \left(x_o, y_o\right) = & \min \; \Gamma = & 1 - \frac{1}{N+M} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{s_n}{R_n} + \sum\limits_{m=1}^{M} \dfrac{t_n}{R_m} \right) \\ & \text{s.a} & \sum\limits_{j=1}^{J} \lambda_j x_{jn} + s_n = x_{on}, \;\; n = 1, ..., N \\ & & \sum\limits_{j=1}^{J} \lambda_j y_{jm} - t_m = y_{om}, \;\; m = 1, ..., M \\ & & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & & \lambda_j \geq 0 \, \forall j, \; s_n \geq 0 \, \forall n, \; t_m \geq 0 \, \forall m \end{array} \tag{5.8}$$

onde

$$R_n = \underline{x}_n - \overline{x}_n \text{e} R_m = \underline{y}_m - \overline{y}_m \tag{5.9}$$

com

$$\underline{x}_n = \min\{x_{jn}\}, \overline{x}_n = \max\{x_{jn}\}, \underline{y}_m = \min\{y_{jm}\}, \overline{y}_m = \min\{y_{jm}\}, \forall j. \tag{5.10}$$

Pelo fato da medida RAM aplicar-se somente a tecnologias que exibem retorno de escala variável, assegura que as amplitudes R_n e R_m representam o valor máximo possível de excessos de insumos e folgas de produtos, propriedade que garante $0 \leq \Gamma^*(x_o, y_o) \leq 1$, é o que mostram Cooper, Park e Pastor (2001).

Tem-se, também, que o valor que avalia a ineficiência total do plano de operação pode ser interpretado como a ineficiência média desse plano. Tem-se, assim, a soma de dois componentes:

$$0 \leq \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{R_n}}{N} \leq 1 \tag{5.11}$$

que pode ser visto como a ineficiência "média" no consumo; e

$$0 \leq \frac{\sum_{m=1}^{M} \frac{t_m}{R_m}}{N} \leq 1 \tag{5.12}$$

que pode ser visto como a ineficiência "média" na produção.

Logo, a medida RAM satisfaz as duas propriedades e aos dois critérios exigidos de uma medida completa de eficiência técnica, pois ela é uma medida escalar, que se baseia nos excessos de insumos e folgas de produto, considerando eficientes apenas os planos de operação que não apresentam excessos ou folgas, ou seja, quando o plano observado for um plano de operação eficiente Pareto-Koopmans. É também um problema comum de programação linear e pode, portanto, ser resolvido utilizando qualquer pacote computacional que resolva problemas de programação linear.

Importante acrescentar que as medidas SBM e RAM não têm uma orientação insumo ou orientação produto, pois visam as duas orientações, ou seja, reduzir o insumo e aumentar a produção (insumo-produto).

6

Medida cruzada da eficiÃ?ncia tÃ©cnica

O conjunto de pesos Ã³timos obtidos com a resoluÃ§Ã£o do modelo de programaÃ§Ã£o linear-ppl (4) para cada DMU, resulta no melhor escore de eficiÃ?ncia tÃ©cnica possÃ?vel para cada DMU. As Ã?nicas limitaÃ§Ã?es impostas no processo de obtenÃ§Ã£o destes pesos Ã© que sejam maiores ou iguais a zero, e que os escores de eficiÃ?ncia de cada DMU seja menor ou igual a unidade.

A flexibilidade nos pesos tem sido referenciada na bibliografia como sendo uma das grandes vantagens da AnÃ¡lise por EnvoltÃ³ria de Dados - DEA, pois Ã© um fator significante para a identificaÃ§Ã£o das DMUs ineficientes, que possuem uma performance baixa com seu prÃ³prio conjunto de pesos Ã³timos. Deste modo, analisando a magnitude dos pesos atribuÃ?dos a cada um dos insumos e dos produtos, a gerÃ?ncia de uma DMU ineficiente conhece a importÃ?ncia de certos insumos e produtos no seu processo produtivo[1]. Segundo Lins e Moreira (Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.53), este procedimento tem sido criticado por muitos pesquisadores pelas seguintes razÃ?es:

1. Fatores de menor importÃ?ncia podem dominar o estabelecimento da eficiÃ?ncia de uma DMU, isto Ã© podem ter um alto peso;
2. Fatores importantes podem ser ignorados da anÃ¡lise, o que acontece quando o ppl (4) outorga um peso zero na respectiva variÃ¡vel;
3. Ao se ter flexibilidade nos pesos permite-se que as DMUs possam ter objetivos individuais e circunstanciais particulares, o qual nÃ£o Ã© compatÃ?vel com o fato delas serem homogÃ?neas no sentido que produzem os mesmos produtos;

[1]Quanto maior o valor do peso de um insumo ou de um produto, maior Ã© a importÃ?ncia deste insumo ou deste produto no processo produtivo.

4. Em alguns casos, dispÃ?e-se de uma certa quantidade de informaÃ§Ã£o com respeito Ã? importÃ?ncia dos insumos e produtos, e sobre as relaÃ§Ã?es entre as variÃ¡veis;

5. Os gerentes com frequÃ?ncia tem percepÃ§Ã£o *a priori* sobre as DMUs eficientes e ineficientes;

6. A existÃ?ncia de vÃ¡rias DMUs caracterizadas como eficientes, pois a abordagem DEA explora as caracterÃ?sticas positivas da performance de cada DMU, nÃ£o podendo ser discriminado de forma direta as unidades produtivas verdadeiramente eficientes.

Deste modo, percebe-se a importÃ?ncia de estabelecer limites entre os quais os pesos podem variar, possibilitando certa flexibilidade e certa incerteza a respeito do real valor dos pesos, o que acarretarÃ¡ em novas restriÃ§Ã?es na formulaÃ§Ã£o original do ppl (4). Deste modo a eficiÃ?ncia de uma DMU serÃ¡ menor ou igual Ã? eficiÃ?ncia obtida na formulaÃ§Ã£o original.

Desenvolvida por Sexton *et all.* (1986) (Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.55), a avaliaÃ§Ã£o cruzada Ã© uma maneira de evitar diferenÃ§as nos pesos determinados para cada DMU, sem a arbitrariedade das restriÃ§Ã?es e sem o conhecimento prÃ©vio da importÃ?ncia relativa de cada variÃ¡vel. A avaliaÃ§Ã£o cruzada tem como finalidade principal utilizar DEA em uma avaliaÃ§Ã£o do conjunto (*cross evaluation*, *peer-evaluation* ou *peer-appraisal*) ao invÃ©s de uma auto-avaliaÃ§Ã£o (*self-evaluation* ou *self-appraisal*) a qual Ã© calculada por um modelo DEA padrÃ£o (modelos de ppl (2)).

Uma avaliaÃ§Ã£o do conjunto significa que cada DMU Ã© avaliada segundo o esquema de pesos Ã³timo das outras DMUs, sendo a mÃ©dia de todas essas eficiÃ?ncias a eficiÃ?ncia cruzada . Logo a avaliaÃ§Ã£o feita serÃ¡ uma mÃ©dia das eficiÃ?ncias de uma DMU calculada a partir das outras DMUs.

Segundo Niederauer (Niederauer, C. A. P., 2002, p.59), os modelos DEA bÃ¡sicos nem sempre fornecem boas caracterÃ?sticas discriminatÃ³rias, especialmente quando Ã© necessÃ¡rio apontar o melhor dentre aqueles com 100% de desempenho. Nem mesmo o nÃ?mero de vezes que essas unidades sÃ£o referÃ?ncia para as demais Ã© suficiente para determinar qual Ã© a melhor. A avaliaÃ§Ã£o cruzada Ã© uma maneira de aumentar o poder discriminatÃ³rio do DEA

A avaliaÃ§Ã£o cruzada utiliza as eficiÃ?ncias calculadas segundo os modelos DEA padrÃ£o e o esquema de pesos Ã³timo utilizado para atingirem tal eficiÃ?ncia. Nos modelos DEA podem existir muitas soluÃ§Ã?es Ã³timas, podendo implicar em obtenÃ§Ã£o de eficiÃ?ncias cruzadas altas ou baixas, isto ocorre porque um conjunto de pesos Ã³timo pode ser favorÃ¡vel para uma DMU mas desfavorÃ¡vel para outra. Para contornar este problema utiliza-se entÃ£o uma funÃ§Ã£o objetivo secundÃ¡ria

Segundo Lins e Moreira (Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.65), tal funÃ§Ã£o tem como intuito obter um esquema de pesos que seja Ã³timo no modelo inicial (*self evaluation*) mas tenha como objetivo secundÃ¡rio minimizar as eficiÃ?ncias cruzadas das outras DMUs. Tal formulaÃ§Ã£o Ã© denominada formulaÃ§Ã£o agressiva, devido a minimizaÃ§Ã£o da funÃ§Ã£o objetivo; jÃ¡ a maximizaÃ§Ã£o das eficiÃ?ncias cruzadas das outras DMUs Ã© chamada de formulaÃ§Ã£o benevolente.

Na prÃ³xima subseÃ§Ã£o serÃ£o apresentadas as funÃ§Ã?es objetivo para os modelos de avaliaÃ§Ã£o cruzada, sugeridas por Lins *et alli* (2000, p.66-67).

6.1 Modelos para a avaliaÃ§Ã£o cruzada

O Ã?ndice da eficiÃ?ncia cruzada orientaÃ§Ã£o insumo da DMU$_s$ utilizando o esquema de pesos da DMU$_k$ Ã©

$$E_{ks} = \frac{\sum_{r=1}^{m} u_{kr} y_{sr}}{\sum_{i=1}^{n} v_{ki} x_{si}} \tag{6.1}$$

onde:

- y_{sr} Ã© a quantidade dos produtos (*outputs*) da s-Ã©sima DMU;
- x_{si} Ã© a quantidade dos insumos (*inputs*) da s-Ã©sima DMU;
- v_{ki} Ã© o vetor de pesos relacionado aos insumos da k-Ã©sima DMU
- u_{ki} Ã© o vetor de pesos relacionado aos produtos da k-Ã©sima DMU

Deve-se observar que E_{kk} Ã© a eficiÃ?ncia da DMU$_k$ utilizando os prÃ³prios pesos, ou seja, Ã© a eficiÃ?ncia obtida aplicando-se o modelo CCR. Esta eficiÃ?ncia geralmente Ã© denominada de eficiÃ?ncia padrÃ£o.

A formulaÃ§Ã£o agressiva da funÃ§Ã£o objetivo secundÃ¡ria pode assumir trÃ?s formas:

1. O esquema de pesos (que resulta no Ã?ndice de eficiÃ?ncia tÃ©cnica da DMU$_s$) procura minimizar a mÃ©dia das eficiÃ?ncias cruzadas das outras DMUs e Ã© determinado com o auxÃ?lio da funÃ§Ã£o objetivo secundÃ¡ria

$$\min(n-1)A_s = \min \sum_{j=1}^{J} E_{js} = \min \sum_{j=1}^{J} \frac{\sum_{r=1}^{m} u_{sr} y_{jr}}{\sum_{i=1}^{n} v_{si} x_{ji}}, \quad (j \neq s) \tag{6.2}$$

1. A funÃ§Ã£o objetivo acima define um programa fracionÃ¡rio que nÃ£o pode ser resolvido pelo mÃ©todo padrÃ£o de programaÃ§Ã£o linear.

2. Sexton (1986) (apud Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.67) propÃ´s uma substituiÃ§Ã£o para a funÃ§Ã£o objetivo anterior. A funÃ§Ã£o objetivo sugerida por Sexton trata de minimizar a soma para todas as outras DMUs da soma ponderada do numerador de cada fraÃ§Ã£o menos a soma ponderada do denominador da funÃ§Ã£o objetivo anterior.

$$\begin{aligned} \min B_s &= \min \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{r=1}^{m} u_{sr} y_{jr} - \sum_{i=1}^{n} v_{si} x_{ji} \right) \\ &= \min \sum_{r=1}^{m} \left(u_{sr} \sum_{j=1}^{J} y_{jr} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(v_{si} \sum_{j=1}^{J} x_{ji} \right) \quad (j \neq s) \end{aligned} \tag{6.3}$$

3. Doyle e Green (1994) (apud Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.67) sugeriram a substituiÃ§Ã£o da funÃ§Ã£o objetivo definida na primeira forma por outra funÃ§Ã£o que minimiza a eficiÃ?ncia cruzada da DMU composta na segunda forma, isto Ã©, minimiza a soma ponderada dos produtos da DMU composta dividido pela soma ponderada dos insumos da DMU composta .

$$\min C_k = \frac{\sum_{r=1}^{m} \left(u_{sr} \sum_{j=1}^{J} y_{jr} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(v_{si} \sum_{j=1}^{J} x_{ji} \right)} \quad (j \neq s) \tag{6.4}$$

Esta funÃ§Ã£o objetivo nÃ£o linear (Ã© um modelo de programaÃ§Ã£o fracionÃ¡ria), pode ser substituÃ?da pela forma linear

$$\sum_{r=1}^{m}\left(u_{sr}\sum_{j=1}^{J}y_{jr}\right) \quad (j \neq s) \tag{6.5}$$

com a inclusÃ£o da restriÃ§Ã£o

$$\sum_{i=1}^{n}\left(v_{si}\sum_{j=1}^{J}x_{ji}\right) = 1 \quad (j \neq s) \tag{6.6}$$

No caso de formulaÃ§Ã?es benevolentes, dos modelos A_k, B_ke C_k, deve-se implementar estes modelos com a minimizaÃ§Ã£o dessas funÃ§Ã?es objetivo.

6.2 ImplementaÃ§Ã£o dos modelos

Na implementaÃ§Ã£o dos modelos, serÃ£o considerados apenas as funÃ§Ã?es objetivo B_k e C_k (na implementaÃ§Ã£o de C_k, devemos incluir a restriÃ§Ã£o

$$\sum_{i=1}^{n}\left(v_{ki}\sum_{j=1}^{J}x_{ji}\right) = 1 \quad (j \neq k) \tag{6.7}$$

como parte da linearizaÃ§Ã£o da funÃ§Ã£o), pois sÃ£o lineares enquanto que o modelo A_s Ã© nÃ£o linear. Lins e Moreira (Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.67-69), descrevem os seguintes algoritmos para a implementaÃ§Ã£o dos programas lineares.

Modelo com funÃ§Ã£o objetivo B_k

Passo 1 : Calcular as eficiÃ?ncias padrÃ£o, E_{kk}, para todas as DMUs.

Passo 2 : Introduzir B_k, o objetivo secundÃ¡rio, no *tableau* simplex como a funÃ§Ã£o objetivo, com a restriÃ§Ã£o adicional de que e eficiÃ?ncia simples de k (E_{kk}) deve relacionar seus prÃ³prios produtos ponderados a seus insumos ponderados.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{r=1}^{m}\left(u_{kr}\sum_{j=1}^{J} y_{jr}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(v_{ki}\sum_{j=1}^{J} x_{ji}\right) \quad (j \neq k) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} v_{ki}x_{ki} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{m} u_{kr}y_{kr} - E_{kk}\sum_{i=1}^{n} v_{ki}x_{ki} = 0 \\
& \sum_{r=1}^{m} u_{kr}y_{jr} - \sum_{i=1}^{n} v_{ki}x_{ji} \leq 0, \;\; \forall j \neq k \\
& u_{kr} \geq 0; \;\; v_{ki} \geq 0
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

Neste programa linear (pl) as variÃ¡veis de decisÃ£o sÃ£o u_{kr} e v_{ki}.

Modelo com funÃ§Ã£o objetivo C_k

Passo 1 : Calcular as eficiÃ?ncias padrÃ£o, E_{kk}, para todas as DMUs.

Passo 2 : Introduzir a funÃ§Ã£o objetivo C_k, a qual deve ser linearizada. Assim, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{r=1}^{m}\left(u_{kr}\sum_{j=1}^{J} y_{jr}\right) \quad (j \neq k) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n}\left(v_{ki}\sum_{j=1}^{J} x_{ji}\right) = 1 \quad (j \neq k) \\
& \sum_{r=1}^{m} u_{kr}y_{kjr} - E_{kk}\sum_{i=1}^{n} v_{ki}x_{ki} = 0 \\
& \sum_{r=1}^{m} u_{jr}y_{jr} - \sum_{i=1}^{n} v_{ki}x_{ji} \leq 0, \;\; \forall j \neq k \\
& u_{kr} \geq 0; \;\; v_{ki} \geq 0
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

sendo que as variÃ¡veis de decisÃ£o sÃ£o os pesos u_{kr} e v_{ki}.

6.3 A matriz de eficiÃ?ncias cruzadas

Escolhido um dos dois modelos acima, determina-se um conjunto de vetores de pesos u e v para cada um dos J produtores. Empregando estes vetores de pesos, calcula-se os Ã?ndices de eficiÃ?ncia cruzado de cada uma das DMUs. Substituindo o vetor de pesos Ã³timo da k-Ã©sima DMU, na fÃ³rmula

$$E_{ks} = \frac{\sum_{r=1}^{m} u_{kr} y_{sr}}{\sum_{i=1}^{n} v_{ki} x_{si}} \tag{6.10}$$

calcula-se o Ã?ndice de eficiÃ?ncia cruzada da s-Ã©sima DMU.

Procedendo este cÃ¡lculo para todas as J DMUs, tem-se a matriz

	DMU 1	...	DMU s	...	DMU J
DMU 1	E_{11}	...	E_{1s}...	...	E_{1J}
...	...	...	...	...	...
DMU k	E_{s1}	...	E_{ks}	...	E_{kJ}
...	...	...	...	...	...
DMU J	E_{J1}	...	E_{Js}	...	E_{JJ}
EficiÃ?ncia Cruzada	e_1	...	e_s	...	e_n

Nesta matriz

- E_{kk} Ã© a eficiÃ?ncia resultante do modelo CCR padrÃ£o orientaÃ§Ã£o insumo;
- E_{ks} Ã© a eficiÃ?ncia da DMU$_s$ utilizando os pesos da DMU$_k$;
- e_k Ã© o Ã?ndice da eficiÃ?ncia cruzada mÃ©dia da DMU$_k$.

A eficiÃ?ncia cruzada mÃ©dia da DMU$_s$, pode ser obtida pela mÃ©dia aritmÃ©tica simples das eficiÃ?ncias da coluna s da matriz de eficiÃ?ncias cruzadas,

$$e_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{J} E_{ks} \quad (k \neq s) \tag{6.11}$$

ou sem a inclusÃ£o da diagonal principal

$$e_s = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{J} E_{ks} \quad (k \neq s)\,. \tag{6.12}$$

Como na bibliografia analisada nÃ£o se encontrou uma justificativa para definir qual dos modelos seria mais eficientes, entÃ£o neste trabalho optou-se em usar a segunda formulaÃ§Ã£o.

As medidas de eficiÃ?ncia cruzada mÃ©dia podem ser utilizadas como um complemento ou uma alternativa Ã? eficiÃ?ncia padrÃ£o. Assim, pode-se distinguir entre vÃ¡rias DMUs 100% eficientes, pode-se estabelecer um ranking significativo entre elas e eliminando os diferentes esquemas de pesos, devido a mÃ©dia utilizada. Para determinar quais as DMUs com maior diferenÃ§a relativa entre a eficiÃ?ncia padrÃ£o e a eficiÃ?ncia cruzada mÃ©dia, utiliza-se a medida;

$$M_s = \frac{(E_{ss} - e_s)}{e_s} \tag{6.13}$$

onde e_s Ã© calculado sem considerar a auto avaliaÃ§Ã£o.

As DMUs com maiores M_s sÃ£o denominadas Mavericks (Doyle e Green, 1994). Quando uma DMU Ã© 100% eficiente no modelo DEA padrÃ£o e tem um alto M_s Ã© chamada "falso positivo" (Talluri e Sarkis, 1997), mostrando que aquela DMU atinge o Ã?ndice de 100% de eficiÃ?ncia utilizando somente pesos irreais ou nÃ£o apropriados

A avaliaÃ§Ã£o cruzada permite definir uma melhor diferenÃ§a entre as DMUs eficientes e estabelecer um ranking das DMUs, bem como evita trabalhar com poucas DMUs, isto Ã©, incrementa o poder discriminante de DEA. AlÃ©m disso, os valores obtidos para os mavericks, permite observar quais sÃ£o as DMUs que possuem as maiores diferenÃ§as entre as eficiÃ?ncias padrÃ£o e as eficiÃ?ncias cruzadas mÃ©dias. Assim, pode-se dizer que, quanto menor o maverick, mais apropriados foi a utilizaÃ§Ã£o dos pesos.

A avaliaÃ§Ã£o cruzada Ã© uma tÃ©cnica que tem permitido analisar a robustez dos resultados obtidos pelos modelos padrÃ£o DEA sem fazer suposiÃ§Ã£o explÃ?cita sobre a importÃ?ncia relativa das variÃ¡veis do modelo, entretanto, a sua aplicaÃ§Ã£o deve ser restrita a casos nos quais o nÃ?mero de DMUs seja fixo, ou seja, uma DMU nÃ£o pode ser retirada do sistema durante o processo de avaliaÃ§Ã£o.

7

Medidas da eficiência técnica em ambiente difuso

Na literatura encontram-se três alternativas para lidar com a eficiência técnica ao ocorrer imprecisão na mensuração de quantidades dos insumos e dos produtos [Girod, 1996, p.56]. A primeira alternativa assume que existe um processo estocástico que gera os níveis dos insumos e os produtos. A dificuldade associada a esse enfoque é a determinação das distribuições das probabilidades das variáveis envolvidas nos cálculos, pois a escolha de tais distribuições se faz muitas vezes mais em função do instrumental matemático/estatístico disponível do que de evidências empíricas. A segunda alternativa envolve o uso de técnicas de pós-otimização tal como análise de sensibilidade, preços sombra e programação paramétrica. Mas como enfatizado por Carlsson e Korhonen [1986, p.17], estas técnicas são inapropriadas em análises quando há incerteza associada à medida dos insumos e dos produtos. Por exemplo, a análise de sensibilidade é usada para gerar soluções alternativas situadas na vizinhança de um ótimo; preços sombra indicam o quanto a solução ótima melhorará em função do vetor restrição; e com a programação paramétrica é viável analisar mudanças em uma variável no conjunto de restrições e na função objetivo. Portanto, nenhuma destas técnicas orienta o decisor no sentido de seguir uma política melhor dado o grande número de cenários de produção implementáveis e plausíveis associados aos insumos e aos produtos [Triantis e Girod,1998, p.2].

A terceira alternativa, baseada na teoria dos conjuntos difusos, foi inicialmente introduzida por Sengupta [1992]. Ele propôs que as restrições e a função objetivo (dos programas lineares empregados no cálculo da eficiência técnica) sejam difusas e que sejam essencialmente satisfeitas ou essencialmente não satisfeitas. Em sua abordagem as relações entre insumos e produtos são difusas e os insumos e os produtos são tratados como determinísticos. Em 1996 Girod desenvolveu uma metodologia de análise da eficiência técnica empregando quantidades difusas nos cálculos; em sua abordagem o decisor é capaz de definir um "nível fora de risco" e um "nível impossível" de ocorrer para cada insumo e cada produto (figura 7.1, pág.56). Níveis consumidos e produzidos fora de risco são conservadores e podem ser realmente obtidos na produção, enquanto que níveis impossíveis estão associados àqueles valores que representam cenários de produção menos realísticos (tal como grande quantidade de produtos sem defeitos).

Em 1998 Ueda e Kamimura propõem uma medida aplicável nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo LR (figura 7.2, pág.59). Os pesquisadores sugerem uma agregação das quantidades difusas transformando-as em quantidades determinísticas.

Nesta seção serão abordadas as medidas difusas da eficiência técnica comentadas[1]. Para o desenvolvimento destas medidas, suponhamos que tenham sido observadas as atividades de J produtores, cada um transformando n insumos em m produtos. Seja $\widetilde{M}$ $(j \times m)$ a matriz contendo as quantidades difusas dos produtos observados e $\widetilde{N}$ $(j \times n)$ a matriz das quantidades difusas dos insumos. Então, $\widetilde{x}_{ji} \in N$ é a quantidade difusa consumida do i-ésimo insumo pelo j-ésimo produtor e $\widetilde{y}_{jk} \in \widetilde{M}$ é a quantidade difusa do k-ésimo produto do j-ésimo produtor.

7.1 Medida de Sengupta

Sengupta [1992] desenvolveu uma medida da eficiência técnica para avaliar planos de produção envolvendo múltiplos insumos e um único produto. O abordagem de Sengupta é baseada no programa linear dual da medida radial de CCR e na programação linear difusa simétrica de Zimmermann e sugere a existência de imprecisões entre os planos de produção observados. O modelo pode ser escrito no programa linear difuso

$$
\begin{array}{ll}
\max & \omega \\
s.a & \omega d_o + X_o \beta \leq g_o + d_o \\
 & \omega d_j \leq d_j + X_j^T \beta - Y_j, \quad j = 1, 2, ..., J \\
 & 0 \leq \omega \leq 1 \\
 & \beta \geq 0
\end{array}
\tag{7.1}
$$

onde g_o representa o "nível de aspiração" da função objetivo e d_j é a violação permitida da j-ésima restrição. A eficiência técnica do o-ésimo produtor é $\frac{Y_o}{X_o \beta}$ [Girod, 1996, p.88].

Sengupta não propôs procedimento para a especificação e g_o e d_j. A dificuldade de fixar os níveis de tolerância e a limitação de trabalhar com apenas um produto são impedimentos para a aplicação prática do modelo de Sengupta.

[1] No Apêndice A deste trabalho encontram-se noções básicas sobre conjuntos difusos e programação linear difusa.

7.2 Medidas de Girod

Na medida desenvolvida por Sengupta não podem ser inseridas as quantidades difusas dos fatores de produção. Girod foi mais além e desenvolveu um conjunto de medidas cujos programas lineares empregam quantidades difusas semelhantes às representadas na figura 7.1. A questão central da abordagem envolve a especificação dos limites inferior e superior para cada insumo e para cada produto. Tais limites são considerados valores "livres de risco" (valores conservadores, certamente alcançáveis com os procedimentos tecnológicos disponíveis para cada produtor) aos quais se associa um grau de possibilidade de ocorrer na prática igual a 1, e valores "impossíveis" (limites além dos quais os planos de produção seriam certamente irrealistas) associados a um grau de possibilidade zero de ocorrer. A quantidade de cada fator de produção caracteriza-se assim, como um conjunto difuso cuja função de pertinência (ou distribuição de possibilidade) alcança grau 1 no limite "livre de risco" e grau zero no limite "impossível", decrescendo monotonicamente de um até zero nesse intervalo.

Sejam $\underline{x}_{io}$ o limite inferior e $\bar{x}_{io}$ o limite superior do i-ésimo insumo do o-ésimo produtor. A função de pertinência associada ao insumo x_{io} é

$$\mu_x(x_{io}) = \frac{\underline{x}_{io} - x_{io}}{\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}},\ i = 1, ..., N,\ o = 1, 2, ..., J, \tag{7.2}$$

Sejam $\underline{y}_{ko}$o limite inferior e $\bar{y}_{ko}$ o limite superior do k-ésimo produto do o-ésimo produtor. A função de pertinência associada ao produto y_{ko} é

$$\mu_y(y_{ko}) = \frac{y_{ko} - \bar{y}_{ko}}{\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}},\ k = 1, ..., M,\ o = 1, 2, ..., J. \tag{7.3}$$

As duas funções de pertinência encontram-se ilustradas nos painéis (a) e (b) da figura 7.1.

Das funções de pertinência pode-se expressar ambos, x_{io} e y_{ko}, como combinação linear dos seus respectivos limites.

$$x_{io} = \underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu_x(x_{io}) \tag{7.4}$$

$$y_{ko} = \left(\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}\right) \times \mu_y(y_{ko}) + \bar{y}_{ko} \tag{7.5}$$

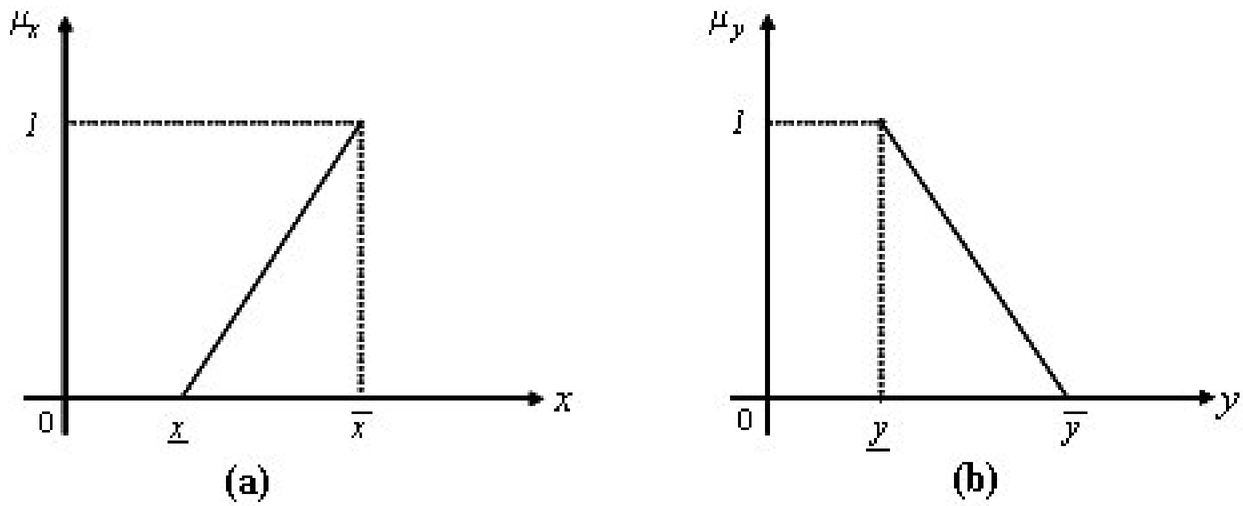

Figura 7.1: **Função de pertinência dos insumos e dos produtos.** ***Fonte: Girod, 1996,p.91***.

Substituindo estas quantidades na definição 1 (seção 2.2 ???) tem-se a medida da eficiência técnica considerando retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos. O índice da eficiência técnica $EFC_{CGIn}(y^o, x^o)$ então é obtido com o auxílio do seguinte programa linear difuso paramétrico (os parâmetros são $\mu_x(x^o)$ e $\mu_y(y^o)$)

$$
\begin{array}{ll}
\min & \lambda \\
s.a & \mu_y(y^o) \times \left(\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}\right) + \bar{y}_{ko} \leq \sum\limits_{j=1}^{J} z_j \left[\mu_y(y_{kj}) \times \left(\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}\right) + \bar{y}_{jh}\right] \\
& \sum\limits_{j=1}^{J} z_j \left[\underline{x}_{ij} - \left(\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}\right) \times \mu_x(x^{ij})\right] \leq \lambda \left(\underline{x}_{io} - \left(\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}\right) \times \mu_x(x^o)\right) \\
& z_j \geq 0
\end{array}
\tag{7.6}
$$

Para Carlsson e Korhonen [1986, p.25] o melhor valor da função objetivo, a um nível fixo de precisão μ, sempre ocorrerá quando todas as funções de pertinência forem iguais, ou seja, $\mu_x(x_{ih}) = \mu_y(y_{kh}) = \mu$. Rescrevendo 7.6 tem-se

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \lambda \\
s.a \quad & \mu \times \left(\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}\right) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\mu \times \left(\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}\right) + \bar{y}_{jh}\right] \\
& \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\underline{x}_{ij} - \left(\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}\right) \times \mu\right] \leq \lambda \left(\underline{x}_{io} - \left(\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}\right) \times \mu\right) \\
& z_j \geq 0
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

A medida da eficiência orientação consumo supondo retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos $EFC_{VGIn}(x^o, y^o)$ será calculada com auxílio do seguinte programa linear difuso

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \lambda \\
s.a \quad & \mu \times \left(\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}\right) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\mu \times \left(\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}\right) + \bar{y}_{jh}\right] \\
& \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\underline{x}_{ij} - \left(\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}\right) \times \mu\right] \leq \lambda \left(\underline{x}_{io} - \left(\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}\right) \times \mu\right) \\
& \sum_{j=1}^{n} z_j = 1, \quad z_j \geq 0
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Mantendo a suposição de funções de pertinência lineares e monotônicas crescentes para os insumos e funções lineares monotonicamente decrescentes para os produtos, o decisor, para uma dada função de pertinência μ, pode transformar a medida *FDH* numa medida correspondente. Incluindo a restrição $z_j \in \{0,1\}$ em 7.2 obtém-se então o programa linear difuso para calcular o índice da eficiência técnica orientação consumo $EFC_{FDHGIn}(y^o, x^o)$.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \lambda \\
s.a \quad & \mu \times \left(\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}\right) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\mu \times \left(\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}\right) + \bar{y}_{jh}\right] \\
& \sum_{j=1}^{J} z_j \left[\underline{x}_{ij} - \left(\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}\right) \times \mu\right] \leq \lambda \left(\underline{x}_{io} - \left(\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}\right) \times \mu\right) \\
& \sum_{j=1}^{n} z_j = 1, \quad z_j \geq 0 \\
& z_j \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

OBS.:A medida $EFC_{FDHGIn}(y^o, x^o)$ também pode ser calculada através de um algoritmo semelhante ao processo descrito na seção 2.4.

Para resolver 7.2-7.2 o decisor deve experimentar diferentes valores para a função pertinência μ, por exemplo $0,1; 0,2; ...; 0,9; 1$ e resolver o programa linear difuso correspondente [Girod, 1996, p.99]. O conjunto de soluções resultante desta série de programas lineares pode ser representado graficamente em termos do conjunto de valores de μ. Do gráfico, o decisor terá uma visão do comportamento da função objetivo segundo a variação de μ, e permite extrair conclusões apropriadas.

A determinação dos limites "livres de risco" e "impossível" é essencial nesse procedimento pois a eles serão associados graus de possibilidades de implementação dos planos de produção. Por exemplo, segundo os termos de Girod [1996, p.99], os índices de eficiência técnica associados a $\mu = 0,6$ serão interpretados como tendo 60% de possibilidade de serem realistas, uma vez que são construídos a partir de planos de produção que têm, eles mesmos, 60% de possibilidades de serem realistas.

7.3 Medida de Ueda e Kamimura

Ueda e Kamimura [1989] desenvolveram uma metodologia para mensurar a eficiência técnica quando as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo LR (figura 7.2). Os pesquisadores sugeriram uma agregação das quantidades imprecisas transformando-as em quantidades determinísticas (crisp). Seja $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a})$ (ilustrado na figura 7.2) a quantidade difusa de um fator de produção, onde $\underline{a}$ é o limite inferior, $\bar{a}$ é o limite superior e a é a quantidade média, então segundo a metodologia de Ueda e Kamimura a quantidade determinística que corresponde a $\tilde{A}$ é

$$A = \frac{\underline{a} + 2a + \bar{a}}{4} \tag{7.10}$$

Como as quantidades dos fatores de produção são expressas através de intervalos contínuos, a agregação resulta em quantidades pertencentes aos intervalos ($A \in [\underline{a}, \bar{a}]$) e geralmente tem-se $A \neq a$.

Após transformados todos os insumos e produtos em quantidades determinísticas, basta substituí-las na medida radial de CCR. Neste caso o programa linear resultante é independente de parâmetros e os resultados obtidos não indicam ao decisor o comportamento da eficiência técnica em função de diferentes conjuntos corte μ dos fatores de produção.

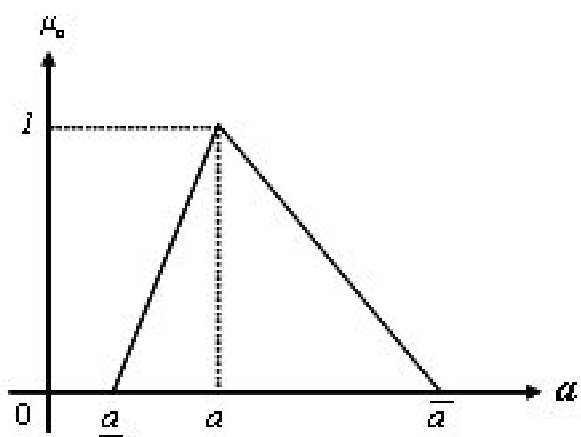

Figura 7.2: **Fatores de produção expressos através de números difusos do tipo LR.**

8

Outros aspectos em DEA

Neste capítulo serão abordados alguns aspectos gerais envolvendo DEA, que são os seguintes:

1. A Medida *Free Disposal Hull*-FDH
2. A seleção de pesos dos fatores de produção
3. Os retornos de escala
4. E a seleção dos fatores de produção

8.1 A medida *Free Disposal Hull*-FDH

Em geral as fronteiras de produção geradas pelas medidas radiais e não radiais da eficiência técnica são definidas por combinações lineares entre planos de produção observados eficientes tecnicamente. Portanto, a fronteira de produção pode ser formada por planos de produção observados e planos de produção hipotéticos. Esta característica, de planos de produção que não ocorreram na prática pertencerem à fronteira de produção, é considerada indesejável por alguns pesquisadores. Para suprir esta lacuna, em 1984 Deprins, Simar e Tulkens introduziram uma medida radial denominada por eles de *Free Disposal Hull*-FDH que gera uma fronteira de produção constituída apenas por planos de produção observados.

Na medida radial desenvolvida, Deprins, Simar e Tulkens mantêm o descarte forte dos insumos e dos produtos bem como a propriedade de retornos variáveis de escala. Para obter a medida FDH orientação consumo basta adicionar em EFC_{VIn} a restrição $z_j \in \{0,1\}$, $j = 1, ..., J$ que tem o objetivo de 'enfraquecer' a necessidade de convexidade da tecnologia de produção. Embora a adição desta restrição transforme o cálculo num problema de programação com variáveis discretas, existem algoritmos baseados no conceito de dominância[1] que simplificam a solução.

Na figura 8.1 encontram-se ilustrados o conjunto $C_C(1)$ e a fronteira gerada pela medida radial de CCR, e o conjunto $C_{FDH}(1)$ e a fronteira gerada pela medida FDH. Pode-se observar que a fronteira gerada pela medida FDH, é a isoquanta de $C_{FDH}(1)$ e que coincide com o conjunto de eficiência fraca. Portanto, a medida FDH classifica os planos de produção pertencentes a isoquanta como eficientes tecnicamente e projeta os planos pertencentes ao interior de $C_{FDH}(1)$ sobre esta. Por exemplo, o plano de produção P_7 é ineficiente tecnicamente pois é dominado pelos planos de produção observados P_1, P_2, P_3, P_8, P_{10} e P_{11}. Graficamente o escore da eficiência de P_7 orientação consumo é $EFC_{FDHIn}(x^7, y^7) = \frac{2}{4}$ e seu plano de produção *benchmark* é P_2.[2]

A medida *Free Disposal Hull* orientação consumo do *o*-ésimo produtor tem a seguinte definição:

Definição 8 *A função* $EFC_{FDHIn}(y^o, x^o) = \min\{\lambda^o : y^o \leq zM,\ zN \leq \lambda^o x^o,\ \sum_{j=1}^{n} z_j = 1,\ z_j \in \{0, 1\}\}$ *é a medida FDH da eficiência técnica orientação consumo do o-ésimo produtor.*

Tulkens [1993] demonstrou que é possível calcular a eficiência técnica via FDH sem resolver qualquer problema de programação matemática, e sugere o uso de um algoritmo constituído de dois passos que é baseado no conceito de dominância orientação consumo. Se o decisor pretende calcular o índice da eficiência técnica orientação consumo do *o*-ésimo produtor, basta executar o seguinte algoritmo, que mede EFC_{FDHIn} através de comparações entre as unidades de produção observadas:

Passo 1: Associar ao *o*-ésimo produtor o conjunto D_o contendo os índices de todos os vetores (x_k, y_k) satisfazendo $x_{io} \geq x_{ik}$, $i = 1, ..., N$, com desigualdade estrita para pelo menos um elemento, e $y_{jk} \geq y_{jo}$, $j = 1, ..., M$.

Passo 2: Calcular o índice de eficiência técnica FDH usando aq equação 8.1.

$$EFC_{FDHIn}(x^o, y^o) = \min_{d \in D_o} \left\{ \max_{i=1,\dots,N} \left(\frac{x_{id}}{x_{io}} \right) \right\}. \tag{8.1}$$

[1] Sejam os planos de produção $p^o = (x^o, y^o)$ e $p^d = (x^d, y^d)$. p^d domina p^o se $x^d \leq x^o$ e $y^d \geq^* y^o$, ou se $x^d \leq^* x^o$ e $y^d \geq^* y^o$ [Tulkens, 1993, p.4].

[2] $EFC_{FDHIn}(x^7, y^7) = \min\left\{\frac{x_{17}}{x_{12}}, \frac{x_{27}}{x_{22}}\right\} = \frac{x_{17}}{x_{12}} = \frac{2}{4}$

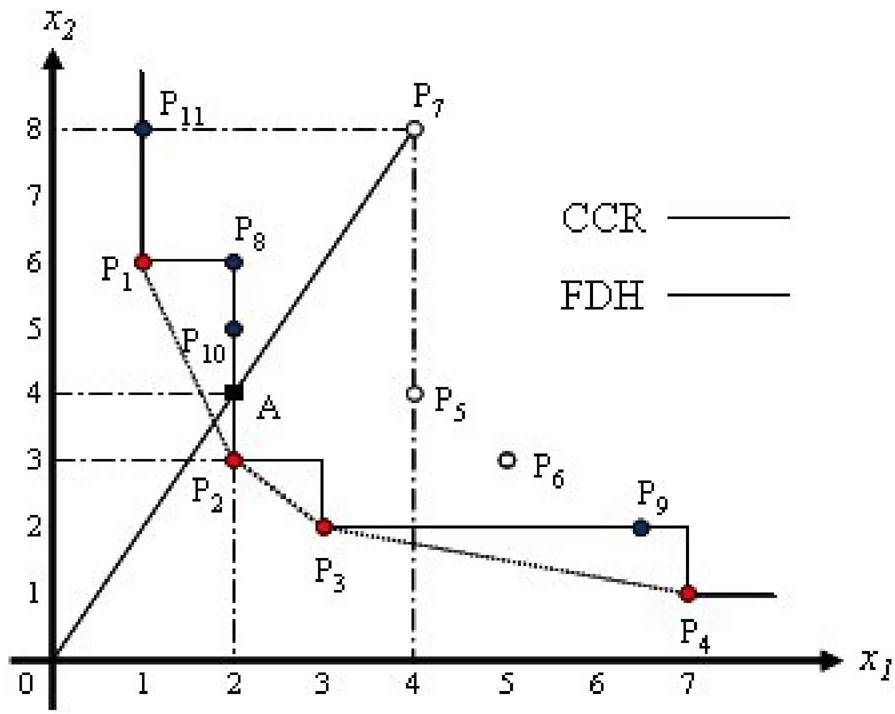

Figura 8.1: **As fronteiras de produção CCR e FDH**.

Seja $o = m$ e $z_k = 1$ para algum $k \in \{1, ..., J\}$. Então o k-ésimo produtor (que é *benchmark* do m-ésimo produtor) produz pelo menos o que o m-ésimo produz, porém consumindo menos. Esta medida é muito restritiva pelo fato de um produtor ser *benchmark* apenas quando: (i) o nível de todos os produtos é maior ou igual aos do produtor em análise; e (ii) o nível de todos os insumos empregados for menor ou igual aos do produtor em análise e com desigualdade estrita para pelo menos um deles. Se nenhuma destas duas condições for verificada (quando $D_o = \phi$) então o produtor analisado é eficiente tecnicamente.

A implementação computacional desta medida então, consiste em implementar comparações do vetor insumo/produto de cada produtor com todos os demais vetores verificando a existência de ineficiência no sentido direto da definição de Koopmans: um produtor é ineficiente se existir outro que emprega quantidades de recursos menores ou iguais (valendo pelo menos uma desigualdade estrita), e seja capaz de produzir as quantidades de produtos iguais ou maiores. Assim um produtor é ineficiente se for possível encontrar outro que o domine no sentido recém exposto; o dominante (ou referência) se constitui um *benchmark* para a dominada.

Muitas vezes a abordagem FDH é considerada o melhor cenário para calcular a eficiência pois sua fronteira de produção é envolvida pelas fronteiras definidas na seção 2.2.1, resultando em escores de eficiência maiores que EFC_{CIn}, EFC_{NIn} e EFC_{VIn}. FDH apresenta duas vantagens em relação a outras medidas: (a) seus escores transmitem maior credibilidade pois sua fronteira de produçãoo possui ajuste maior aos dados; (b) compara cada unidade de produçãoo com outra unidade de produção observada e não com cenários hipotéticos (que são planos de produção que nunca ocorreram na prática [Girod, 1996, p.53].

8.2 Pesos

Knight definiu a produtividade como sendo a razão entre a produção útil e o consumo útil. Considerando um insumo útil e um produto útil a razão é direta. Entretanto, se ocorrerem múltiplos insumos úteis e/ou múltiplos produtos úteis deve-se agregar os insumos num único insumo e os produtos em um único produto como mostra a equação

$$\text{Produtividade} = \frac{\sum \mu_k y_k}{\sum \nu_i x_i} \tag{8.2}$$

onde $\mu_k > 0$ é a utilidade do produto k na composição da produção útil e $\nu_i > 0$ é a utilidade do insumo i na composição do consumo útil. A agregação dos insumos resulta num insumo denominado de insumo virtual e a agregação dos produtos resulta num produto virtual.

A eficiência técnica de um produtor em particular pode ser obtida da relação acima. Em 1978, Charnes, Cooper e Rhodes, desenvolveram um modelo de programação fracionária para calcular a eficiência de um dado produtor tal que a eficiência dos demais, utilizando os pesos deste produtor, seja menor ou igual a unidade (1). Deste modo, o modelo busca o melhor conjunto de pesos tal que a eficiência seja máxima.

O modelo matemático que calcula a eficiência do o-ésimo produtor (considerando J produtores) empregando o modelo DEA tradicional de CCR orientação consumo é

$$
\begin{aligned}
EFC_{cIn}(y^o, x^o) = \quad & \max \quad \frac{\sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i} \\
& \text{s.a} \quad \frac{\sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i} \\
& \qquad \mu_k > 0,\ \nu > 0
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

Dados os insumos e os produtos, as variáveis determinantes no cálculo da eficiência são os vetores de pesos μ e ν. A escolha destes pesos agregadores de certo modo, é livre. Ou seja, o modelo matemático atribui livremente os valores dos pesos sem considerar graus de utilidade diferentes entre insumos e entre produtos. Ou seja, o modelo acima não incorpora a informação se um insumo apresenta utilidade maior que outro.

Seja o seguinte exemplo

	Insumos		**Produtos**	
DMU	**Médicos**	**Enfermeiros**	**Pacientes externos**	**Pacientes internos**
A	20	151	100	90
B	19	131	150	50
C	25	160	160	55
D	27	168	180	72
E	22	158	94	66
F	55	255	230	90
G	33	235	220	88
H	31	206	152	80
I	30	244	190	100
J	50	268	250	100
K	53	306	260	147
L	38	284	250	120

Tabela 8.1: **Quantidade dos insumos e dos produtos**

Consideremos que o decisor deseja incorporar no modelo a informação de que a razão entre o peso dos médicos (v_1) e o peso dos enfermeiros (v_2) é igual a $\frac{1}{5}$

8.3 Retornos de escala

Retorno de escala, ou economia de escala, é uma relação entre insumos e produtos [Steering Commitee, 1997]. Os retornos podem ser constantes, crescentes ou decrescentes, dependendo do nível da produção crescer na mesma proporção, numa proporção maior ou numa proporção menor que o consumo, respectivamente. Portanto, conhecendo-se o retorno de escala pode-se conhecer a variação da produção quando ocorrer uma redução ou um aumento do consumo.

O emprego de DEA na determinação do retorno de escala originou-se do trabalho de Banker [1984] quando introduziu a noção de *most productive scale size-mpss*[3], e mostrou como a medida CCR poderia ser empregada para obter uma estimativa do retorno de escala. O trabalho de Banker é limitado à consideração de uma única solução ótima para o programa linear da medida CCR o que corresponde à ocorrência de um único hiperplano suporte para a tecnologia de produção, restringindo bastante suas aplicações empíricas [Banker e Thrall, 1992, p.74-75]. Banker e Thrall [1992] foram mais além, e modelaram uma metodologia para mensurar retornos de escala de planos de produção pertencentes ao conjunto eficiência que é aplicável tanto nas situações em que a solução ótima é única quanto naquelas em que a tal solução não é única. Para descrever a metodologia é necessário definir os conjuntos

1. $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}} \equiv \left\{ (X,Y) : X \geq \sum_{j=1}^{J} z_j X_j,\ Y \leq \sum_{j=1}^{J} z_j Y_j,\ \sum_{j=1}^{J} z_j = 1,\ z \in R_+^J \right\}$,
2. $\Pi(X^o, Y^o) \equiv \{(X,Y) : X = xX^o, Y = yY^o,\ x, y \in R_+,\ x \neq 0\}$,
3. $\Gamma(X^o, Y^o) \equiv \left\{ (x,y) : xX^o \geq \sum_{j=1}^{J} z_j X_j,\ yY^o \leq \sum_{j=1}^{J} z_j Y_j,\ \sum_{j=1}^{J} z_j = 1,\ z \in R_+^J \right\}$,

onde X é a matriz dos insumos, Y é a matriz dos produtos e J é o número de produtores. O conjunto $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$ é formado por todos os planos de produção viáveis considerando retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos; o conjunto Π é formado por planos de produção do tipo (xX^o, yY^o), $x, y \geq 0$, $x \neq 0$; o terceiro conjunto diferencia-se dos anteriores quanto as quantidades pertencentes a ele. Enquanto que $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$ e Π são formados por planos de produção, Γ é constituído por todos os pares de números reais positivos (x,y) utilizados na contração e na expansão de X^o e de Y^o tal que (xX^o, yY^o) pertença a $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$. Os conjuntos $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$ e Γ encontram-se exemplificados respectivamente nos gráficos (a) da figura 8.2 e na figura 8.3. (Nas situações de um único insumo e de um único produto o conjunto Π coincide com o primeiro quadrante do plano XY).

[3] Um plano de produção $(X_m, Y_m) \in T$ é um mpss se e somente se para todo $(xX_m, yY_m) \in T$ tem-se $x \geq y$.

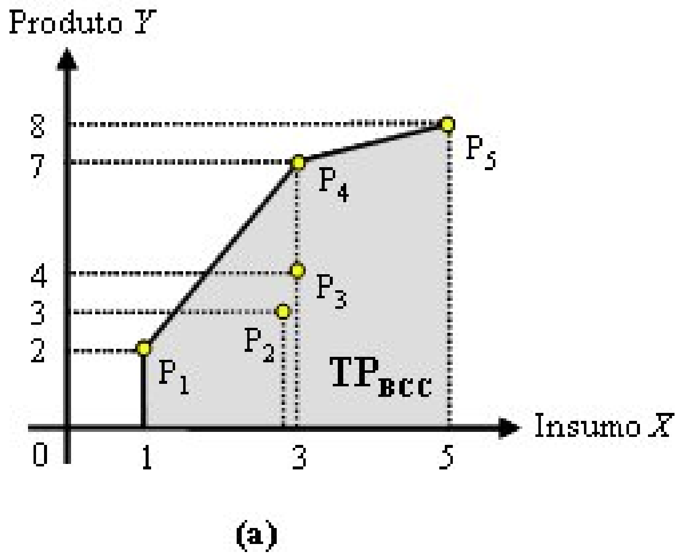

Figura 8.2: **Tecnologia considerando retornos variáveis de escala - $\mathbf{TP_{BCC}}$**.

Na figura 8.3 estão ilustrados os pares (x, y) que contraem e expandem o consumo e a produção de P_4 e geram planos de produção pertencentes a TP_{BCC}. Com os pares de números locados no interior de Γ são gerados planos de produção pertencentes ao interior de TP_{BCC}, e com os pares locados na borda de $\Gamma\,(P_4)$ são gerados planos de produção pertencentes a fronteira de produção de TP_{BCC}. Sejam então os segmentos

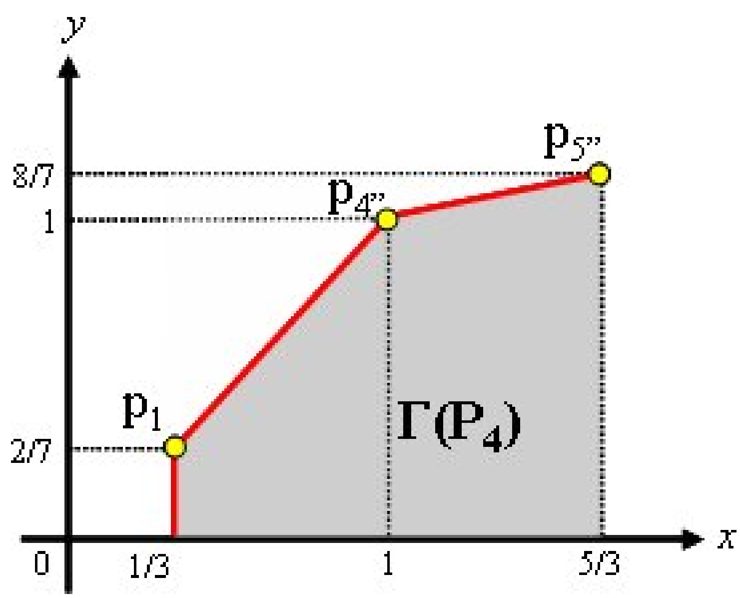

Figura 8.3: **Imagem de** $\Pi(3, 7)\cap$ $\mathbf{TP_{BCC}}$.

$$\overline{\mathrm{p}_{1"}\mathrm{p}_{4"}} : \begin{cases} x = 1 - t & 0 < t < \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{15t}{14} \end{cases} \tag{8.4}$$

e

$$\overline{\mathrm{p}_{4"}\mathrm{p}_{5"}} : \begin{cases} x = 1 + t & 0 < t < \frac{2}{3} \\ y = 1 + \frac{3t}{14} \end{cases} \tag{8.5}$$

que definem a borda superior de $\Gamma\,(\mathrm{P}_4)$. Qualquer par de escalares $(x, y) = \left(1 - t, 1 - \frac{15}{14}t\right)$, $0 < t \leq \frac{2}{3}$, pertencente ao primeiro segmento contrai $(3, 7)$ e o plano $(3x, 7y)$ pertence ao segmento $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4} \subset \mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$. Pares $(x, y) = \left(1 + t, 1 + \frac{3}{14}t\right)$ pertencentes a $\overline{\mathrm{p}_{1"}\mathrm{p}_{5"}}$ expandem $(3, 7)$ e geram planos de produção do tipo $(3x, 7y)$ pertencentes ao segmento $\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5} \subset \mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$. Analisando a inclinação das retas $\overleftrightarrow{\mathrm{p}_{1"}\mathrm{p}_{4"}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{p}_{4"}\mathrm{p}_{5"}}$ pode-se concluir que[4]:

1. se o consumo de $X^o = 3$ for contraído para $X = 3(1-t)$, ou seja, X^o será decrescido em $t \times 100$ porcento, então o novo nível da produção será no máximo $Y = 7(1-\frac{15}{14}t)$, com $0 < t < \frac{2}{3}$.

2. se $X^o = 3$ for acrescido em $(t \times 100)\,\%$, então o novo nível da produção será acrescido em $\left(\frac{3}{14}t \times 100\right)\%$, com $0 < t < \frac{2}{3}$.

O retorno de escala numa vizinhança[5] próxima ao plano de produção $(3, 7)$, denominado neste trabalho por $REsc_{(3,7)}$, é dado pela inclinação das retas que passam por $(1, 1)$ e que definem a borda de $\Gamma\,(\mathrm{P}_4)$ [Banker e Thrall, 1992, p.78]. No exemplo acima as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{p}_{1"}\mathrm{p}_{4"}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{p}_{4"}\mathrm{p}_{5"}}$ passam por $(1, 1)$, e observam-se portanto dois valores para o retorno de escala em $(3, 7)$, ou seja $REsc_{(3,7)} = \frac{15}{14}$ e $REsc_{(3,7)} = \frac{3}{14}$. Banker e Thrall [1992, p.79] denominam o intervalo definido por estes dois valores de "elasticidade do retorno de escala" numa vizinhança de $(3, 7)$.

Para estender a noção de retornos de escala à situação em que ocorrem múltiplos insumos e produtos, Banker e Thrall [1992, p.79] consideram aumentos proporcionais nos insumos e nos produtos, mantendo fixo o mix insumo-produto igual ao de (X^o, Y^o). Os dois pesquisadores desenvolveram a metodologia de cálculo atendo-se à interseção dos conjuntos $\mathrm{TP}_{\mathrm{BCC}}$ e $\Pi(X^o, Y^o)$, e à solução do programa linear

[4] Banker e Thrall, [1992, p.78-79].

[5] Chama-se vizinhança de raio r de um ponto $a \in R_+^N$ ao conjunto dos pontos z tais que $||z - a|| < r$, onde $||x||$ é uma norma Euclideana.

$$EFC_{IVa}(X^o, Y^o) = \max\{(WY^o + u^o) : WM - VN + u^o \leq 0; VX^o = 1; W, V \geq \varepsilon\}$$

onde ε é uma quantidade infinitesimal positiva. Este programa linear é o dual do programa linear utilizado para mensurar o índice não radial da eficiência técnica de BCC.

Seja W^*, V^* e u^{o*} a solução ótima de EFC_{IVa} para o plano de produção (X^o, Y^o) pertencente à fronteira de produção. Logo $W^*Y^o + u^{o*} = 1$ e $V^*X^o = 1$. Esta solução identifica um hiperplano suporte no ponto (X^o, Y^o), e a imagem em Γ de sua interseção com o plano $\Pi(X^o, Y^o)$ será da forma $(W^*Y^o)\, y = (V^*X^o)\, x - u^{o*}$ [Banker e Thrall, 1992, p.79][6]. Se esta for a única reta que passa por $(1, 1) \in \Gamma(X^o, Y^o)$ então pode-se calcular o retorno de escala em (X^o, Y^o), ou seja, $REsc_{(X^o,Y^o)} = \frac{V^*X^o}{W^*Y^o} = \frac{1}{W^*Y^o} = \frac{1}{1-u^{o*}}$.

Para determinar a elasticidade do retorno de escala nas situações em que a reta passante por $(1, 1) \in \Gamma$ não é única, Banker e Thrall [1992, p.81] sugerem o cálculo dos limites inferior e superior de $REsc$ a partir das relações

$$REsc^-_{(X^o,Y^o)} = \frac{1}{1 - u^{o-*}} \leq REsc_{(X^o,Y^o)} \leq REsc^+_{(X^o,Y^o)} = \frac{1}{1 - u^{o+*}} \tag{8.6}$$

onde

$$u^{o-*} = \min\left\{u^{o-} : W^-Y^o + u^{o-} = 1; W^-M - V^-N + u^{o-} \leq 0; V^-X^o = 1; W^-, V^- \geq \varepsilon\right\} \tag{8.7}$$

e

$$u^{o+*} = \min\left\{u^{o+} : W^+Y^o + u^{o+} = 1; W^+M - V^+N + u^{o+} \leq 0; V^+X^o = 1; W^+, V^+ \geq \varepsilon\right\} \tag{8.8}$$

No programa linear 8.7, é minimizada a constante utilizada no cálculo do limite inferior do retorno de escala, e no programa 8.8 maximiza-se a constante, determinando o limite superior do retorno de escala. Portanto, para calcular os limites máximo e mínimo do

[6]Pois se $(X, Y) \in P$ então $X = xX^o$ e $Y = yY^o$, e qualquer ponto (X, Y) no hiperplano satisfaz a condição de $W^*Y + u^{o*} = V^*X$.

retorno de escala de um plano de produção basta determinar a solução ótima dos programas lineares 8.7 e 8.8 e substituir a solução ótima das funções objetivo nas relações de desigualdade expressas em 8.6.

A metodologia sugerida por Banker e Thrall [1992] também pode ser empregada quando (X^o, Y^o) não pertence ao conjunto eficiência, empregando as seguintes projeções de (X^o, Y^o) no conjunto eficiência:

$$hatx_{io} = \theta^* x_{po} - s_i^*,\ i = 1, ..., n, \tag{8.9}$$
$$\hat{y}_{pr} = y_{po} + s_p^*,\ p = 1, ..., m, \tag{8.10}$$

onde θ^*, s_i^* e s_p^* constituem a solução ótima do programa linear que calcula o índice não radial da eficiência técnica considerando retornos variáveis de escala (medida BCC não radial). Após executar estas alterações, $\left(\hat{X}^o, \hat{Y}^o\right)$ pertence a fronteira de produção recaindo-se na análise do retorno de escala detalhado nesta seção [Banker, Bardhan e Cooper, 1996, p.584].

Supondo que a elasticidade do retorno de escala numa vizinhança do *o*-ésimo produtor seja $\left[REsc^-_{(X^o,Y^o)}, REsc^+_{(X^o,Y^o)}\right]$, e que $(a \times 100)\,\%$ seja a redução proporcional no consumo e $(b \times 100)\,\%$ o aumento proporcional no consumo, então:

1. se a quantidade consumida decrescer proporcionalmente e passar de X^o para $X^o \times (1 - a)$, então a produção decrescerá de Y^o para $Y^o \times \left(1 - a \times REsc^+_{(X^o,Y^o)}\right)$;

2. se a quantidade consumida aumentar proporcionalmente de X^o para $X^o \times (1 + b)$, então a produção crescerá de Y^o para $Y^o \times \left(1 + b \times REsc^-_{(X^o,Y^o)}\right)$.

8.4 Seleção de variáveis - Método I-O *Stepwise*

Golany e Roll (1989) (*apud* Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.37) estabeleceram três fases principais na implementação de modelo DEA, que são: (i) a definição e a seleção das DMUs a entrarem na análise; (ii) a seleção das variáveis (insumos e produtos) que são relevantes e apropriadas para estabelecer a eficiência relativa das DMUs selecionadas e; (iii) a aplicação dos modelos DEA.

Na primeira fase, deve-se determinar um conjunto de DMUs homogêneas, ou seja, que realizam tarefas semelhantes com os mesmos objetivos, trabalhando nas mesmas condições de mercado, tais que as variáveis utilizadas sejam as mesmas, diferenciando-se nas suas magnitudes. Em seguida deve-se definir o número de DMUs a serem trabalhadas (este número deve ser, no mínimo, o dobro das variáveis utilizadas no modelo para garantir um bom poder discriminatório do modelo DEA).

Na segunda fase, deve-se considerar uma lista de possíveis variáveis a entrar no modelo. Estas variáveis podem ser controláveis (como por exemplo a quantidade de adubo em uma plantação) ou não controláveis (como por exemplo as condições climáticas), como também podem ser quantitativas (que podem ser mensuradas) ou qualitativas. Uma grande quantidade de variáveis diferencia melhor as DMUs, porém fará com que um maior número de DMUs esteja na fronteira, reduzindo a capacidade do algoritmo DEA de discriminar as DMUs eficientes das ineficientes.

Segundo Lins e Moreira (Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.38), a seleção de variáveis pode ser de dois tipos. O primeiro utiliza a opinião do interessado, usuário e/ou especialista, devendo levar em consideração os seguintes fatos: se a variável está apontando informação necessária que ainda não tenha sido incluída por outras variáveis; se a variável está apontando para um ou mais objetivos da aplicação; se os dados da variável são confiáveis e seguros e se explicam a eficiência de uma DMU.

O segundo tipo de seleção utiliza o apoio da análise de correlação, onde o programador deve escolher a orientação do modelo, de acordo com o objetivo de estudo. Ao escolher a orientação insumo, estará indicado que o objetivo do trabalho será a redução dos insumos sem alterar o nível de produção observado. A orientação produto indicará que o objetivo é um aumento na produção, mantidos os níveis de insumos observados.

Norman e Stoker, (*apud* Lins, M.P.E., Meza, L.A., 2000, p.41) propuseram o primeiro procedimento sistematizado para seleção de variáveis, inspirados no método *stepwise* (passo a passo) para seleção de variáveis usando modelos de regressão linear estatística. O método proposto, parte de um par insumo-produto inicial, calcula os escores de eficiência das DMUs com base neste par, e os coeficientes de correlação de todas as demais variáveis com estes escores. A lista de variáveis é percorrida em ordem decrescente do módulo do coeficiente de correlação, procedendo-se uma análise causal para selecionar a próxima variável a ingressar no modelo.

Neste método, chamado de I-O *stepwise*, conhece-se *a priori*, se a variável candidata é um insumo ou produto, estabelecendo critérios distintos de seleção, conforme o caso. O objetivo deste método é incorporar ao sistema a variável que permitirá um melhor ajuste das DMUs para a fronteira.

Norman e Stoker (1991) propuseram o primeiro procedimento sistematizado para seleção de variáveis, inspirados pelo método *stepwise* para seleção de variáveis em modelos de regressão linear estatística. O método parte de um par insumo-produto inicial, calcula os escores de eficiência das DMUs com base nesse par, e os coeficientes de correlação de todas as demais variáveis com estes escores. A listas de variáveis é percorrida em ordem decrescente do módulo do coeficiente de correlação, procedendo-se a uma análise causal para selecionar a próxima variável a ingressar no modelo.

O método I-O *Stepwise* reconhece que existe uma informação prévia sobre se a variável candidata é um insumo ou produto, e estabelece critérios distintos para seleção conforme o caso. O objetivo é incorporar a variável que permitirá um melhor ajuste das DMUs à fronteira e o critério utilizado neste texto é o da maior eficiência média.

Suponhamos que tem-se 12 produtores e quatro fatores de produção: X, Y, W e Z. Sabe-se que X é um insumo e Y é um produto e que ambos são fundamentais na análise da eficiência técnica. Em relação a W e Z não se sabe *apriori* qual é insumo e qual é produto. Deseja-se saber, como incluir (insumo ou produto) e qual dos fatores incluir na análise (W ou Z).

X	Y	W	Y/X	Y/W	W/X	Z	Y/X	Y/Z	Z/X
8	**3**	**0,38**	0,38	8	0,05	**9,63**	0,38	0,31	1,20
9	**1**	**0,11**	0,11	9	0,01	**9,89**	0,11	0,10	1,10
2	**1**	**0,50**	0,50	2	0,25	**9,50**	0,50	0,11	4,75
10	**4**	**0,40**	0,40	10	0,04	**9,60**	0,40	0,42	0,96
8	**2**	**0,25**	0,25	8	0,03	**9,75**	0,25	0,21	1,22
4	**9**	**2,25**	2,25	4	0,56	**7,75**	2,25	1,16	1,94
4	**8**	**2,00**	2,00	4	0,50	**8,00**	2,00	1,00	2,00
9	**4**	**0,44**	0,44	9	0,05	**9,56**	0,44	0,42	1,06
2	**9**	**4,50**	4,50	2	2,25	**5,50**	4,50	1,64	2,75
9	**3**	**0,33**	0,33	9	0,04	**9,67**	0,33	0,31	1,07
2	**3**	**1,50**	1,50	2	0,75	**8,50**	1,50	0,35	4,25
4	**6**	**1,50**	1,50	4	0,38	**8,50**	1,50	0,71	2,13

Tabela 8.2: **Quantidades dos insumos e dos produtos**

A matriz de correlações entre Y/X, W e Z é

Admitindo que a tecnologia satisfaz retornos constates de escala, pode-se analisar os resultados em gráficos tais que ada ordenada consiste em uma relação entre insumos e

	Y/X	**W**	**Z**
Y/X	1		
W	1	1	
Z	-1	-1	1

Tabela 8.3: **Matriz de correlações**

produto. Os gráficos abaixo mostram os casos em que as variáveis W e Z entram no modelo como produtos e insumos.

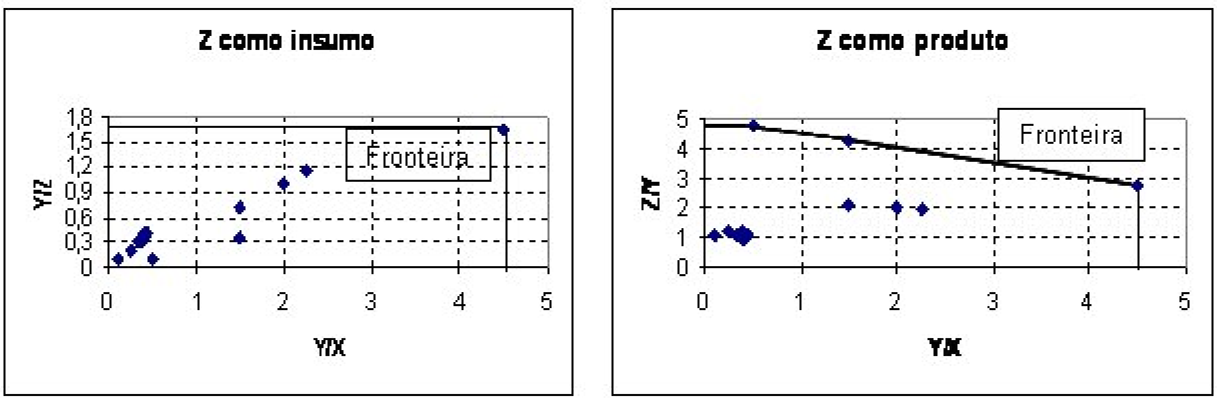

Figura 8.4: **Inclusão de Z**.

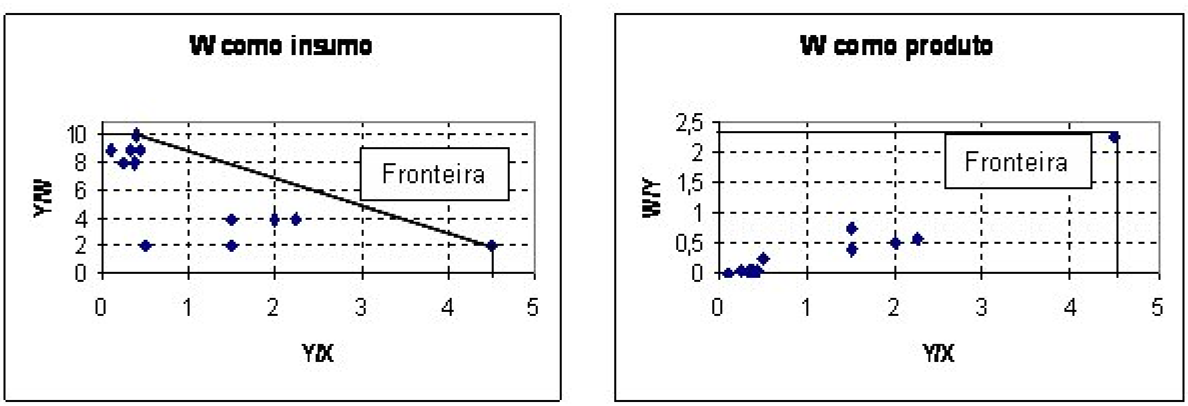

Figura 8.5: **Inclusão de W**.

Quando a fronteira contem uma única DMU, a eficiência de cada DMU é igual ao maior dos escores Y/X ou Y/Z (primeiro quadro da figura 8.4) ou Y/X W/X (segundo quadro da figura 8.5). Se a fronteira contém mais DMUs, então o escore de eficiência de cada DMU é maior do que o maior dos escores, como no segundo quadro da figura 8.4 e primeiro quadro da figura 8.5. Este padrão sempre se repete e pode-se afirmar que, considerando retornos constantes de escala e orientação produção, uma variável entrará como:

- INSUMO se estiver mais positivamente correlacionada com o índice de eficiência
- PRODUTO s estiver mais negativamente correlacionada com o índice de eficiência

Deste modo as DMUs estarão mais próximas da fronteira.

9 Índice de produtividade de Malmquist

O índice de Malmquist parte da ideia inicial de Malmquist *apud* Tatjé e Lovell (1993) de construir um índice de quantidade para análise de consumo, como razão de funções distância. Embora o índice tenha sido desenvolvido em um contexto de consumo, mais recentemente vem ganhando destaque num contexto de produção no qual múltiplos insumos e produtos são transformados em escores de eficiência. Na análise do produtor pode-se usar o índice de Malmquist para construir índices de produtividade orientação insumo ou produto, baseados na razão de funções distância orientação insumo ou orientação produto.

O índice de Malmquist tem muitas características desejáveis. Dentre elas pode-se destacar a não necessidade de definição do comportamento da função, como minimização de custos ou maximização de receitas, o que é muito útil quando os objetivos dos produtores são diferentes, ou ainda, quando estes são desconhecidos. Uma outra virtude é a possibilidade do desmembramento das mudanças de produtividade dentro de mudança na eficiência técnica e mudança tecnológica, permitindo, dessa forma, conhecer a natureza da mudança de produtividade.

O não requerimento dos preços dos insumos e produtos é uma outra importante característica do índice de Malmquist, principalmente em um estudo como o do setor agropecuário brasileiro, que passou, durante o período de análise, por altos índices de inflação. Este fato pode facilmente distorcer os resultados no caso de se trabalhar com valores monetários. Essa última vantagem também é destacada por Thirtle *et al* (1996). Segundo os autores, esta característica torna o índice extremamente importante, para estudos realizados nos países em desenvolvimento, onde os dados relativos a preços são muito distorcidos, ou inexistentes.

A fundamentação teórica, bem como o índice de Malmquist orientação produto, que serão apresentados a seguir, são baseados no trabalho de Caves *et al* (1982), Färe *et al* *apud* Färe *et al* (1995) e Fried *et al* (1993).

Começa-se expressando a tecnologia, com o vetor de insumos $x^t = (x_1^t, x_2^t, ...x_N^t) \in R_+^N$ e com o vetor de produtos $y^t = (y_1^t, y_2^t, ...y_M^t) \in R_+^M$, observados no período t, $t = 1, 2, ..., T$. A tecnologia pode ser representada pelos vetores de insumos e de produtos, viáveis, como no grafo

$$GR^t = \left\{ (y^t, x^t) : x^t \text{ pode produzir } y^t \right\}, t = 1, 2, ..., T. \tag{9.1}$$

O conjunto de possibilidades de produção ou de produtos pode ser definido em termos de grafo da seguinte forma:

$$P^t(x^t) = \left\{ y^t : (y^t, x^t) \in GR^t \right\}, t = 1, 2, ..., T. \tag{9.2}$$

É assumido que o conjunto de possibilidade de produção seja limitado, fechado, convexo e satisfaz a condição de descarte forte de insumos e de produtos (livre descarte).

Uma representação funcional da tecnologia é fornecida pela função distância orientação produto (Shephard *apud* Bureau *et al*, 1995).

$$D_o^t \left(x^t, y^t \right) = \min \left\{ \theta : \frac{y^t}{\theta} \in P^t(x^t) \right\}, t = 1, 2, ..., T. \tag{9.3}$$

Expressando em palavras, pode-se considerar que, para um par de insumos e produtos (x^t, y^t), pertencentes à tecnologia GR^t, a função distância orientação produto expressa a máxima expansão proporcional de produtos, mantendo $(x^t, \frac{y^t}{\theta})$ viável. Na realidade, a função distância é o inverso da medida de eficiência técnica orientação produto, de Farrell. Ou seja, a medida da eficiência técnica pode ser utilizada para calcular a função distância. A função distância orientação produção satisfaz $D_o^t \left(x^t, y^t \right) \leq 1$, sendo $D_o^t \left(x^t, y^t \right) = 1 \Leftrightarrow y^t \in Isoq_{P^t(x^t)}$. Em decorrência, pode-se concluir que $D_o^t \left(x^t, y^t \right) < 1$ significa ineficiência na produção, ou seja, o nível de produção da unidade está abaixo da isoquanta do conjunto de produção. No caso de $D_o^t \left(x^t, y^t \right) = 1$, a unidade produtiva estaria produzindo de forma eficiente, isto é, na isoquanta do conjunto de produção. Como se pôde observar, a função distância orientação produto é o inverso da medida de eficiência técnica orientação produção de Farrell (1957), relacionamento este que poderia ser representado por

$$D_o^t \left(x^t, y^t \right) = \frac{1}{EFC_o^t \left(x^t, y^t \right)} \quad \text{(figura9.1).} \tag{9.4}$$

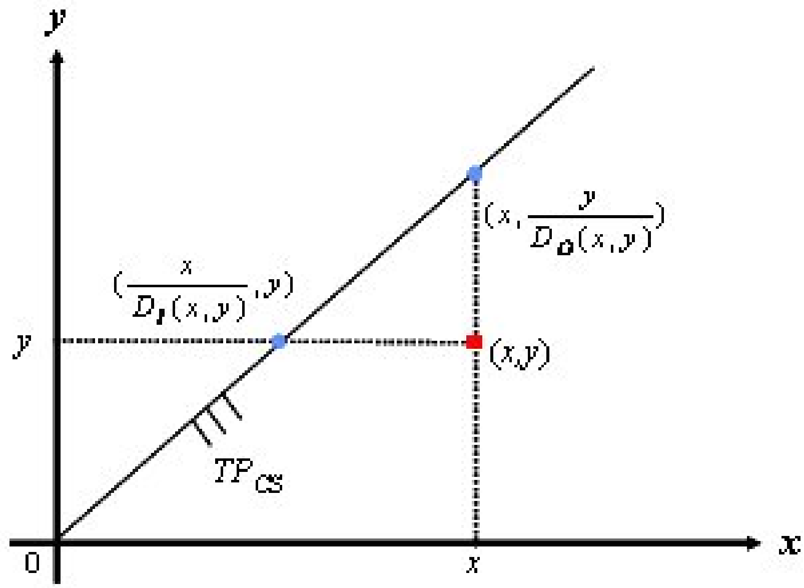

Figura 9.1: **Relação entre índice de eficiência e função distância**.

O cálculo do índice de Malmquist é baseado em quatro funções distância: $D_o^t(x^t, y^t)$, $D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$, $D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})$ e $D_o^{t+1}(x^t, y^t)$. A função distância $D_o^t(x^t, y^t)$ utiliza dados do período t. No caso de $D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$, a definição é feita de forma análoga, usando dados do período $t+1$. Porém, no caso da função $D_o^{t+1}(x^t, y^{t+1})$, são usados dados do período t e $t+1$, sendo esta definida como

$$D_o^t\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) = \min\left\{\theta : \frac{y^{t+1}}{\theta} \in P^t\left(x^{t+1}\right)\right\}. \tag{9.5}$$

Deste modo $D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})$ relaciona dados $t+1$ com a tecnologia existente no período t, resultando em $D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}) < 1$, $= 1$ ou > 1. Assim, os dados do período $t+1$ podem ser inviáveis para a tecnologia período t. A função de distância restante também usa dados dos períodos t e $t+1$, sendo representada como segue:

$$D_o^{t+1}\left(x^t, y^t\right) = \min\left\{\theta : \frac{y^t}{\theta} \in P^{t+1}\left(x^t\right)\right\}. \tag{9.6}$$

A função refere-se a dados do período t com a tecnologia existente no período $t+1$. Desta forma podendo assumir valores menores, iguais ou maiores que 1.

A figura 9.2 ilustra o índice de Malmquist considerando um produto e um insumo. O gráfico apresentado, mostra as tecnologias dos períodos t e $t+1$. Os vetores de insumo-produto (x^t, y^t) e (x^{t+1}, y^{t+1}) pertencem às suas respectivas tecnologias. No caso, ambos são viáveis em seus respectivos períodos, porém (x^{t+1}, y^{t+1}) não pertence à tecnologia do período t.

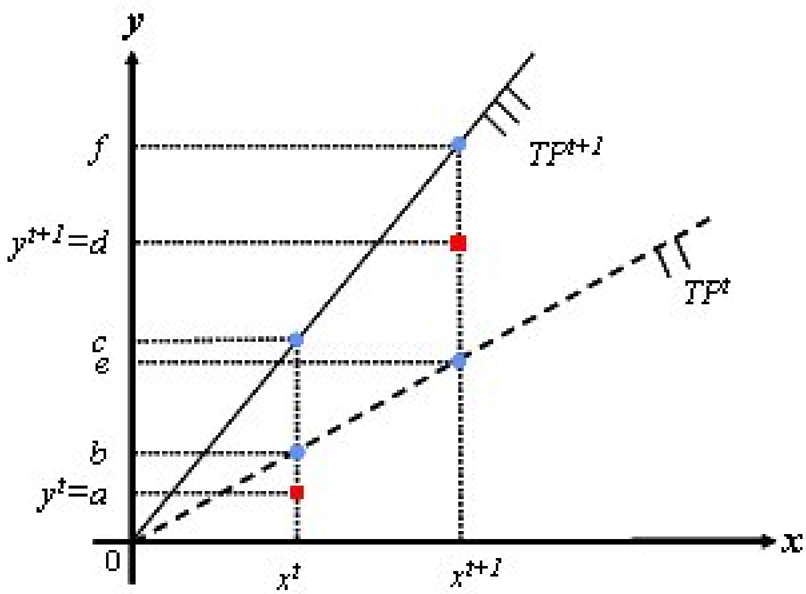

Figura 9.2: **Índice de Malmquist**.

O cálculo das funções distância, no caso de um insumo e um produto, pode ser facilmente realizado, sendo que

$$D_o^t\left(x^t, y^t\right) = \frac{0a}{0b} \quad \text{e} \quad D_o^{t+1}\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) = \frac{0d}{0f} \tag{9.7}$$

Quando as funções assumem valores menores que um (1), estas apresentam algum tipo de ineficiência no sentido de Farrell (1957); elas somente assumirão valores iguais a um (1) (ou seja, são Farrell eficientes) se e somente se (x^t, y^t) e (x^{t+1}, y^{t+1}) se encontrarem na fronteira de produção. As funções distância $D_o^{t+1}\left(x^t, y^t\right)$ e $D_o^t\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right)$ podem assumir valores menores, iguais ou maiores que um (1), como apresentado anteriormente, pois estas se utilizam de dados dos períodos t e $t+1$. No caso da figura acima,

$$D_o^{t+1}\left(x^t, y^t\right) = \frac{0a}{0c} \quad \text{e} \quad D_o^t\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) = \frac{0d}{0e}. \tag{9.8}$$

Apresentadas as funções distância, fica fácil compreender o índice de Malmquist é

$$M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \sqrt{\frac{D_o^t\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) \times D_o^{t+1}\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x^t, y^t\right) \times D_o^{t+1}\left(x^t, y^t\right)}}. \tag{9.9}$$

A primeira razão do índice utiliza a tecnologia do período t como referência para fornecer medidas de mudanças de produtividade. Este pode ser convencionado de índice de Malmquist com base no período t. No caso da segunda razão, a tecnologia do período $t+1$ é usada como referência para o fornecimento de medidas de mudança de produtividade, podendo ser denominado de índice de Malmquist com base no período $t+1$. Como pode ser observado, o índice definido é uma média geométrica de duas razões de funções distância orientação produção, que utilizam como base tecnologias em diferentes momentos do tempo.

O índice $M_o\left(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t\right)$, pode ser decomposto da seguinte forma:

$$M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D_o^{t+1}\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x^t, y^t\right)^t} \times \sqrt{\frac{D_o^t\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) \times D_o^t\left(x^t, y^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x^{t+1}, y^{t+1}\right) \times D_o^{t+1}\left(x^t, y^t\right)}} \tag{9.10}$$

O índice é dividido em duas componentes, sendo que a primeira (expressão fora dos colchetes) expressa a mudança no índice de eficiência técnica, de uma determinada unidade de produção, entre os períodos t e $t + 1$. Desta forma, pode-se perceber como é o comportamento da eficiência técnica em relação à mudança de fronteira de produção com o decorrer do tempo. A mudança de eficiência técnica pode ser menor, igual ou maior que a unidade, dependendo se existe queda, manutenção ou aumento no índice da eficiência técnica, respectivamente.

A segunda componente (raiz quadrada da expressão interna aos colchetes) expressa a mudança técnica ou mudança de tecnologia. Este, pode ter valores menores, iguais ou maiores que a unidade, conforme esteja ocorrendo i) regresso técnico, ii) não exista alteração da tecnologia, iii) ou progresso técnico, respectivamente. O índice de produtividade Malmquist é obtido pela multiplicação dos dois subíndices. Essa possibilidade de desmembramento do índice, como destacado, é muito importante, pois permite entender a origem das alterações de produtividade, ou seja, se um aumento de produtividade é fruto do progresso técnico ou da melhoria no indicador de eficiência, ou ainda dos dois simultaneamente. Por outro lado, também pode-se observar uma manutenção ou queda na produtividade, frente a um estado de progresso técnico, quando existe uma queda, mais que proporcional, no indicador de eficiência produtiva.

No caso de existirem mais de dois períodos de tempo para serem analisados, o índice de Malmquist pode ser calculado de duas formas. Na primeira, pode-se calcular o índice $M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$ para todos os períodos, mantendo como base o período t, ou seja, $M_o(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)$, $M_o(x^{t+2}, y^{t+2}, x^t, y^t)$, $M_o(x^{t+3}, y^{t+3}, x^t, y^t)$, ... $M_o(x^{t+n}, y^{t+n}, x^t, y^t)$. A segunda possibilidade para calcular o índice, é considerando os períodos adjacentes t, $t+1$; $t+1$, $t+2$; $t+2$, $t+3$; assim por diante até o último período.

Apresentado o índice de Malmquist, ainda é interessante destacar que este é um índice relativo, ou seja, os valores podem variar de acordo com as unidades que estão sendo avaliadas, o que é uma importante característica, pois algumas observações podem apresentar diminuição na eficiência técnica, enquanto outras podem apresentar melhoria. De forma análoga, algumas unidades podem apresentar progresso técnico, enquanto outras regresso técnico, ou ainda progresso técnico inalterado. As alterações de produtividade também podem ocorrer de diferentes formas para as unidades, por exemplo, aumento para umas e queda para outras, ou aumento diferenciados, ou ainda quedas diferenciadas. Desta forma, é possível explicar as alterações de produtividade de forma mais flexível e detalhada.

Referências Bibliográficas

[1] Ali, A.I., Seiford, M.L. (1993): *Computacional accuracy and infinitesimals in Data Enve-lopment Analysis*. INFOR, vol.31, no.4, pág.290-297.

[2] Banker, R.D. (1984): *Estimating most productive scale size using data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, vol.17, pág.35-44

[3] Banker, R.D., Bardhan, I., Cooper, W.W. (1996): *A note on returns to scale in DEA*. European Journal of Operational Research, vol.88, pág.583-585.

[4] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984): *Models for the estimation of technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*. Management Science, vol.30, no.9 pág.1078-1092.

[5] Banker, R.D., Thrall, R.M. (1992): *Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis*. European Journal of Operational Research, vol.62, pág.74-84.

[6] Bellman, R. E., Zadeh, L. A. (1970): *Decision-Making in a fuzzy environment*. Management Science, vol.17, no.4, pág.141-164.

[7] Campos, L., Verdegay, J.L. (1989): *Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, vol.32, pág.1-11.

[8] Carlsson, C., Korhonen, P. (1986): *A parametrric approach to fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and Systems. vol.20, pág.17-30.

[9] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978): *Measuring the efficiency of decision making units*. European Journal of Operations Research, vol.2, pág.429-444.

[10] Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., Stuz, J. (1985): *Foundation of Data Evenlopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Journal of Econometrics, vol.30(1/2), (October/November), pág.91-107.

[11] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. (1999): *IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA*. Management Science, vol.45, no.4, pág.597-607.

[12] Davis, A.F. (1995): *A literature review: Fuzzy Mathematical Programming*. Working Paper, Department of Industrial Ingineering, North Carolina State University, USA

[13] Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila., M.A. (1989): *A general model for fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and Systems, vol.29 pág.21-29

[14] Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H. (1984): *Measuring labor efficiency on Post Offices in the performance of public enterprises. Concepts and measurement*. Edited by Marchand, Pesiteau, and Tulkens. Amsterdam, North Holland, pág. 243-267.

[15] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1983): *The structure of technical efficiency*. Scandinavian Journal of Economics, vol.85, no.2 pág.181-190.

[16] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1994): *Production Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.

[17] Färe, R., Grosskopf, S., Russell, R.R. (1998): *Index Numbers: Essays in honour of Sten Malmquist*. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht.

[18] Färe, R., Lovell, A.K. (1978): *Measuring the technical efficiency of production*. Journal of Economic Theory, vol.19, no.1, pág.150-162

[19] Farrell, M.J. (1957): *The measurement of productivity efficiency*. Journal of Royal Satistical Society, Serie A, Part III, vol.120, pág.253-290.

[20] Farrell, M.J., Fieldhouse, M. (1962): *Estimating efficient production functions under increasing returns to scale*. Journal of the Royal Statistical Socienty, Serie A, Part 2, vol 125, pág.252-267.

[21] Fried, H., Lovell, C.A.K., Schmidt, S.S. (1993): *The Measurement of Productive Eficiency*. Oxford University Press, New York, USA. pág.161-194.

[22] Fullér, R., Zimmermann, H..J. (1992): *Approximate reasoning for solving fuzzy linear programming problems*. Proceedings of 2nd International Workshop on Current Issues in Fuzzy Technologies, University of Trento, Trento, May 28-30.

[23] Girod, O.A. (1996): *Measuring technical efficiency in a fuzzy environment*. Doctoral (Ph.D.) Dissertation, Virginia Tech, Departament of Industrial and Systems Engineering, Blaksburg, Virginia.

[24] Grosskopf, S. (1986): *The role of the reference technology in measuring productive efficiency*. The Economic Journal, vol.96, (June), pág.499-513.

[25] Grosskopf, S. (1993): *Efficiency and productivity*. In The Measurement of Productive Efficiency. edited by Harold Fried, C.A. Knox Lovell and Shelton S. Schmidt. Oxford Unversity Press, Oxford, New York. pág. 161-194

[26] Hu, C., Hung, T. (1996): *Literature review on fuzzy linear programming.* OR 605 Large Scale LP Project.

[27] Koopmmans, T.C., (1951): *An analysis of production as an efficient combination of activities.* In Activity Analysis of Produtction and Allocation, edited by T.C. Koopamns, Comission for Research in Economics, Monograph No. 13. New York: John Wiley and Sons, Inc.

[28] Lovell, K.A.C. (1993): *Production frontiers and productive efficiency.* In The Measurement of Productive Efficiency, edited by Harold O. Fried, C.A. Knox Lovell, Shelton S. Schmidt, New York, Oxford University Press, pág 1-67.

[29] Luhandjula, M.K. (1989): *Fuzzy optimization: an appraisal.* Fuzzy Sets and Systems, vol.30, pág.257-282.

[30] Ramík, J. Římánek, J. (1985): *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization.* Fuzzy Sets and Systems, vol.16, pág.123-138.

[31] Russell, R.R. (1985): *Measures of technical efficiency.* Journal of Economic Theory, vol. 35, pág.109-126.

[32] Russell, R.R. (1990): *Continuity of measures of technical efficiency.* Journal of Economic Theory, vol. 51, pág.255-267.

[33] Russell, R.R. (1998): *Distance functions in consumer and producer theory.* In: *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*, edited by Rolf Färe, Shawna Grosskopf and R. Robert Russell. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht.

[34] Sengupta, J. K. (1992): *Measuring efficiency by a fuzzy statistical approach.* Fuzzy Sets and Systems, vol.46, pág.73-80.

[35] Shephard, R.W. (1970): *Theory of cost production functions.* Princeton: Princeton University Press.

[36] Steering Commitee for the Review of Commonwealth/State Service Provison (1997): *Data Envelopment Analysis: A technique for measuring the efficiency of government service delivery. AGPS, Canberra, Australia.*

[37] Tanaka, H., Ichihashi, H., Asai, K. (1984): *A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparisons of fuzzy numbers.* Control and Cybernet, vol.13, pág.185-194.

[38] Triantis, K., Girod, O. (1998): *A Mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment.* Working Paper, to appear in Journal of Productivity Analysis in 1998.

[39] Triantis, K., Eeckaut, P.V. (1997): *Fuzzy pair-wise dominance and implications for technical performance assessment.* Center of Operations Research & Econometrics, Université Catholique de Louvain, Belgium. Paper under revision of Journal of Productivity Analysis.

[40] Tulkens, H. (1993): *Efficiency dominance analysis: a frontier free efficiency evaluation method.* Paper presented at the Third European Workshop on Efficiency and Productivity Measurement held at the Center for Operations Research and Econometrics (CORE),Univesité Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, October 21-23, 1993.

[41] Tulkens, H., Eeckaut P. V. (1995): *Non-parametric efficiency, progress and regress measures for panel data: methodological aspects.* European Journal of Operational Research, vol.80, pág.474-499.

[42] Ueda, T., Kamimura, T. (1998): *Data Envelopment Analysis based on triangular fuzzy numbers.* The Fourth Conference of the Association of Asian-Pacific Operational Research Society within IFORS, Melbourne, Austrália, 1998.

[43] Zieschang, K.D. (1983): *A note on the decomposition of cost efficiency into technical and allocative components.* Journal of Econometrics, vol.23, no.3, (December) pág.401-405.

[44] Zieschang, K.D. (1984): *An extended Farrell technical efficiency measure.* Journal of Economic Theory, vol.33, pág.387-396.

[45] Zimmermann, H.J. (1991) *Fuzzy sets theory and its applications.* 2nd Edition, Kluwer, Academic Press, Boston.