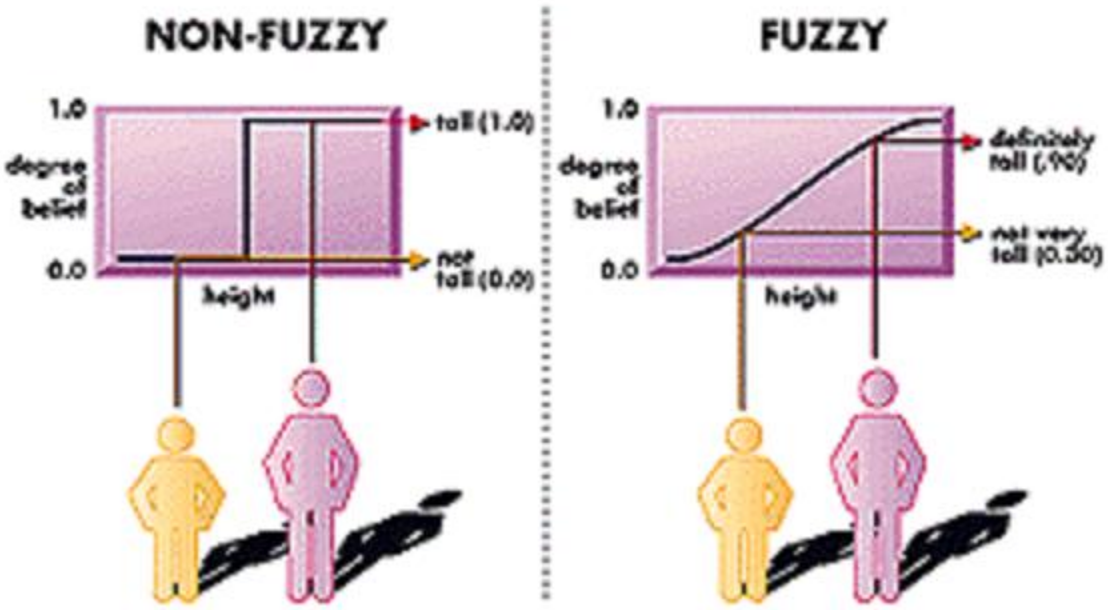
UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Introdução)

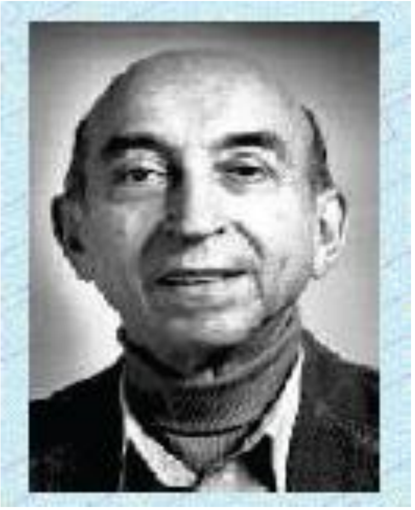
Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

No dia-a-dia, é comum utilizarmos informações imprecisas para tomar decisões.



http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol2/jp6/article2.html

"As complexity increases, precise statements lose meaning and meaningful statements lose precision. "



Professor Lofti Zadeh
University of California at Berkeley

"So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as they are certain, they do not refer to reality."

Albert Einstein

Informações imprecisas

Exemplos 1

- O sistema está **degradado**.
- O freio está **baixo**.
- A confiabilidade deste equipamento está **baixa**.
- Está **quente** aqui, aumente um pouco o ar condicionado.

- Ele tirou uma nota **muito baixa**, manda já para o castigo.

Informações imprecisas

Exemplos 2

- O carro está andando **muito rápido**, pise **forte** no freio.
- Esta sala é **pequena** para todos os alunos, reserve outra **maior**.
- Está **quente** aqui, aumente um **pouco** o ar condicionado.

- O conhecimento humano geralmente é ou incompleto, e/ou incerto e/ou impreciso.
- Incerteza pode ser tratada de várias formas entre elas com Lógica Difusa.

Informações imprecisas

Exemplos 3

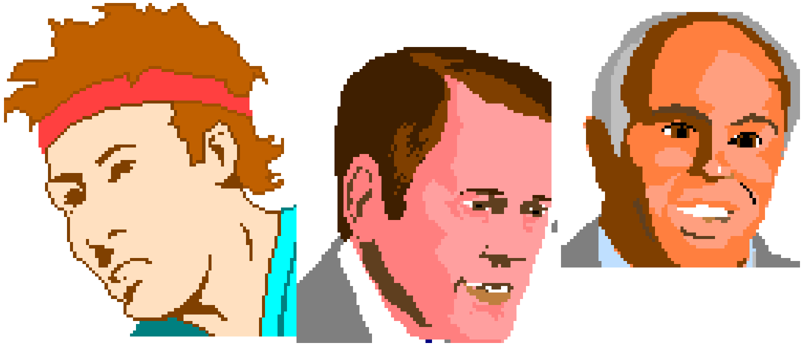
- Você vai assistir ao jogo do seu time?
  - talvez sim.
  - se não chover eu vou.
  - se o ingresso não for caro vou.
  - vou logo cedo.

Muitas das frases e estimativas humanas não são facilmente definidas através de formalismos matemáticos.

Informações imprecisas

Exemplos 4 - Paradoxo do careca

- Tirar um fio de cabelo de uma pessoa não a torna careca.
- Uma pessoa, inicialmente não-careca, se torna careca se tirarmos seus fios de cabelo um a um. Mas, em nenhuma das etapas ele se tornou careca.
- Logo, Ele se tornou careca sem se tornar careca.
- Este paradoxo desarma a lógica tradicional.



Pouco de história

- A lógica *fuzzy*, ou lógica multi valorada, foi introduzido na década de 1930 por Jan Lukasiewicz, um filósofo polonês. Enquanto a lógica clássica opera com apenas dois valores 1 (verdadeiro) e 0 (falso), Lukasiewicz introduziu uma lógica que ampliou a gama de valores verdade para todos os números reais no intervalo entre 0 e 1.

- Por exemplo, a possibilidade de que um homem de 181 cm de altura é muito alto pode ser ajustado para um valor igual a 0,86. É provável que o homem é alto. Isto leva a um raciocínio impreciso, muitas vezes chamada de teoria da possibilidade.

- Em 1965, Lotfi Zadeh, publicou seu famoso artigo "*Fuzzy Sets*" (conjuntos difusos). Zadeh estendeu o trabalho sobre a teoria da possibilidade em um sistema formal de lógica matemática, e introduziu um novo conceito para a aplicação de termos da linguagem natural. Esta nova lógica de representação e manipulação de termos difusos foi chamado de **lógica *fuzzy***.

Fuzzy sets

Lotfi A. Zadeh, The founder of fuzzy logic.

L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

O termo “lógica *fuzzy*”

- **Porque “fuzzy”?**

  Como Zadeh disse, o termo é concreto, imediato e descritivo, todos nós sabemos o que significa. No entanto, muitas pessoas sentem-se repelidas pela palavra difuso, porque geralmente é usada em sentido negativo.

- **Porque “lógica”?**

  Fuzziness recai na teoria dos conjuntos difusos e lógica *fuzzy* é apenas uma pequena parte da teoria.

  O termo lógica *fuzzy* é usado de duas formas:

  - **Sentido estrito**: A lógica *fuzzy* é um ramo da teoria dos conjuntos *fuzzy*, que lida (como sistemas lógicos o fazem) com a representação e inferência do conhecimento. A lógica *fuzzy*, ao contrário de outros sistemas lógicos, lida com o conhecimento impreciso ou incerto. Neste sentido restrito, e talvez correta, lógica *fuzzy* é apenas um dos ramos da teoria dos conjuntos *fuzzy*.
  - **Sentido amplo**: a lógica *fuzzy* como sinônimo de teoria dos conjuntos *fuzzy*.

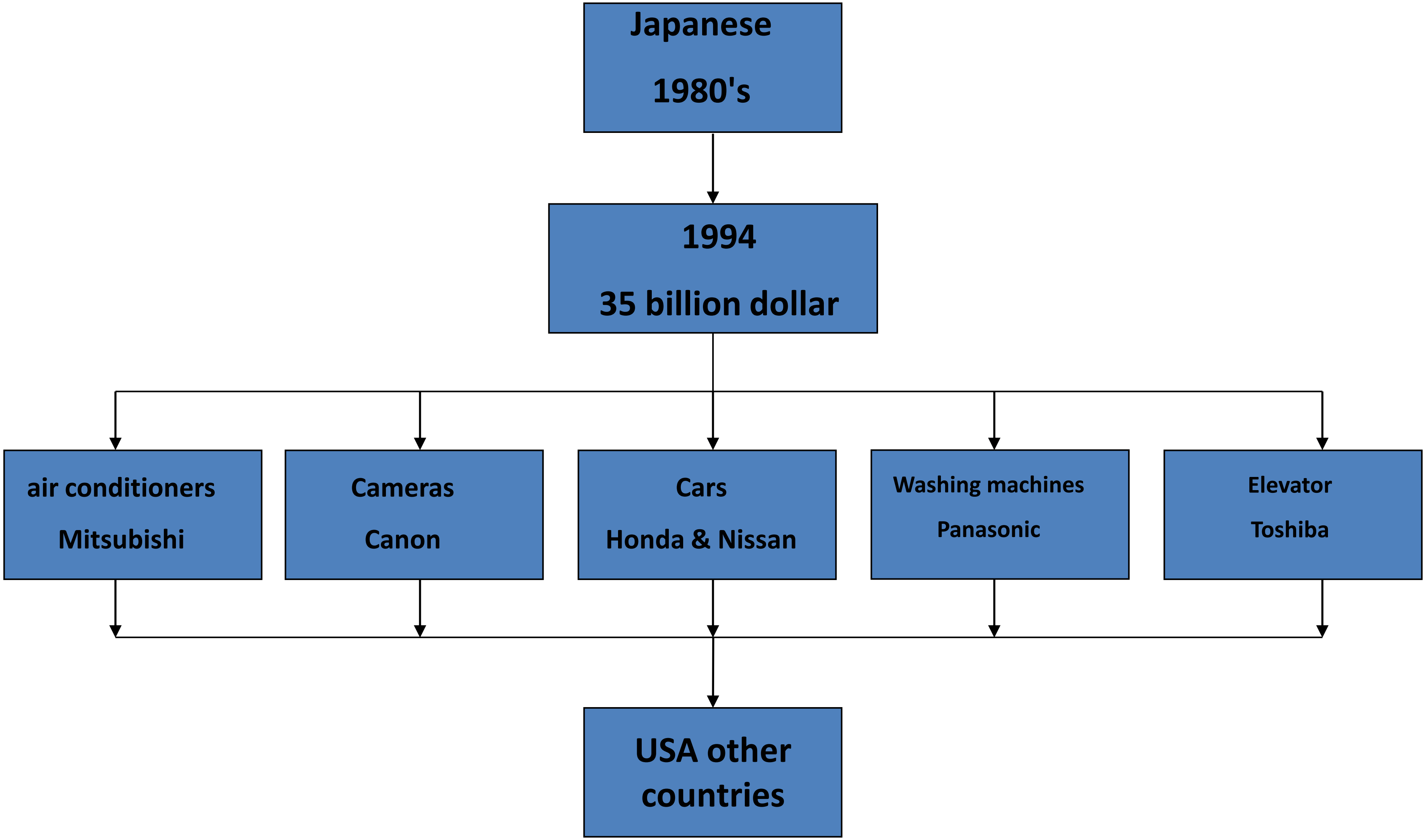
Aplicação *fuzzy*

Advertisement: …

- Extraklasse Washing Machine - 1200 rpm. The Extraklasse machine has a number of features which will make life easier for you.
- Fuzzy Logic detects the type and amount of laundry in the drum and allows only as much water to enter the machine as is really needed for the loaded amount. And less water will heat up quicker - which means less energy consumption.
- **Foam detection**
  Too much foam is compensated by an additional rinse cycle: If Fuzzy Logic detects the formation of too much foam in the rinsing spin cycle, it simply activates an additional rinse cycle. Fantastic!
- **Imbalance compensation**
  In the event of imbalance, Fuzzy Logic immediately calculates the maximum possible speed, sets this speed and starts spinning. This provides optimum utilization of the spinning time at full speed […]
- **Washing without wasting - with automatic water level adjustment**
- Fuzzy automatic water level adjustment adapts water and energy consumption to the individual requirements of each wash programme, depending on the amount of laundry and type of fabric […]

EXTRA KLASSE from Siemens

Aplicação *fuzzy*



INCERTEZA: aleatoriedade *versus* imprecisão

Exemplos 1

- Proposição: "o elemento x é membro do conjunto A"

- **aleatoriedade** : probabilidade de ocorrer o conjunto A

    - a proposição ou é V (certamente x pertence ao conjunto A) ou é F (certamente x não pertence ao conjunto A)

    - distinção precisa, não ambígua, entre ser membro ou não do conjunto A

INCERTEZA: aleatoriedade *versus* imprecisão

Exemplos 2

- Proposição: "o elemento x é membro do conjunto A"
- **imprecisão** : grau de pertinência ao conjunto fuzzy A
  - esta proposição NÃO necessariamente é V ou F
  - pode ser verdadeira somente com algum grau, o grau em que x é membro de A
  - A é um conjunto difuso se seus limites não são precisos. Assim, a pertinência a um conjunto difuso não é uma afirmação ou negação, mas uma intensidade de pertinência.

INCERTEZA: aleatoriedade *versus* imprecisão

Exemplos 3

Fuzzy sets theory complements probability theory

Ex1 Walking in the desert, close to being dehydrated, you find two bottles of water: The first contains deadly poison with a probability of 0.1, The second has a 0.9 membership value in The Fuzzy Set “Safe drinks”

Which one will you choose to drink from???

Ex2 Patients suffering from hepatitis show in 60% of all cases high fever, in 45% of all cases a yellowish colored skin, and in 30% of all cases nausea.

INCERTEZA: aleatoriedade *versus* imprecisão

Exemplos 4

Suppose you are a basketball recruiter and are looking for a "very tall" player for the center position on a men's team. One of your information sources tells you that a hot prospect in Oregon has a 95% chance of being over 7 feet tall. Another of your sources tells you that a good player in Louisiana has a high membership in the set of "very tall" people. The problem with the information from the first source is that it is a probabilistic quantity. There is a 5% chance that the Oregon player is not over 7 feet tall and could, conceivably, be someone of extremely short stature. The second source of information would, in this case, contain a different kind of uncertainty for the recruiter; it is a fuzziness due to the linguistic qualifier "very tall" because if the player turned out to be less than 7 feet tall there is still a high likelihood that he would be quite tall.

INCERTEZA: aleatoriedade *versus* imprecisão

Exemplos 5

*Tenta explicar como certos **eventos ocorrem em um certo espaço randômico** ➔ explica **populações** e **não instâncias individuais***

🡻

Antes de selecionar** um elemento de uma certa população sabe-se as **chances do evento ocorrer

🡻

*Após selecionar o elemento, **NÃO** existe mais **probabilidade***

*Descreve propriedades que têm valores contínuos, associando **as partições** desses valores com um **label semântico***

🡻

Importante:** as partições podem coincidir (**overlap**) ➔ **Ambigüidade

Grau de Pertinência ➔ É o nível de compatibilidade de um elemento do conjunto com o conceito do conjunto

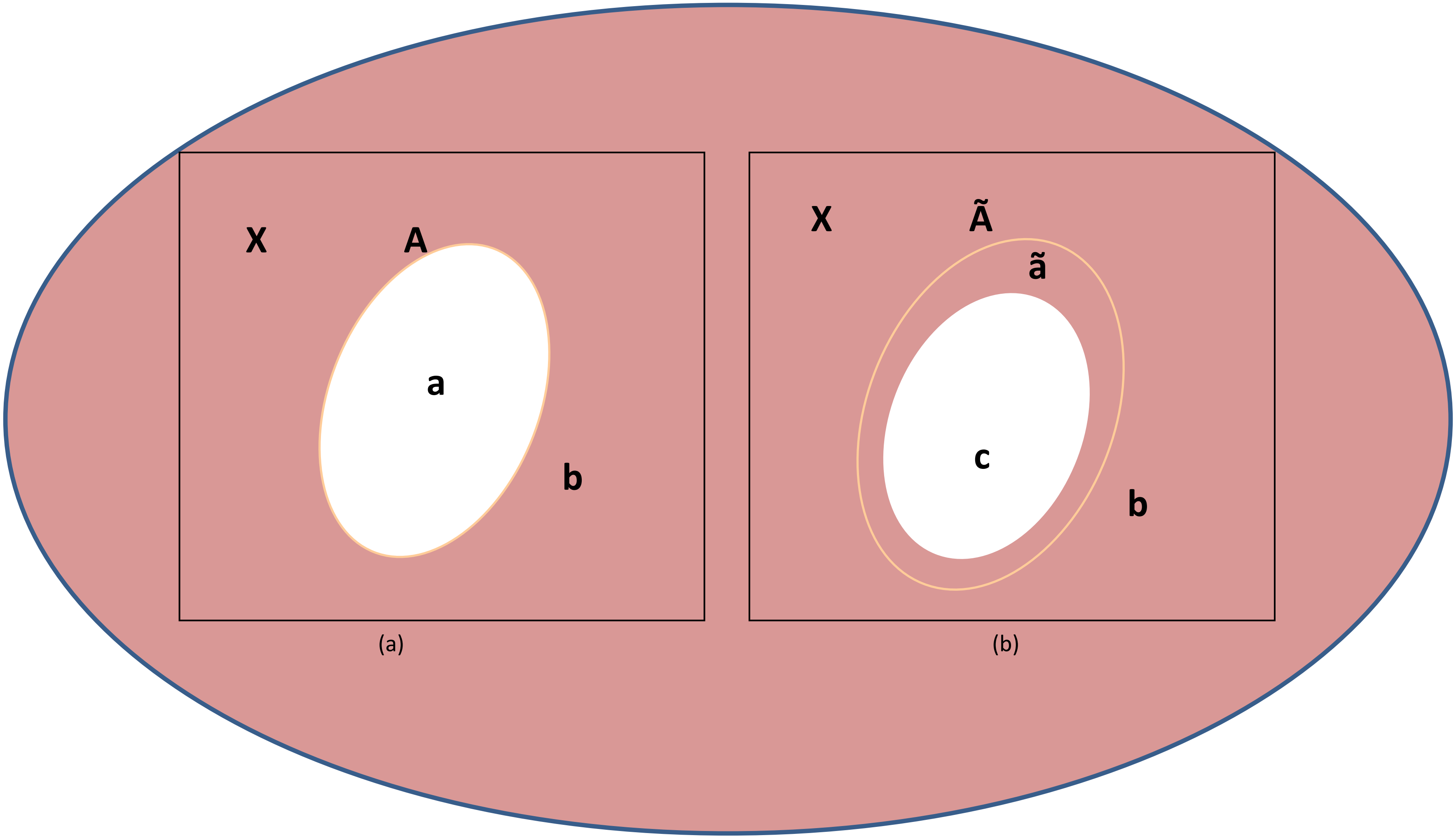
Ex: ❶ Pedro é ALTO com μ=0.85

*Indica que Pedro **é bem compatível** com o conceito **ALTO**.*
➔ Tem-se uma idéia da altura de Pedro.

❷ Pedro tem 0.85 de probabilidade de ser ALTO

*Indica que Pedro **tem grandes chances** de ser **ALTO**.*
➔ NÃO se tem a menor idéia da altura de Pedro.

Conjunto crisp e conjunto difuso



Entendendo o princípio da teoria dos conjuntos difusos (1/4)

Curiosidade do Cotidiano:

Diálogo entre Artur e Rodrigo para decidir “O quão rápido é um carro rápido”

continua...

Entendendo o princípio da teoria dos conjuntos difusos (2/4)

... continuação

Artur: ... então podemos criar uma categoria para carros rápidos
$u_{RÁPIDO}[x] = \{velocidade(x), velocidade(x) \geq 100\};$

Rodrigo: ... e um carro a 99,5 km/h não é rápido?

Artur: ... vamos diminuir o limite para 99, combinado?

Rodrigo: ... ainda não. E 98,5?

Artur: Temos que parar em algum ponto !

Rodrigo: Porque?

Artur: ... concordar em algum ponto onde os carros não estão rápidos.

continua...

Entendendo o princípio da teoria dos conjuntos difusos (3/4)

... continuação

Rodrigo: É verdade. Então vamos dizer que carros abaixo de 35 km/h não são rápidos.

Artur: ... concluímos que

$u_{RÁPIDO}[x]$ = {velocidade(x), velocidade(x)≥35 e velocidade(x)≥100}.

Não, não podemos ter dois limites para rápido. Então

$u_{RÁPIDO}[x]$={velocidade(x),velocidade(x)≥35}.

Rodrigo: Não! Carros a 35 km/k são lentos para serem considerados rápidos.

Artur: Sem problemas. 35 será o mínimo para ser considerado rápido - não em todos os casos, e ...

continua...

Entendendo o princípio da teoria dos conjuntos difusos (4/4)

... continuação

Artur: ... 100 será a velocidade que <u>nós dois</u> consideramos ser rápido. Qualquer valor entre eles terá o seu grau de rapidez.

- Esta variação de grau de rapidez significa que alguns carros estarão mais fortemente associados com a categoria rápido do que outros;
- Este grau pode assumir qualquer valor em um determinado intervalo, não ficando restrito apenas a PERTENCER ou NÃO PERTENCER ao conjunto;
- Finalmente Artur e Rodrigo conseguiram entender o princípio da teoria dos conjuntos difusos.

Conjuntos clássicos × conjuntos difusos

Conjuntos clássicos - crisp

- limites precisos
- pertence ou não pertence
- a transição de pertencer a não pertencer é brusca

Conjuntos difusos

- limites imprecisos
- grau de pertinência
- expressam a transição gradual de pertencer a não pertencer
- representam conceitos vagos expressos em linguagem natural

Conjuntos crisp × conjuntos difusos

- Definição de um conjunto **crisp A**:
  - lista de seus membros: $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$
  - propriedade P satisfeita pelos seus membros: $A=\{x|P(x)\}$
  - função característica χ_A , declara que elementos do conjunto universal X são membros de A:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x \in A \\ 0, & x \notin A\end{cases}$$

$$\chi_A(x): X \to \{0,1\}$$

Conjuntos crisp × conjuntos difusos

- Definição de um conjunto **difuso A**:

  Seja X um conjunto (o nosso conjunto universo).

  O conjunto difuso A será representado pela função de pertinência,

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$$

O que são conjuntos difusos?

- Graus de pertinência (*membership degree*)
- Conjunto clássico - crisp

$\mu_A(x) = 1$ sse $x \in A$

$\mu_A(x) = 0$ sse $x \notin A$

- Conjunto difuso

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x): X \rightarrow [0,1]\}$

onde:

A é o conjunto difuso, $\mu_A(x)$ é a função de pertinência, X é o universo de discurso.

Então:

- Universo de discurso é o conjunto de elementos que <u>podem</u> pertencer ao conjunto difuso

- Graus de pertinência são os valores que representam quanto cada elemento do universo de discurso pertence ao conjunto difuso

Notações

$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$

$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_n)/x_n\}$

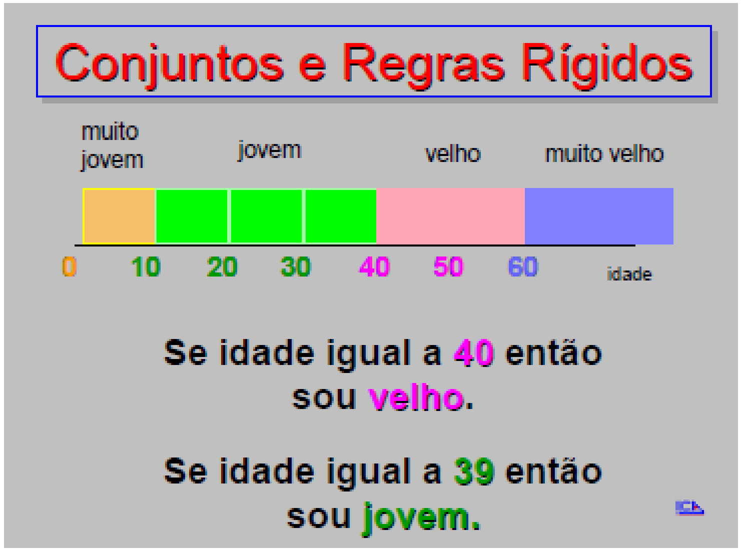
$$A = \sum_{x \in U} \mu_A(x) / x$$

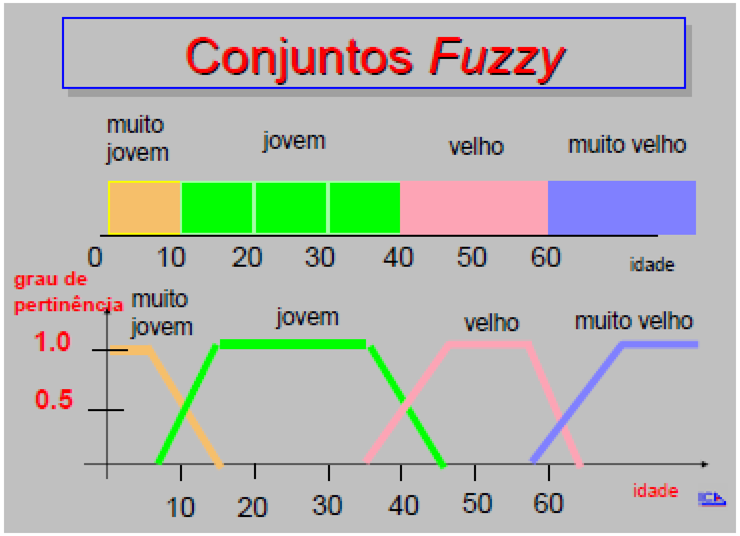
$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in U\}$

$$A = \int_U \mu_A(x) / x$$

Exemplo conjunto difuso

Exemplo 1

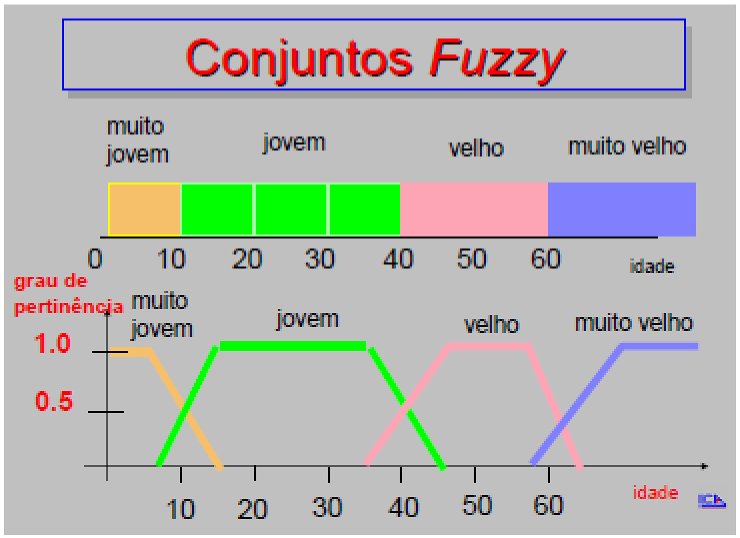


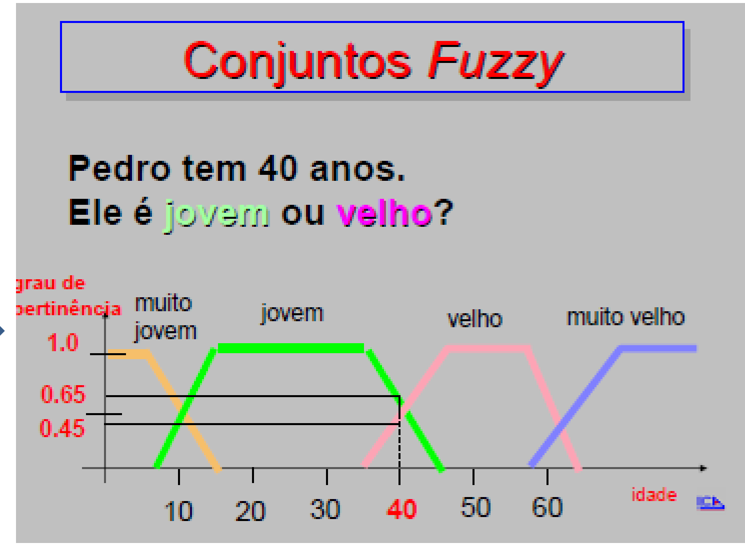


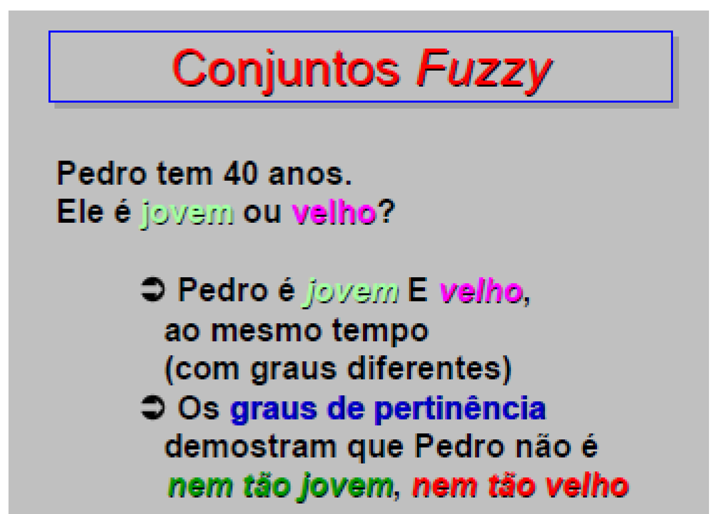
continua...

Exemplo conjunto difuso

Exemplo 1 ... continuação





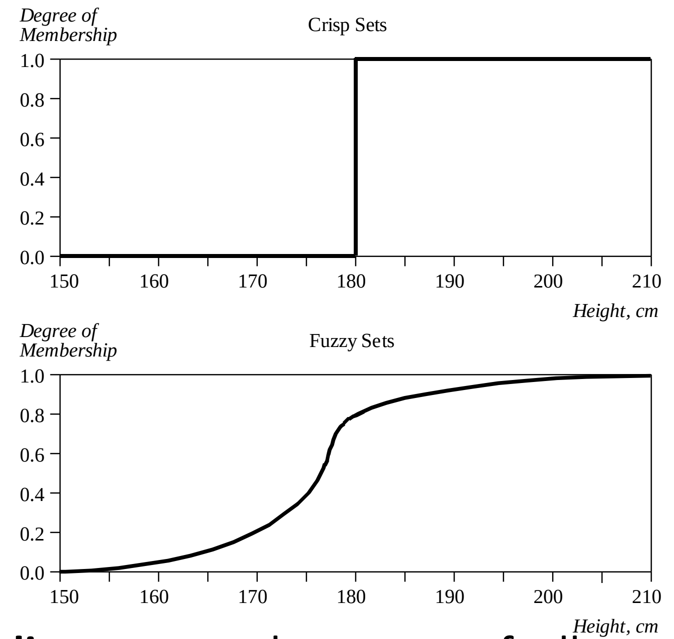


Exemplo conjunto difuso

Exemplo 2

- The classical example in fuzzy sets is tall men. The elements of the fuzzy set "tall men" are all men, but their degrees of membership depend on their height.

Name	Height, cm	Degree of Membership	
		Crisp	*Fuzzy*
Chris	208	1	1.00
Mark	205	1	1.00
John	198	1	0.98
Tom	181	1	0.82
David	179	0	0.78
Mike	172	0	0.24
Bob	167	0	0.15
Steven	158	0	0.06
Bill	155	0	0.01
Peter	152	0	0.00



- The x-axis represents the **universe of discourse** – the range of all possible values applicable to a chosen variable. In our case, the variable is the man height. According to this representa-tion, the universe of men's heights consists of all tall men.
- The y-axis represents the **membership value of the fuzzy set**. In our case, the fuzzy set of "tall men" maps height values into corresponding membership values.

Exemplo conjunto difuso

Exemplo 3

Seja o conjunto universo
U ={5,10,20,30,40,50,60,70,80}
e consideremos os seguintes conjuntos difusos:
A={crianças},
B={jovens},
C={adultos}, e
D={velhos}
para os quais atribuímos os graus de pertinência dos elementos do conjunto **U** na seguinte tabela

IDADE	Criança	Jovem	Adulto	Velho
5	0,8	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0,8	0,8	0,1
30	0	0,5	1	0,2
40	0	0,2	1	0,4
50	0	0,1	1	0,6
60	0	0	1	0,8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

http://www.pucsp.br/~logica/Fuzzy.htm

Exemplo conjunto difuso

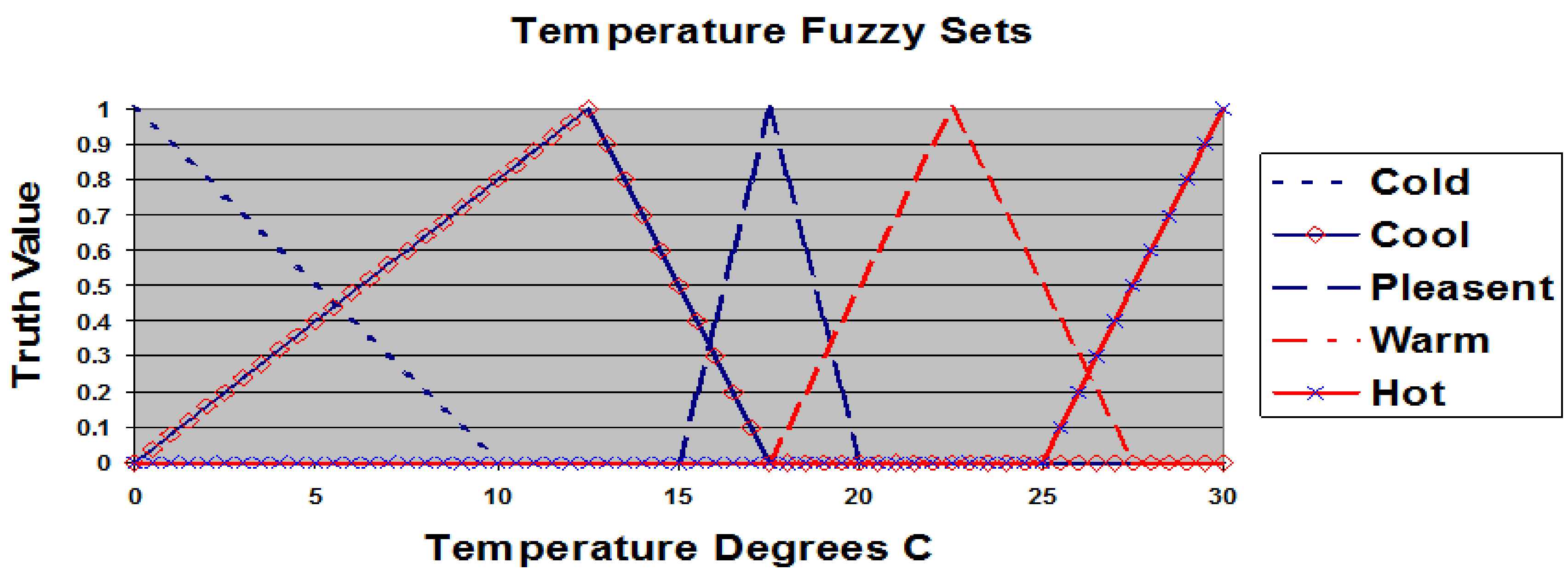
Exemplo 4

- The analytically expressed membership for the reference fuzzy subsets for the **temperature** are:

  - COLD: for $0 \le t \le 10$ $\mu_{COLD}(t) = -t / 10 + 1$

  - COOL: $\begin{cases} \text{for } 0 \le t \le 12{,}5 & \mu_{COOL}(t) = t / 12{,}5 \\ \text{for } 12{,}5 \le t \le 17{,}5 & \mu_{COOL}(t) = -t / 5 + 3{,}5 \end{cases}$

- etc… all based on the linear equation: $y = ax + b$



Exemplo conjunto difuso

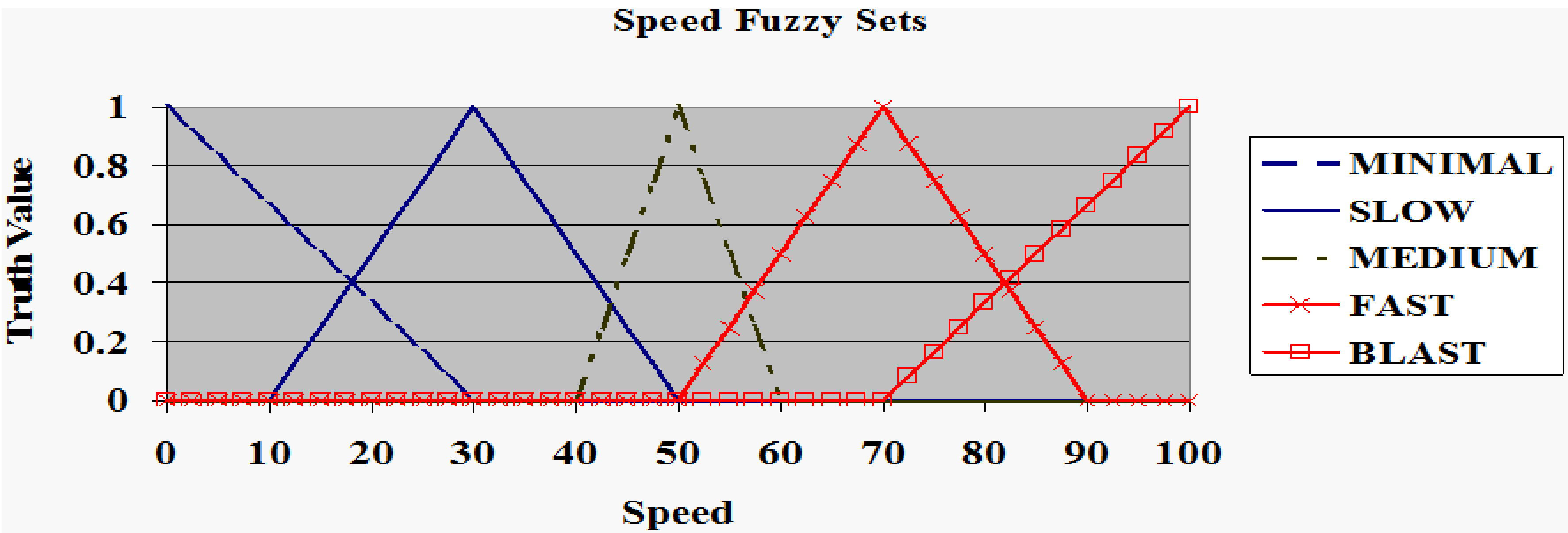
Exemplo 5

- The analytically expressed membership for the reference fuzzy subsets for the **speed** are:

  - MINIMAL: for $0 \le v \le 30$ $\mu_{MINIMAL}(v) = -v / 30 + 1$

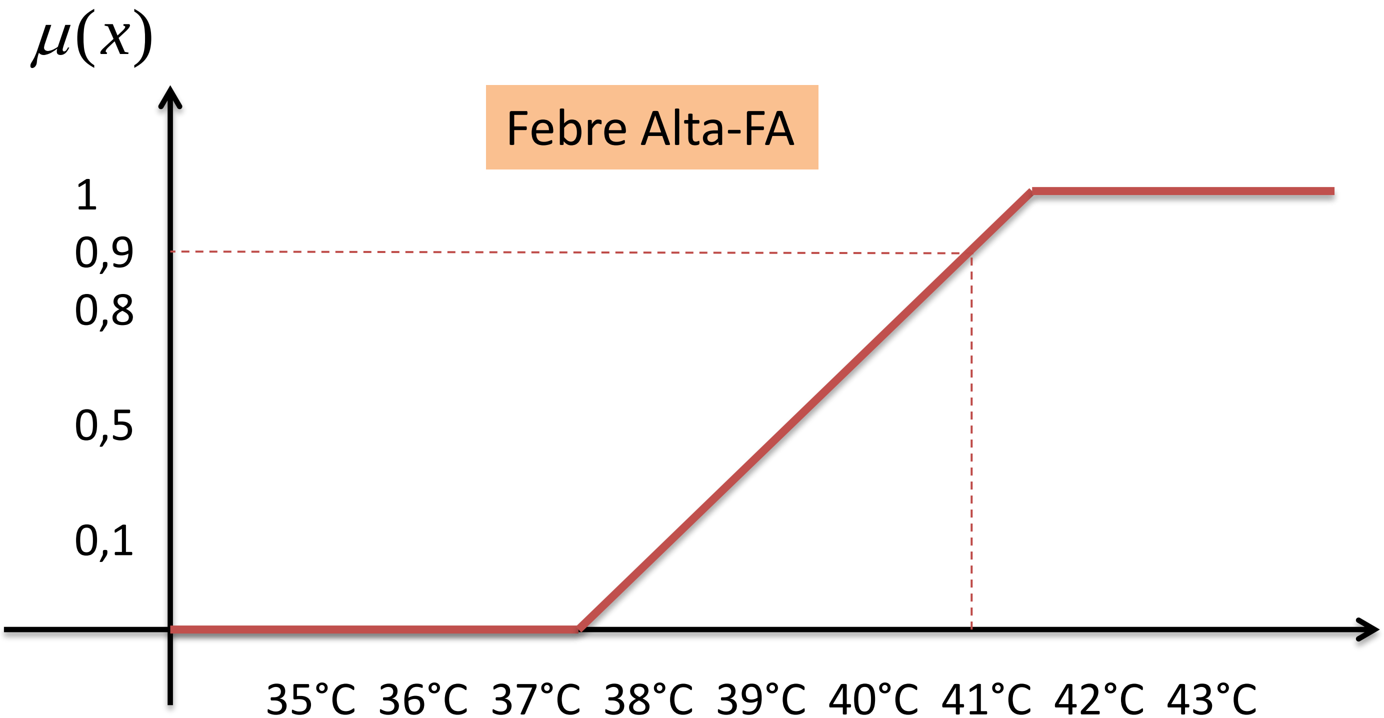
  - SLOW: for $10 \le v \le 30$ $\mu_{SLOW}(v) = v / 20 - 0{,}5$
    for $30 \le v \le 50$ $\mu_{SLOW}(v) = -v / 20 + 2{,}5$

- etc... all based on the linear equation: $y = ax + b$



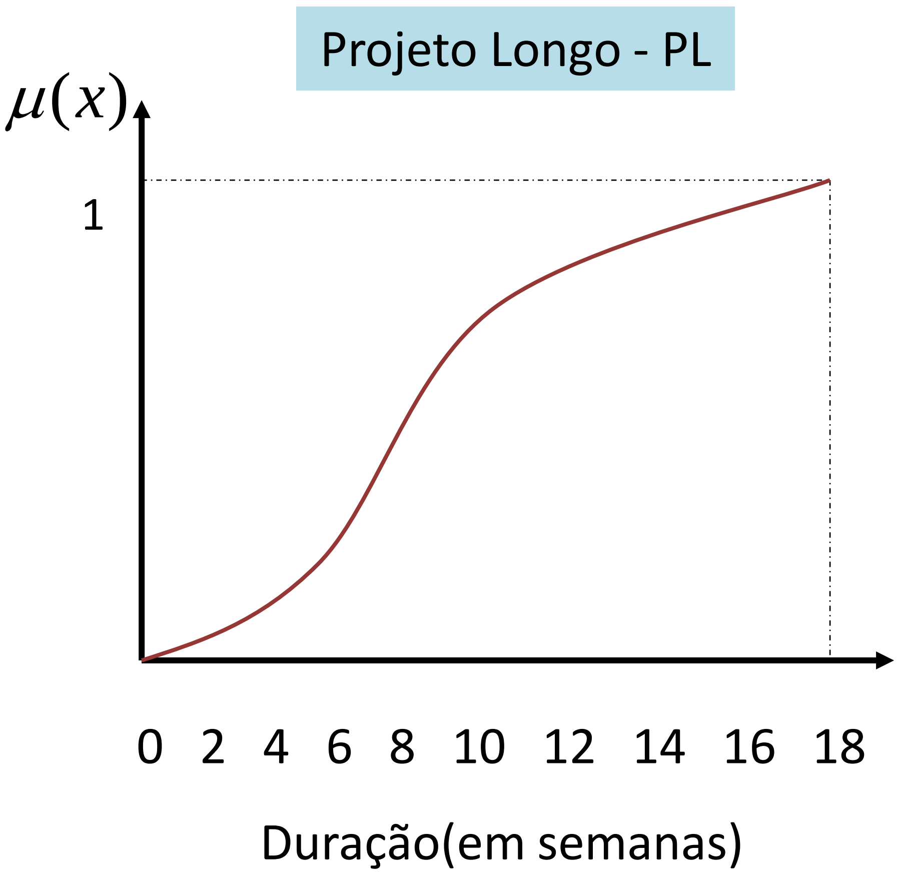
Exemplo conjunto difuso

Exemplo 6



Exemplo conjunto difuso

Exemplo 7



Exemplo conjunto difuso

Exemplo 8

Febre Alta - FA

$\mu_{FA}(35°C) = 0$	$\mu_{FA}(38°C) = 0{,}1$	$\mu_{FA}(41°C) = 0{,}9$
$\mu_{FA}(36°C) = 0$	$\mu_{FA}(39°C) = 0{,}35$	$\mu_{FA}(42°C) = 1$
$\mu_{FA}(37°C) = 0$	$\mu_{FA}(40°C) = 0{,}65$	$\mu_{FA}(43°C) = 1$

$FA = 0/35 + \ldots + 0{,}1/38 + 0{,}35/39 + \ldots + 0{,}9/41 + \ldots + 1/43$

Exemplo conjunto difuso

Exemplo 9

Um Projeto Longo - PL

$\mu_{PL}(18) = 1,0$

$\mu_{PL}(2) = 0,2$

$\mu_{PL}(4) = 0,3$

$\mu_{PL}(6) = 0,4$

$\mu_{PL}(8) = 0,5$

$\mu_{PL}(10) = 0,6$

$\mu_{PL}(12) = 0,7$

$\mu_{PL}(14) = 0,8$

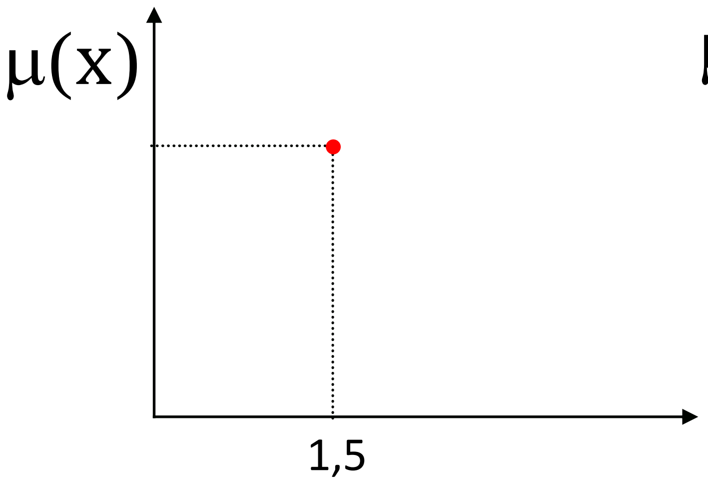
$\mu_{PL}(16) = 0,9$

PL =0,2/2+...+0,5/8+...+1/18

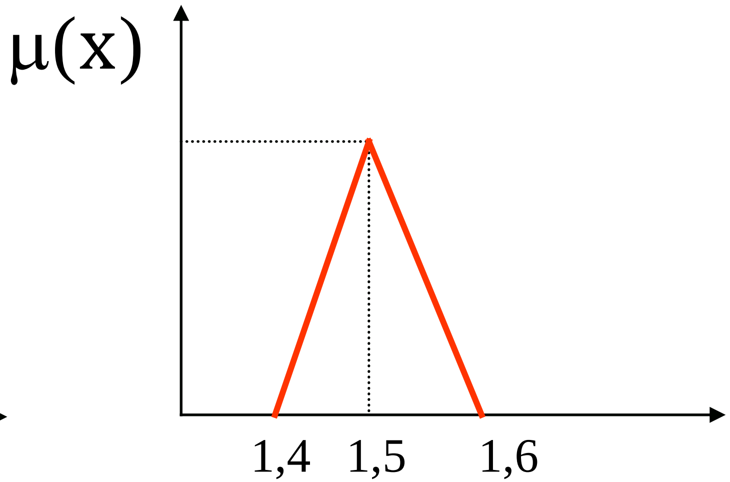
Exemplo conjunto difuso

Exemplo 10

A = {número real **crisp**}



A = {aproximadamente **a**} (**difuso**)

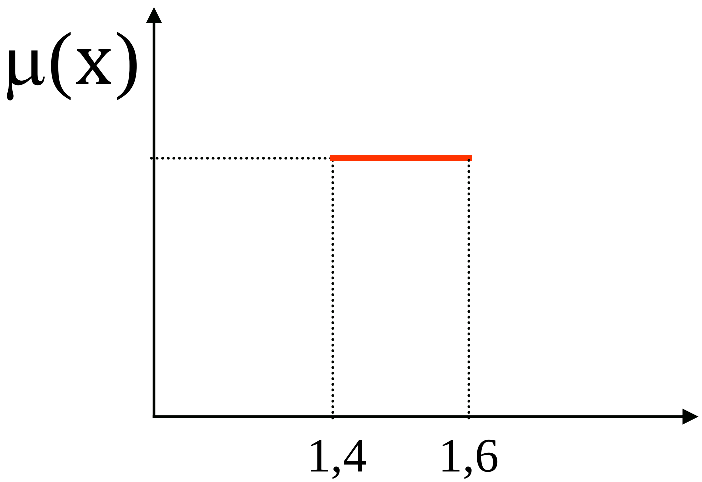


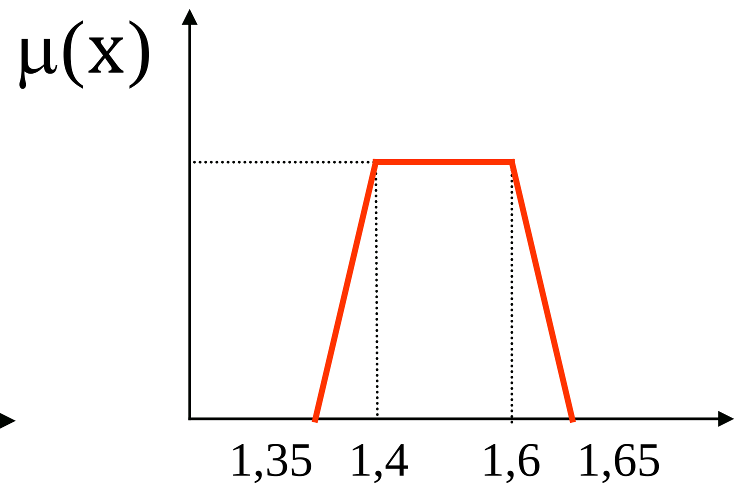
Exemplo conjunto difuso

Exemplo 11

A = {número real **crisp**}

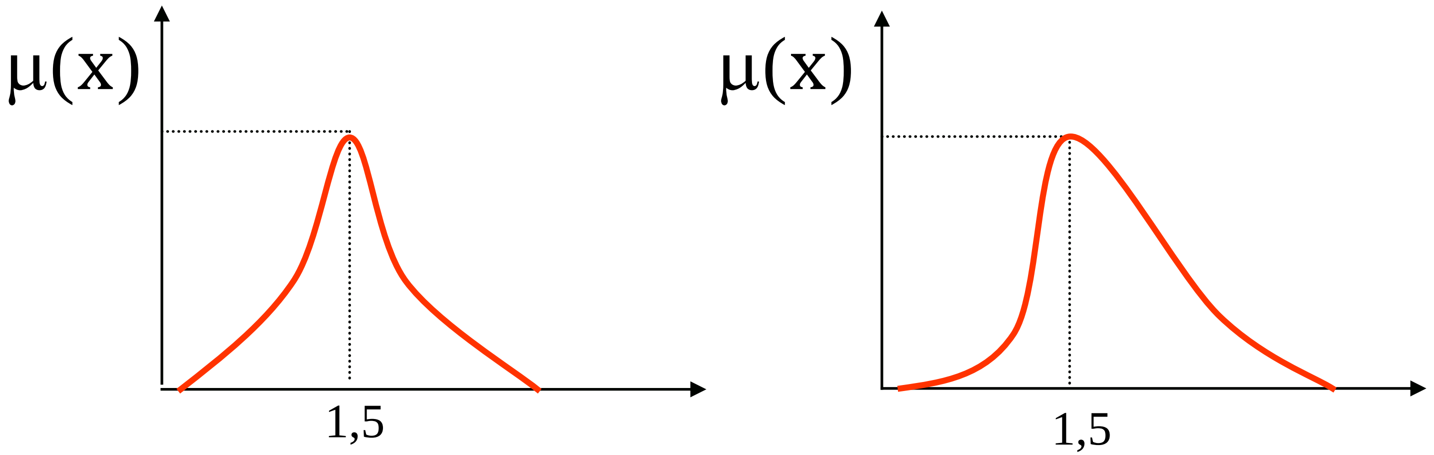
A = {aproximadamente **a**} (**difuso**)





Exemplo conjunto difuso

Exemplo 12



Ou seja: conjuntos difusos ...

- São funções que mapeiam o elemento que poderia ser um membro do conjunto para um número entre 0 e 1.
- O grau de pertinência 0 indica que o elemento não pertence ao conjunto.
- O grau 1 indica que o elemento está completamente no conjunto.

A *"Fuzzy Sets Theory" ou em português, Teoria dos Conjuntos Difusos, é uma ferramenta matemática que subsidia a modelagem de problemas reais onde incertezas e imprecisões estão presentes.*

Exercícios

1. Explique a diferença entre aleatoriedade e um ambiente difuso.

2. Encontre exemplos de variáveis difusas usadas no dia-a-dia.

3. Descreva o conceito de conjunto difuso usando as próprias palavras.

4. Explique porque da necessidade da teoria dos conjuntos difusos.

5. Procure na literatura exemplos de 10 conjuntos difusos.

6. A questão de saber se um copo de água está meio cheio ou meio vazio é uma questão filosófica antiga. Tais descrições do volume de líquido em um vidro depende do estado de espírito da pessoa que fez a pergunta. Desenvolva funções de pertinência para os conjuntos fuzzy "meio cheio", "completo", "vazio", e "meio vazio" que utilizam a percenteagem do volume como o elemento de informação. Assuma que o volume máximo de água no copo é V_0. Discutir se os termos meio cheio e meio vazio deve ter funções de pertinência idênticos. A sua resposta resolver este enigma sem idade?