



TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Variáveis Linguísticas)

**Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil**

Introdução

- Técnicas convencionais de análise de sistemas são inadequadas para lidar com sistemas baseados no julgamento humano percepção & emoção
- Princípio de incompatibilidade
 - Com o aumento da complexidade de um sistema aumenta, a nossa capacidade de fazer afirmações precisas & ainda significativas sobre seu comportamento diminui até um limiar
 - além desse limiar, precisão & significado se tornar características quase mutuamente exclusivas [Zadeh, 1973]

Variáveis linguísticas

- Zadeh definiu variáveis linguísticas como “variáveis cujos valores são palavras ou sentenças em linguagem natural ou artificial”.
- Variáveis linguísticas são variáveis cujos valores são palavras em linguagem natural representadas por conjuntos difusos.
- As variáveis linguísticas assumem valores chamados termos linguísticos
- Por exemplo, para a variável linguística **idade** as alternativas linguísticas poderiam ser : [**jovem, idoso, bem jovem, ...**].
- Os valores numéricos podem assumir: [1,2,3,4,5,...,120].
- Uma área de aplicação particularmente importante das variáveis linguísticas é a do raciocínio que não é "quase muito preciso" e "não muito impreciso" , chamado **raciocínio aproximado**.

Utilidade das variáveis linguísticas

- Na raiz da teoria dos conjuntos fuzzy reside a idéia de variáveis linguísticas.
- **Uma variável linguística é uma variável difusa.** Por exemplo, a afirmação "João é alto" implica que a variável linguística João assume o valor linguístico de altura.
- Em sistemas especialistas difusos, variáveis linguísticas são usadas em regras fuzzy. Por exemplo:

SE o vento é forte, **ENTÃO** a vela é boa

SE a duração_do_projeto é de longo **ENTÃO** risco_de_conclusão é alta

SE a velocidade é lenta, **ENTÃO** a distância_de_parada é curta

Variáveis linguísticas – exemplo

- Uma variável numérica assume valores numéricos.

Idade = 65 anos

- Uma variável linguística assume valores linguísticos.

Idade é jovem

- Um valor linguístico é um conjunto difuso, e tem um significado.
- Por exemplo

Idade = {jovem, não jovem, muito jovem, ...

meia idade, não meia idade, ...

idoso, não idoso, muito idoso, mais ou menos idoso, ...

não muito jovem e não muito idoso, ...}

Notação

$(X, T(X), U, M)$

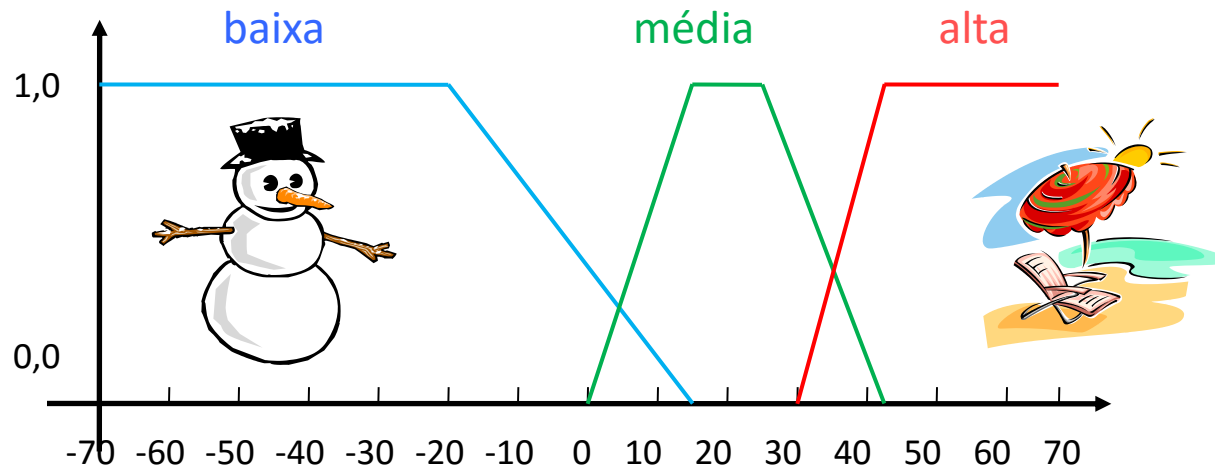
onde

- X é o nome do conjunto de termos
- $T(X)$ os termos linguísticos
- U o universo de discurso
- M é o significado dos termos linguísticos, representado através de conjuntos difusos

Exemplo de variável difusa (linguística)

Exemplo 1

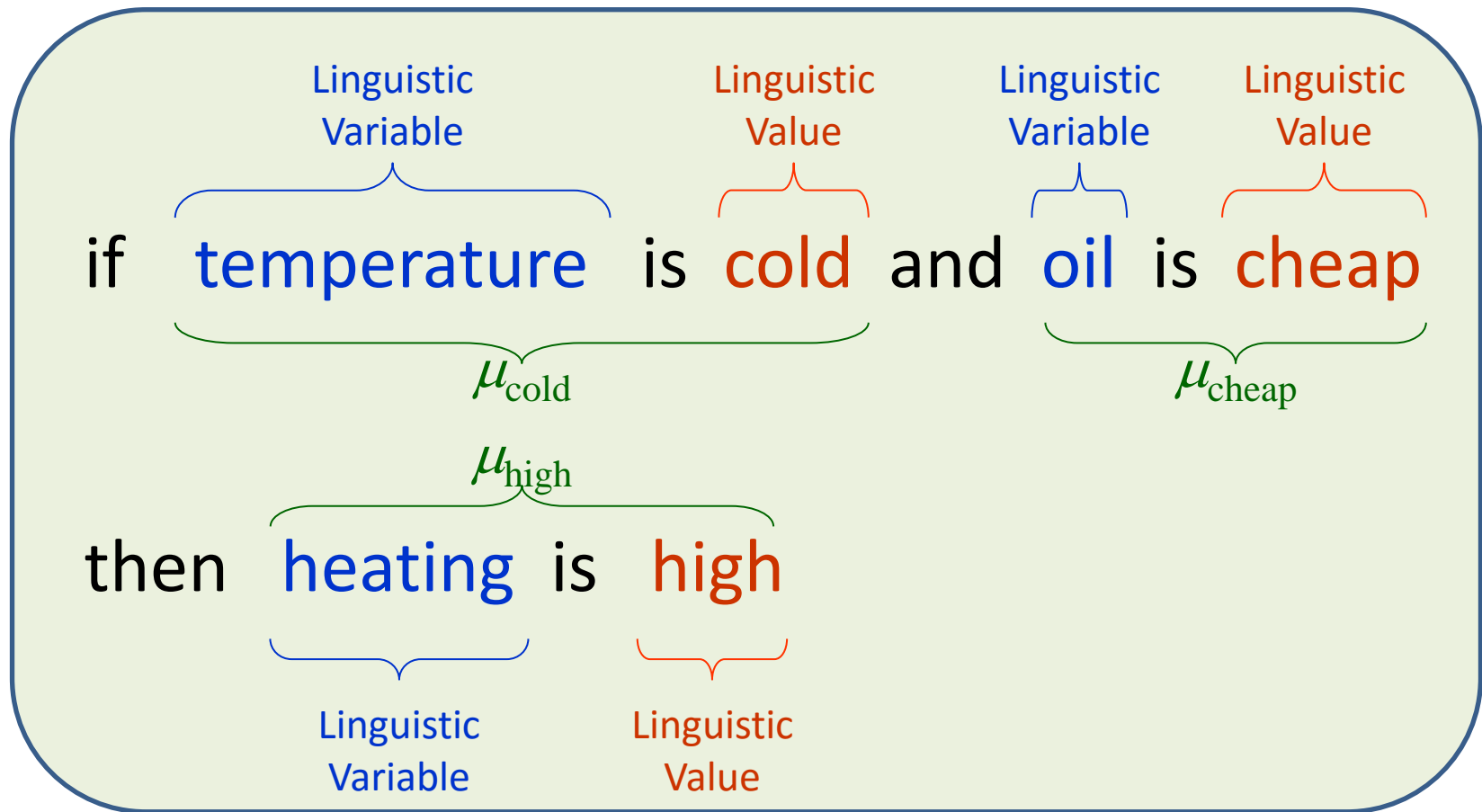
- $X = \text{temperatura}$
- $T(X) = \{\text{baixa, média, alta}\}$
- $U = \{x \in X \mid -70^\circ \leq x \leq +70^\circ\}$
- M



Exemplo de variável difusa (linguística)

Exemplo 2

if temperature is cold and oil is cheap then heating is high



Variáveis linguísticas - generalidades

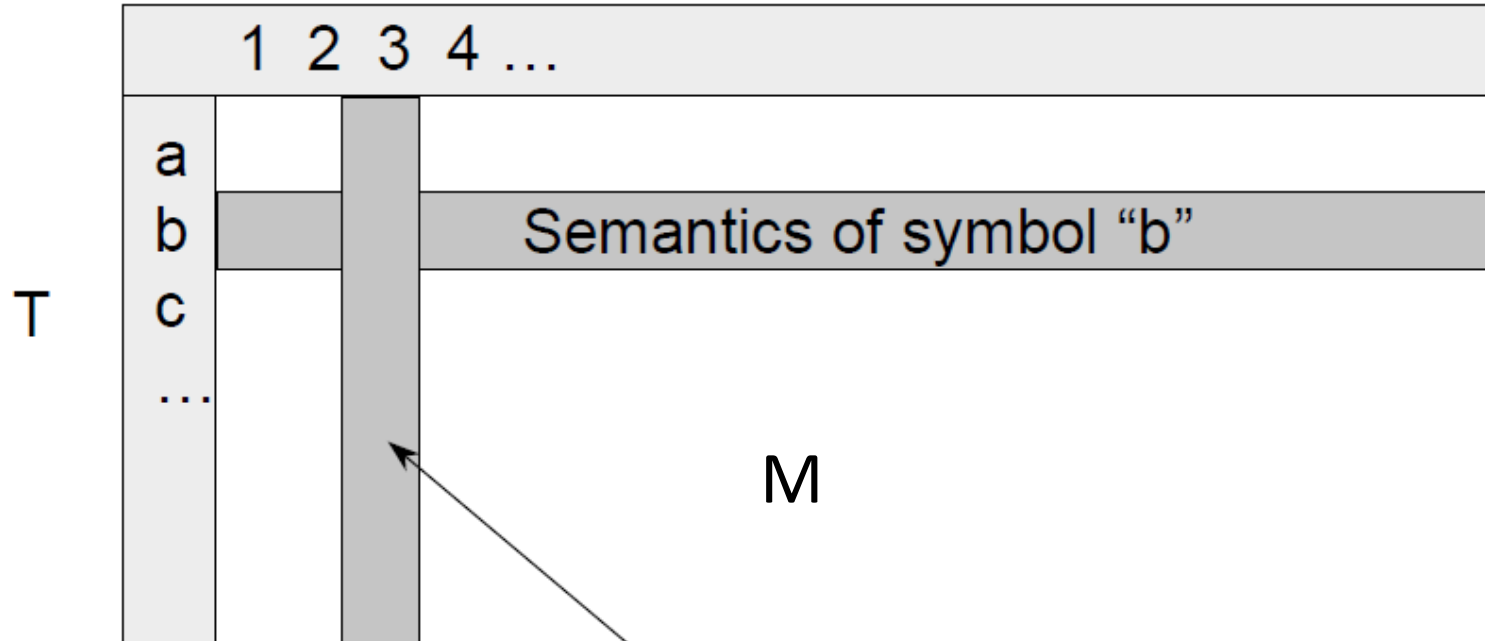
- Variáveis linguísticas podem também conter modificadores (também linguísticos) que alteram seu valor.
- Exemplos de modificadores válidos são: *muito, pouco, não muito, mais ou menos*.
- Existem também conectivos que podem ser aplicados a estas variáveis: "e" e "ou".
- Por exemplo, um valor válido para a variável linguística *altura* seria *não muito alto* e *não muito baixo* .
- Os modificadores linguísticos podem ser definidos matematicamente, como no exemplo dos conjuntos, *baixo* e *muito baixo* , onde o modificador *muito* é caracterizado por elevar cada ponto da função de pertinência à segunda potência.
- Os conectivos *and(e)* e *or(ou)* são equivalentes à operações de *união* e *interseção* de conjuntos, podendo dar origem a conjuntos complexamente definidos, porém representados linguisticamente de maneira simples.

Language (Zadeh 71)

A language is a fuzzy mapping $U \times T \Rightarrow [0,1]$

$(X, T(X), U, M)$

U



Descriptor of element "3"

Linguistic Terms (Termset)

Label	Symbol	Universe of Discourse								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Very Low	Ver_L	1	0.64	0.09	0.01	0	0	0	0	0
Low	L	1	0.80	0.30	0.10	0	0	0	0	0
More or less Low	Mor_L	1	0.89	0.55	0.32	0	0	0	0	0
Above Low	>L	0	0.20	0.70	0.90	1	1	1	1	1
Below Medium	<M	1	1.00	0.90	0.25	0	0	0	0	0
Above Low and Below Medium		0	0.20	0.70	0.25	0	0	0	0	0
Between Medium and High	L-M	0	0.29	1	0.36	0	0	0	0	0
Medium	M	0	0	0.10	0.75	1	0.75	0.10	0	0
Above Medium	>M	0	0	0	0	0	0.25	0.90	1	1
Below High	<H	1	1	1	1	1	0.90	0.70	0.20	0
Above Medium and Below High		0	0	0	0	0	0.25	0.70	0.20	0
Between Medium and High	M-H	0	0	0	0	0	0.36	1	0.29	0
More or less High	Mor_H	0	0	0	0	0	0.32	0.55	0.89	1
High	H	0	0	0	0	0	0.10	0.30	0.80	1
Very High	Ver_H	0	0	0	0	0	0.01	0.09	0.64	1

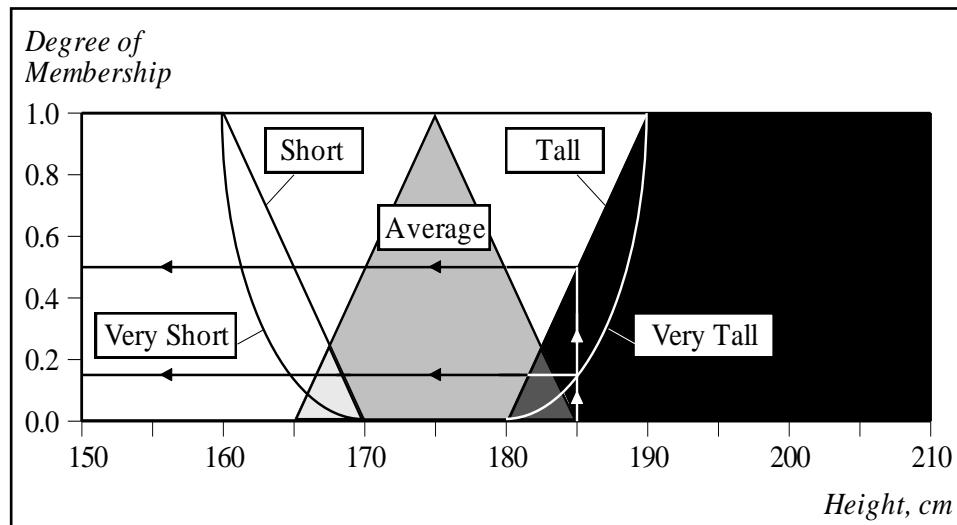
Hedges
Modificadores

Qualificadores (*hedges*)

- Mesmo papel que advérbios
- Modifica o gráfico da função de pertinência do conjunto difuso.
- É uma função, assim como um conjunto difuso
- Aumenta significativamente o nosso poder descritivo.

Variável linguística e *hedges*

- A gama de possíveis valores de uma variável linguística representa o universo do discurso dessa variável. Por exemplo, o universo de discurso da variável linguística velocidade pode ter a faixa entre 0 e 220 km / h e podem incluir subconjuntos difusos como *muito lento*, *lento*, *médio*, *rápido* e *muito rápido*.
- Uma variável linguística traz consigo o conceito de qualificadores de conjuntos difusos, chamado **hedge**.
- **Hedges** são termos que modificam a forma de conjuntos fuzzy. Eles incluem advérbios como *muito*, *ligeiramente*, *bastante*, *mais ou menos*, e *ligeiramente*.



Semantics for Hedges and Connectors

Defined Sampled Membership Functions

<i>X and Y</i>	⇒ $\min \{X, Y\}$
<i>X or Y</i>	⇒ $\max \{X, Y\}$
<i>not X</i>	⇒ $1 - X$
<i>very X</i>	⇒ $\text{CONTR}(X) = X^2$
<i>extremely X</i>	⇒ $\text{CONTR}(\text{CONTR}(X)) = X^4$
<i>more or less X</i>	⇒ $\text{DIL}(X) = X^{0.5}$
<i>indeed X</i>	⇒ $\text{INT}(X)$
<i>hardly X</i>	⇒ $\text{FUZ}(X)$
<i>younger than X</i>	⇒ $\text{SM}(X)$
<i>older than X</i>	⇒ $\text{GR}(X)$
<i>in between (X)(Y)</i>	⇒ $\text{NORM}\{\text{GR}(X) \text{ and } \text{SM}(Y)\}$
	⇒ $\text{NORM}\{\text{not SMEQ}(X) \text{ and } \text{not GREQ}(Y)\}$
<i>from to (X)(Y)</i>	⇒ $\text{GREQ}(X) \text{ and } \text{SMEQ}(Y)$

Semantics for Hedges and Connectors

Defined Sampled Membership Functions

where:

NORM(X)	= $X / \text{Max}_i X(u_i)$	
INT(X)	= $2X^2$	when $X < 0.5$
	= $1 - 2(1-X)^2$	when $X > 0.5$
FUZ(X)	= $0.5 - 2(0.5-X)^2$	when $X < 0.5$
	= $0.5 + 2(X-0.5)^2$	when $X > 0.5$
SM(X)	= <u>not</u> GREQ(X)	
GR(X)	= <u>not</u> SMEQ(X)	
GREQ(X)	= X for $u_i < u^*$	
	= 1 for $u_i > u^*$	
SMEQ(X)	= 1 for $u_i < u^*$	
	= X for $u_i > u^*$	

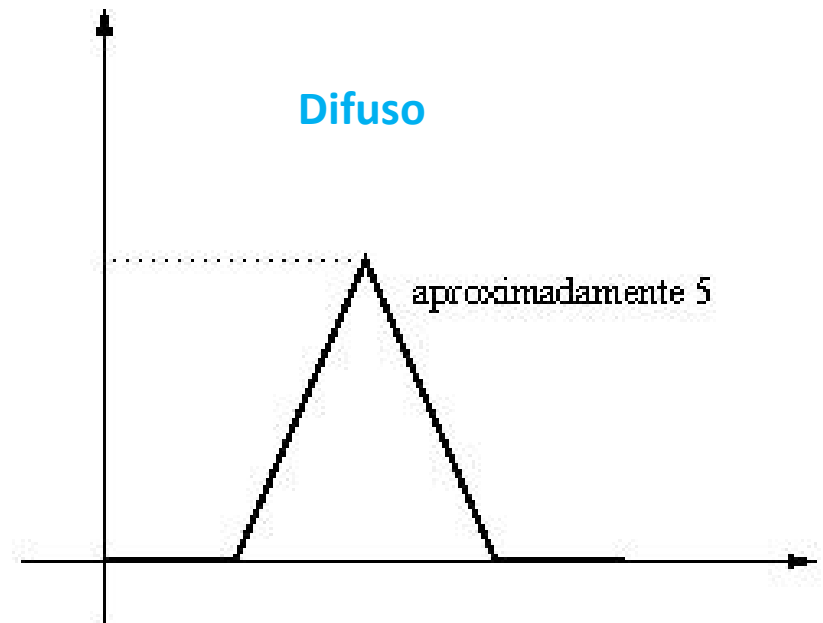
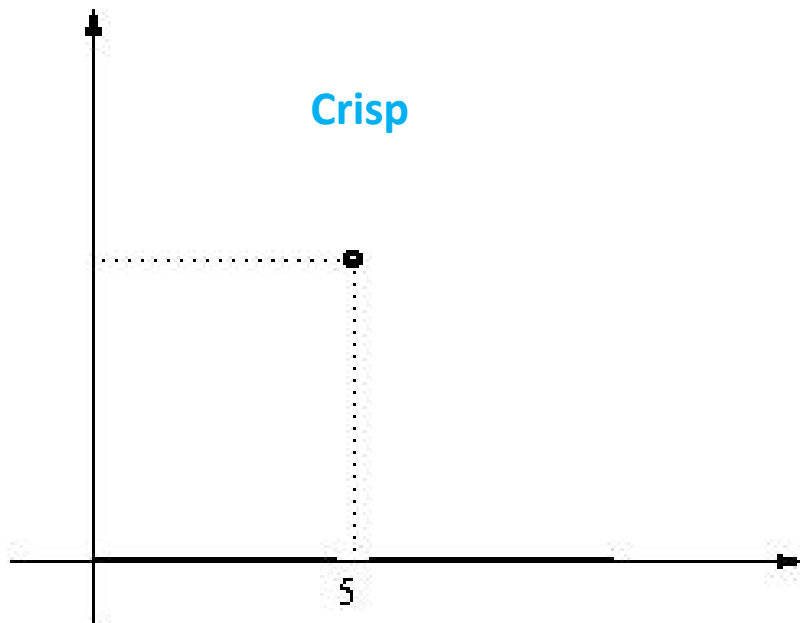
Notes:

- $u^* = \text{Min} \{u_i \mid X(u_i) = 1\}$ (leftmost value of U with membership = 1)
- If needed, normalize $X(u)$ before using SMEQ(X) or GREQ(X)

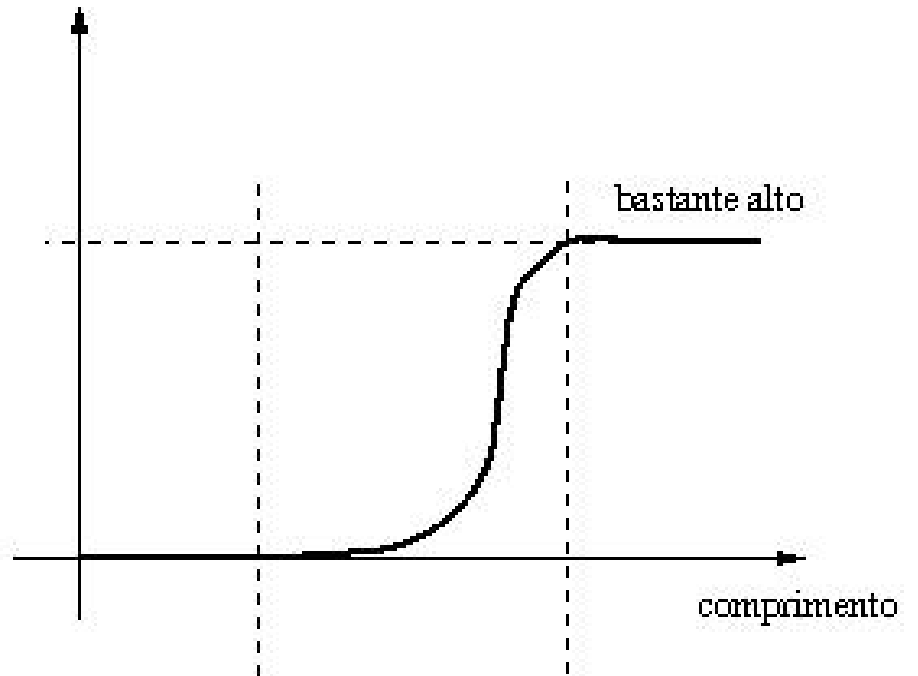
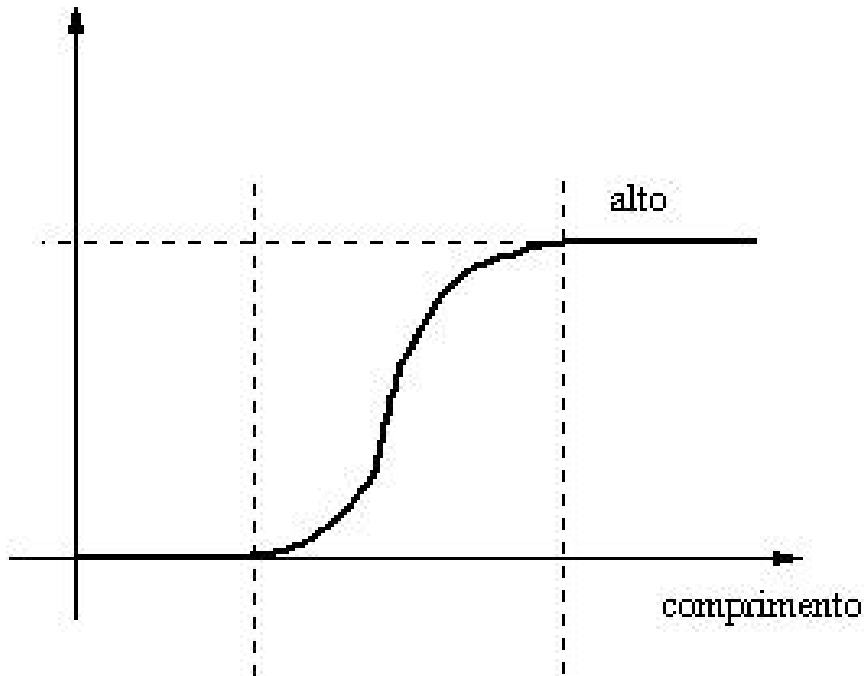
Qualificadores típicos e sua função

Qualificador	Função
Por volta de, Aproximadamente	Aproxima um escalar
Bastante, extremamente	Aumenta a precisão do conjunto
Um pouco	Dilui o conjunto
Não	Complementar
Mais que, maior que	Restringe uma região
Menos que, menor que	Restringe uma região

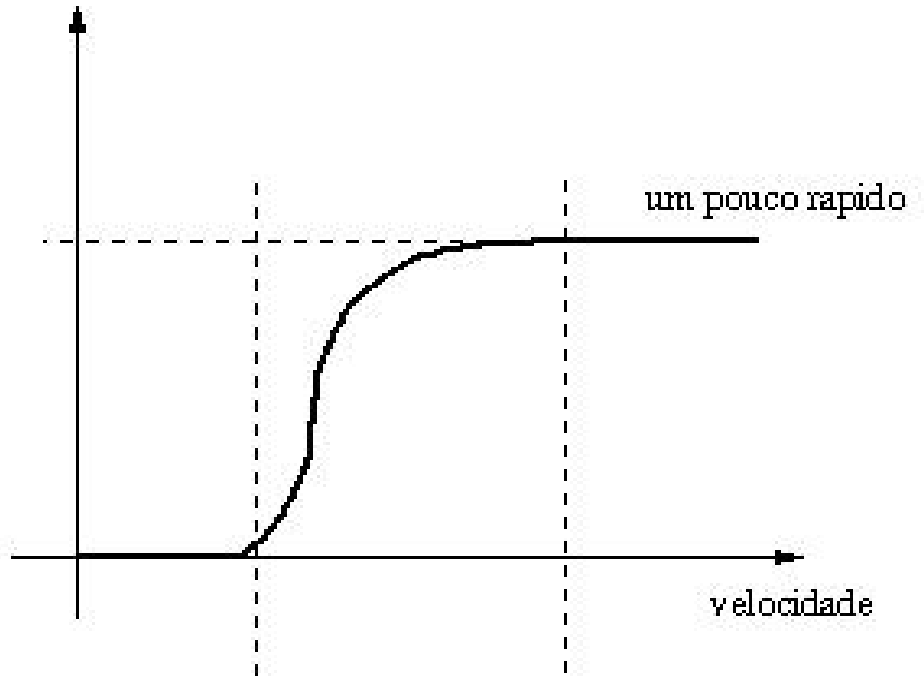
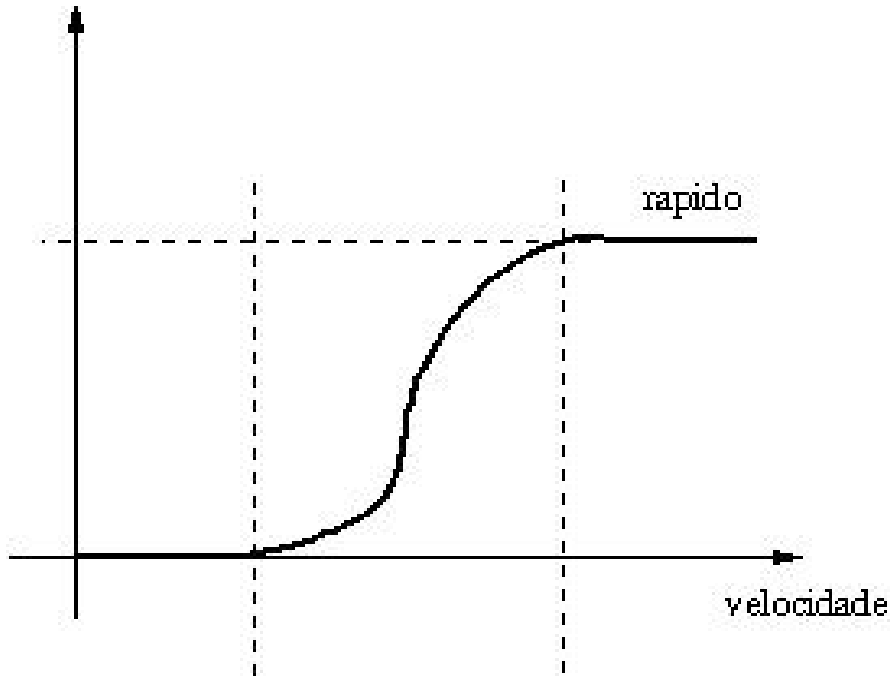
O qualificador “*aproximadamente*”



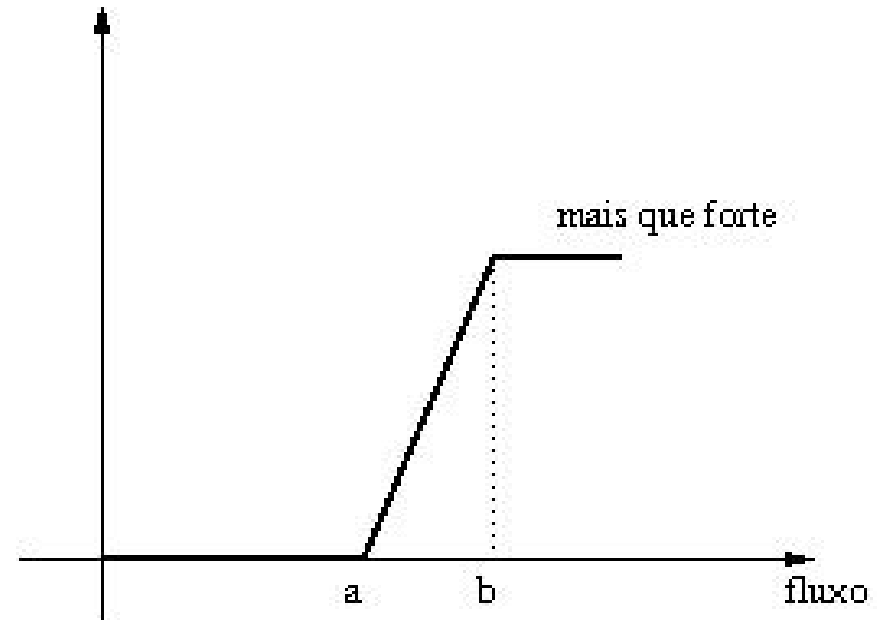
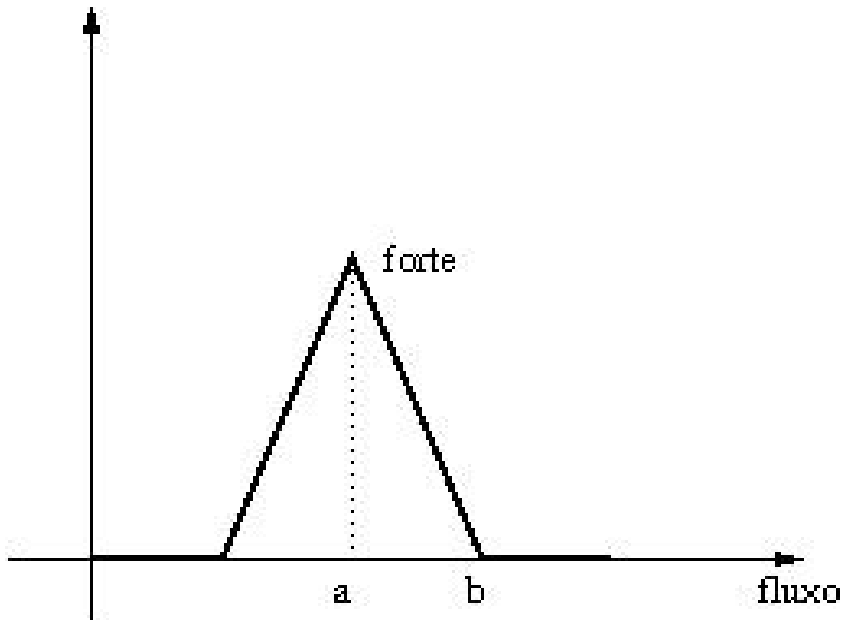
O qualificador “*bastante*”



O qualificador “*um pouco*”



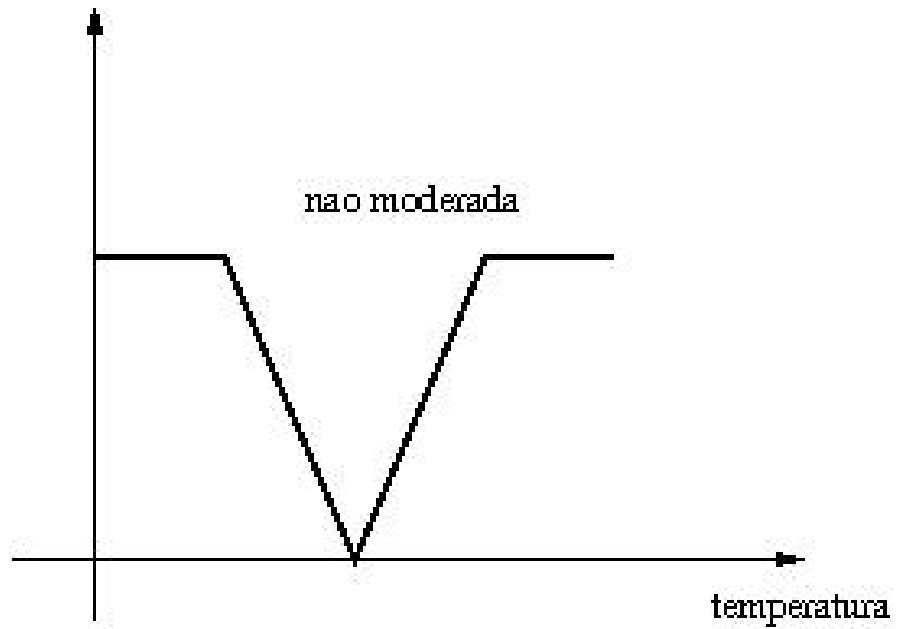
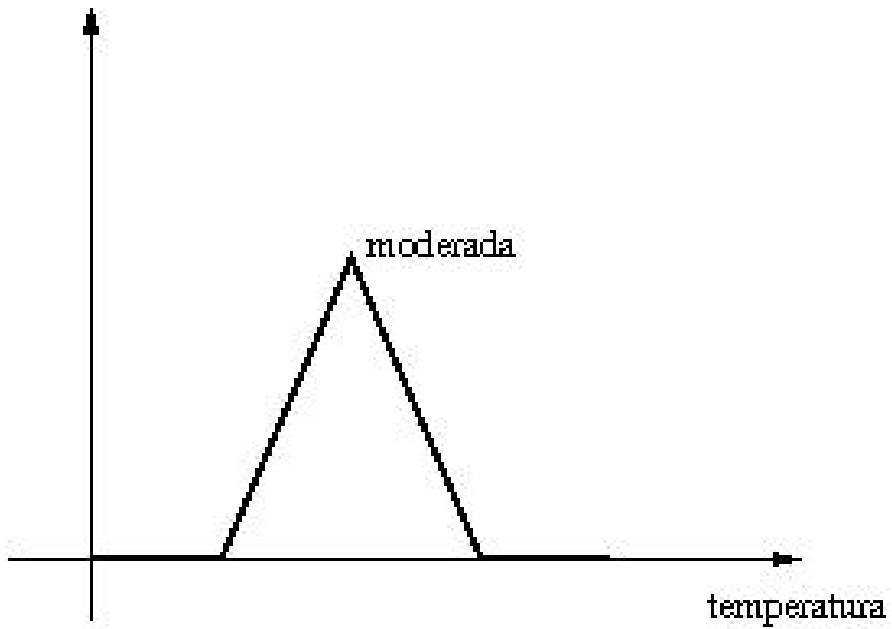
O qualificador “*mais que*”



O qualificador “*menos que*”

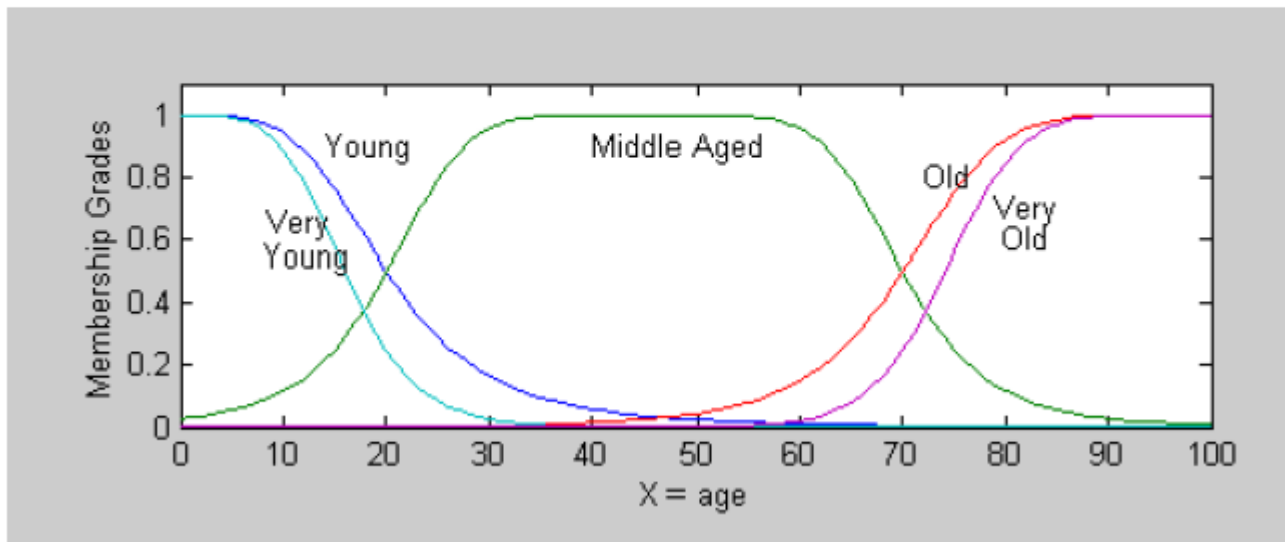


O qualificador “*não*”

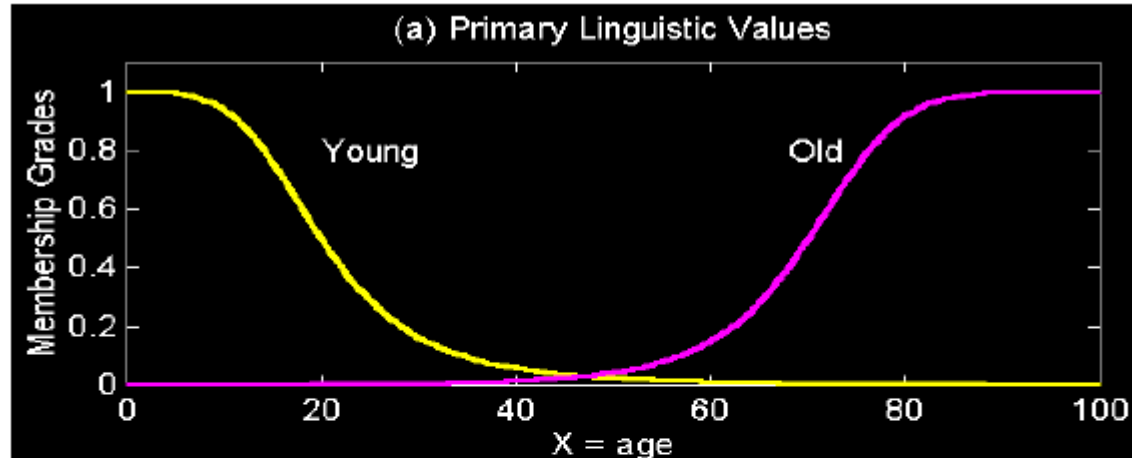


Hedges - exemplo

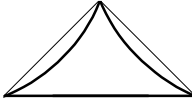
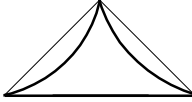
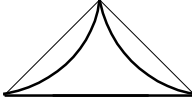
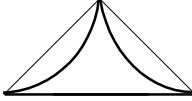
- $X = \text{idade}$
- $T(X) = \{\text{jovem, meia-idade, idoso}\}$
- $U = \{x \in X \mid x \geq 100\}$
- Hedge/Qualificador: *muito*

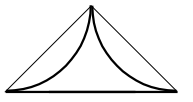
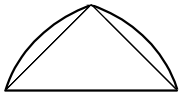
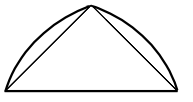
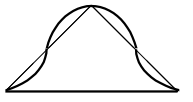


Hedges - exemplo



Variáveis linguísticas e qualificadores típicos

<i>Hedge</i>	<i>Mathematical Expression</i>	<i>Graphical Representation</i>
A little	$[\mu_A(x)]^{1.3}$	
Slightly	$[\mu_A(x)]^{1.7}$	
Very	$[\mu_A(x)]^2$	
Extremely	$[\mu_A(x)]^3$	

<i>Hedge</i>	<i>Mathematical Expression</i>	<i>Graphical Representation</i>
Very very	$[\mu_A(x)]^4$	
More or less	$\sqrt{\mu_A(x)}$	
Somewhat	$\sqrt{\mu_A(x)}$	
Indeed	$2[\mu_A(x)]^2$ if $0 \leq \mu_A \leq 0.5$ $1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2$ if $0.5 < \mu_A \leq 1$	

Exercícios

In a problem related to the computer tracking of soil particles as they move under stress, the program displays desired particles on the screen. Particles can be small and large. Because of segmentation problems in computer imaging, the particles can become too large and obscure particles of interest or become too small and be obscured. To solve this problem linguistically, suppose we define the following atomic terms on a scale of sizes $[0, 50]$ in units of square millimeters:

$$\text{“Large”} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.1}{10} + \frac{0.3}{20} + \frac{0.5}{30} + \frac{0.8}{40} + \frac{1.0}{50} \right\}.$$

$$\text{“Small”} = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{0.9}{10} + \frac{0.5}{20} + \frac{0.3}{30} + \frac{0.1}{40} + \frac{0}{50} \right\}.$$

For these atomic terms find membership functions for the following phrases:

- (a) very small or very large
- (b) not small and not large
- (c) large or not small.

Exercícios

For steel design, the cross-sectional area to column-height ratio largely determines the susceptibility of the columns to buckling under axial loads. The normalized ratios are on the universe, $X = \{0, 1, 2, 3\}$. These ratios are characterized as “small” to “large”:

$$\text{“Small”} = \left\{ \frac{1}{0} + \frac{0.9}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.7}{3} \right\}.$$

$$\text{“Large”} = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.3}{3} \right\}.$$

Calculate the membership functions for the following phrases:

- (a) very small
- (b) fairly small ($= [\text{small}]^{2/3}$)
- (c) very, very large
- (d) not fairly large and very, very small.

Exercícios

In risk assessment, we deal with characterizing uncertainty in assessing the hazard to human health posed by various toxic chemicals. Because the pharmacokinetics of the human body are very difficult to explain for long-term chemical hazards, such as chronic exposure to lead or to cigarette smoke, hazards can sometimes be uncertain because of scarce data or uncertainty in the exposure patterns. Let us characterize hazard linguistically with two terms: “low” hazard and “high” hazard:

$$\text{“Low” hazard} = \left\{ \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.1}{4} + \frac{0}{5} \right\}.$$

$$\text{“High” hazard} = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{1}{5} \right\}.$$

Find the membership functions for the following linguistic expressions:

- (a) low hazard and not high hazard
- (b) very high hazard and not low hazard
- (c) low hazard or high hazard.

Exercícios

Exercise 5.1. Give three examples of linguistic variables. Combine these linguistic variables into a compound fuzzy proposition and determine its membership function.

Exercise 5.2. Consider some other linguistic hedges than those in Section 5.2 and propose reasonable operations that represent them.

Hedges, such as “very,” “slightly,” “more or less,” etc.

Exercise 5.4. Use basic fuzzy operators (3.1)-(3.3) for “not,” “or,” and “and,” respectively, and determine the membership functions for the fuzzy propositions (5.12) and (5.13). Plot these membership functions.

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (3.1)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (3.2)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (3.3)$$

$$x \text{ is } S \text{ or } x \text{ is not } M \quad (5.12)$$

$$x \text{ is not } S \text{ and } x \text{ is not } F \quad (5.13)$$