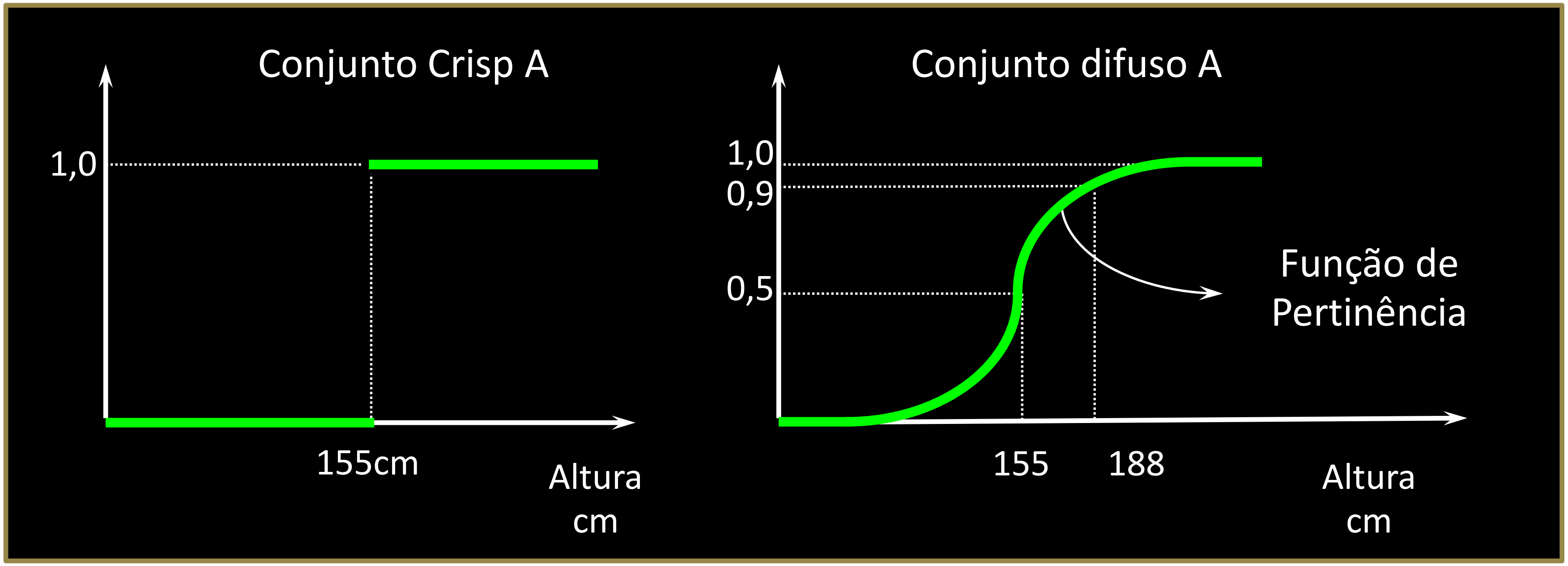
TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Operações)

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

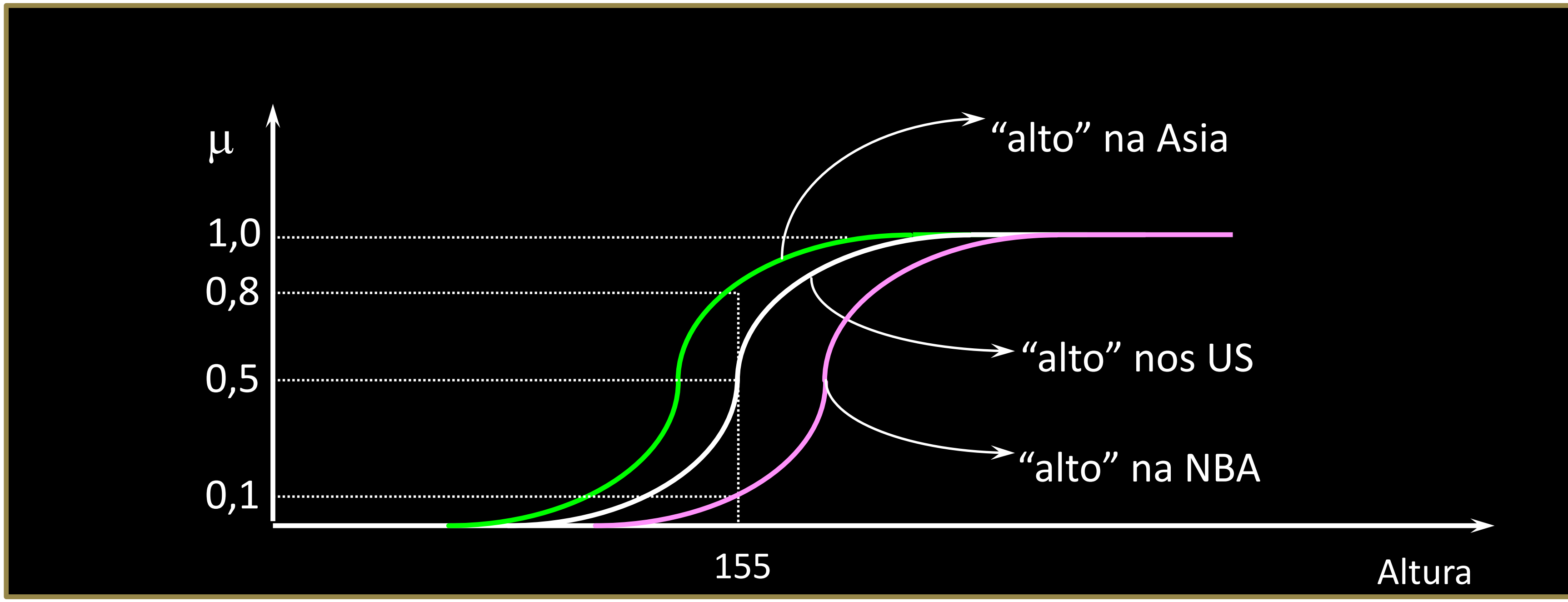
Revisão – crisp e difuso

A = conjunto das “pessoas altas”



Revisão – pertinência e modificadores

- Medidas subjetivas
- Não são funções probabilísticas



Revisão - notação

Definição: Um conjunto difuso A em *X* é expresso como sendo o par ordenado:

$$\underbrace{A}_{\text{Conjunto Difuso}} = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de Pertinência}}) \mid x \in \underbrace{X}_{\text{Universo de discurso}}\}$$

Um conjunto difuso é totalmente caracterizado através da função de pertinência.

Revisão – conjunto difuso discreto

Conjunto difuso com universo discreto

- Conjunto difuso C = “cidade desejável para morar”

  X = {SF, Boston, LA} (discreto e não ordenado)

  C = {(SF, 0,9), (Boston, 0.8), (LA, 0,6)}

  (valores de pertinência subjetivos!)

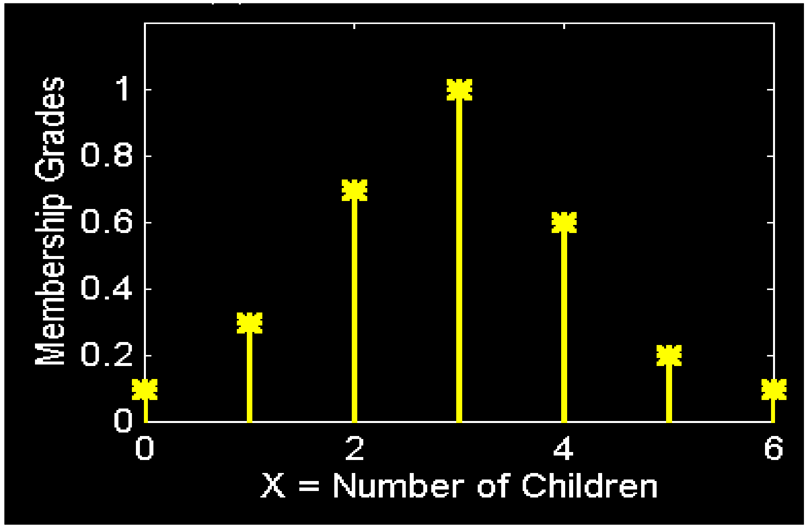
- Conjunto difuso A = “número razoável de crianças”

  X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (universo de discurso)

  A = {(0, 0,1), (1, 0,3), (2, 0,7), (3, 1),

  ... (4, 0,6), (5, 0,2), (6, 0,1)}

  (valores de pertinência subjetivos!)



Revisão – conjunto difuso contínuo

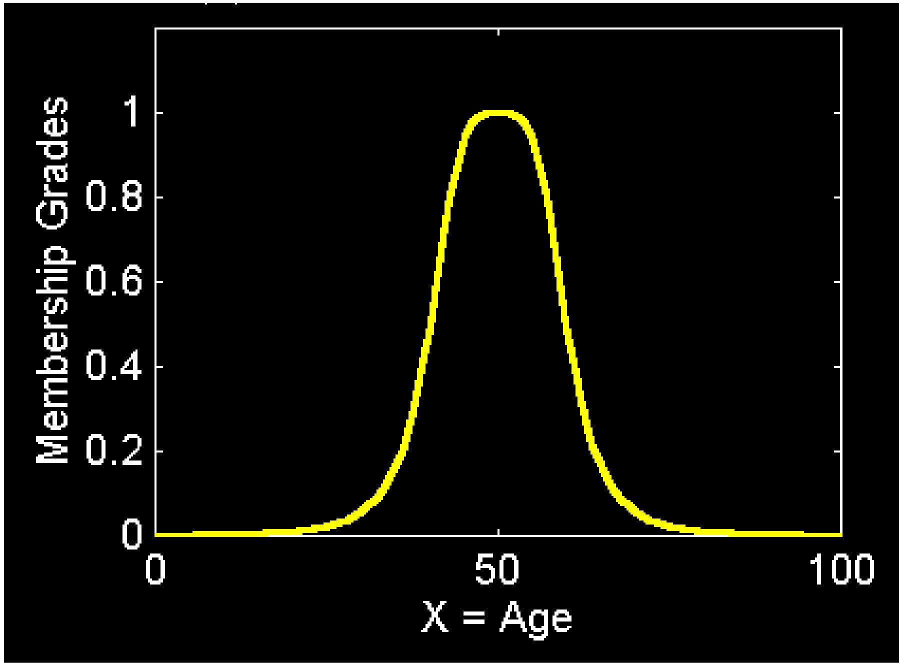
Conjunto difuso com universo contínuo

- Conjunto difuso B = “cerca de 50 anos de idade”

  X = conjunto de todos os números reais positivos (contínuo)

  B = {(x, $\mu_B(x)$) | $x \in$ X}

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$



Revisão - Nnotação

Notação alternativa

Um conjunto A também pode ser denotado da seguinte forma:

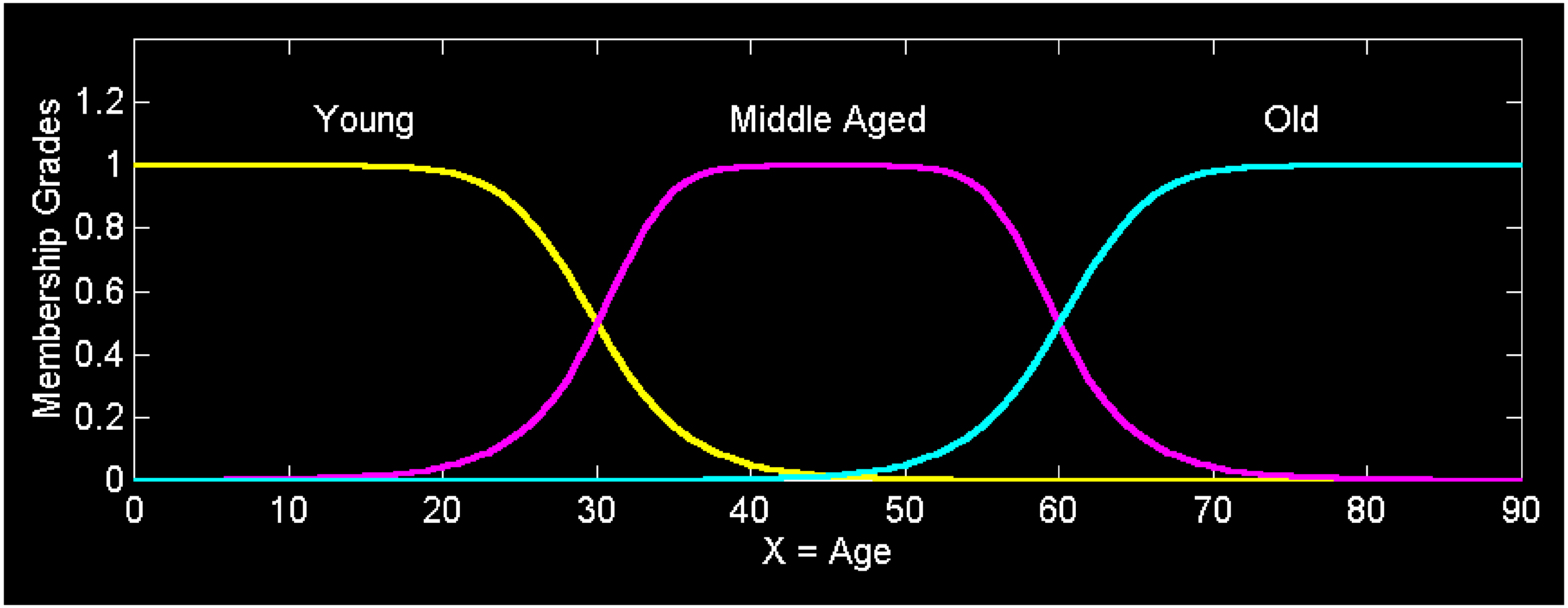
X é discreto → $$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i$$

X é contínuo → $$A = \int_X \mu_A(x) / x$$

Termos linguísticos e partição

Partição Fuzzy

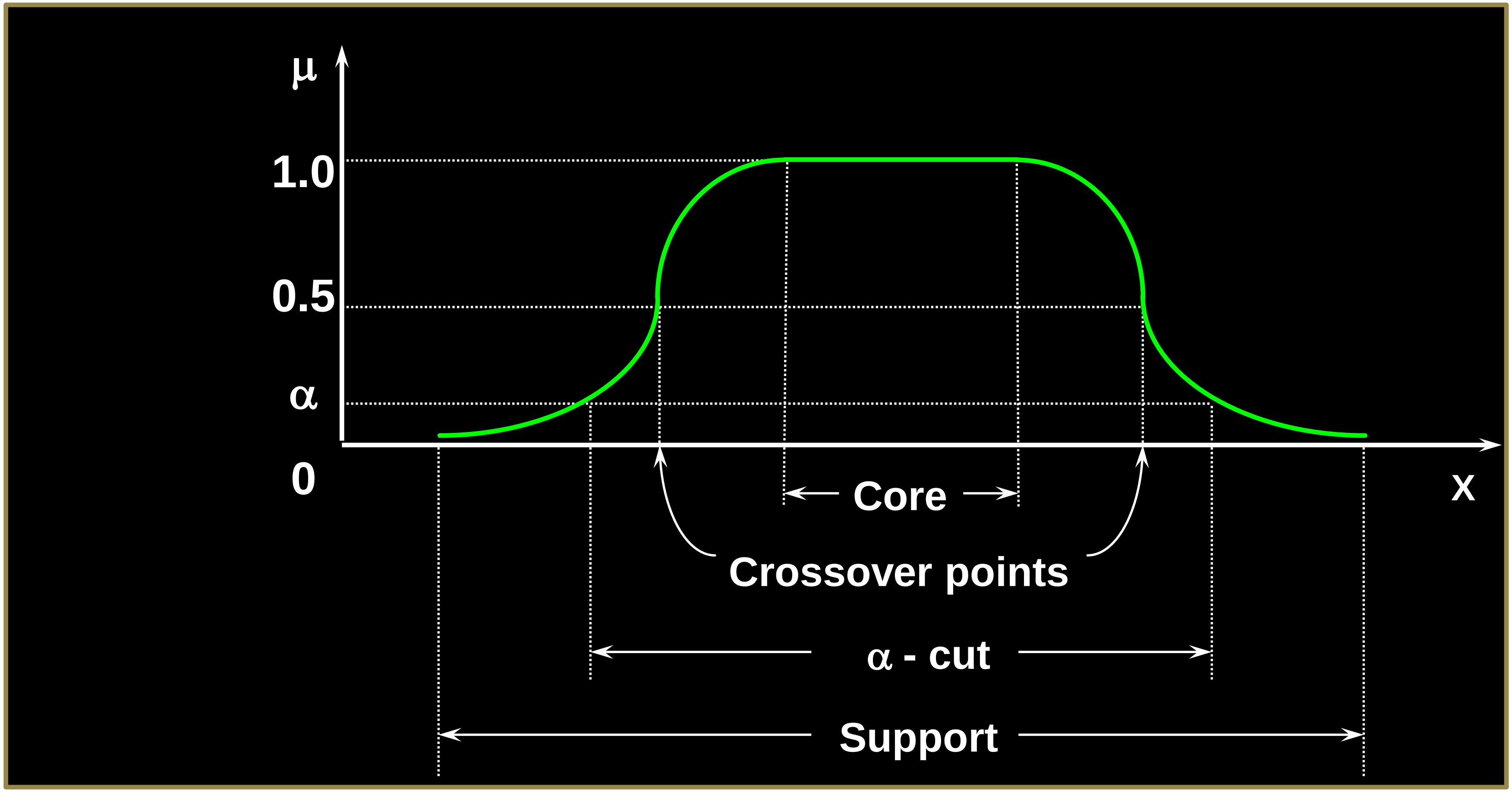
Partições difusas são formadas por valores linguísticos: “*young*”, “*middle aged*”, e “*old*”. Cada termo *T*(*age*) é caracterizado através de um conjunto difuso no universo de discurso X = [0,90] .



Definições básicas

- suporte(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$
- core(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$
- normal: core(A) $\neq \emptyset \Rightarrow$ A é um conjunto difuso normal
- crossover(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}$
- α - cut: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$
- strong α - cut: $A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$

Definições básicas & terminologia



- suporte(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$
- core(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$
- normal: core(A) $\neq \emptyset \Rightarrow$ A é um conjunto difuso normal
- crossover(A) = $\{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}$
- α - cut: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$
- strong α - cut: $A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$

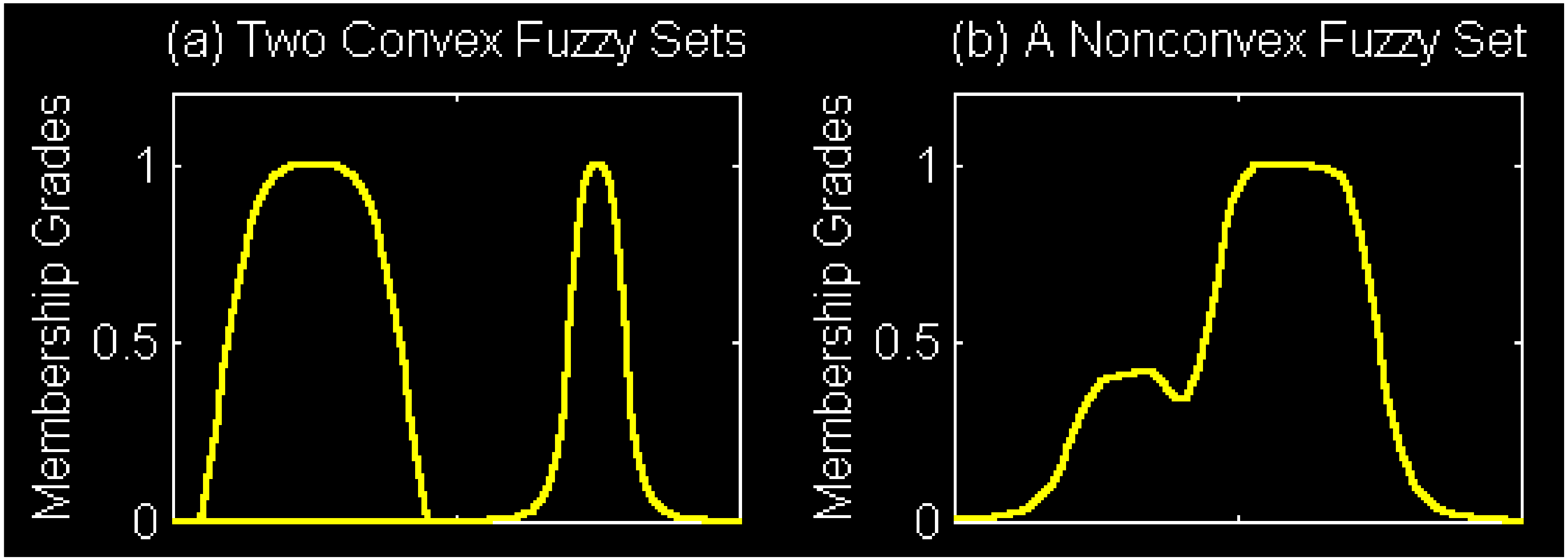
Definições básicas & terminologia

Convexidade de conjuntos difusos

Um conjunto difuso A é convexo . Ou seja, $\forall\lambda \in [0, 1]$,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Alternativamente, *A* é convexo se todos os seus α-corte são convexos.

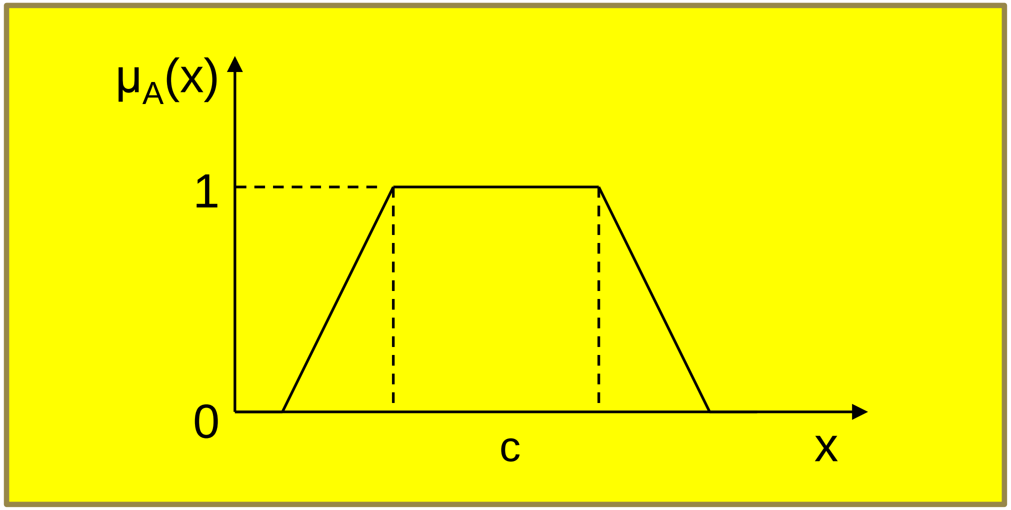


Definições básicas & terminologia

- **Número Fuzzy**: um número difuso A é um conjunto difuso em IR que satisfaz as propriedades de normalidade e convexidade

- **Simetria**: um conjunto difuso A é simétrico se sua função de pertinência é simétrica ao redor de certo ponto x = c, a saber

$$\mu_A(x + c) = \mu_A(c - x) \quad \forall x \in X$$



Operações com conjuntos difusos

- **Subconjunto**:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

- **Complemento**:

$$\overline{A} = X - A \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

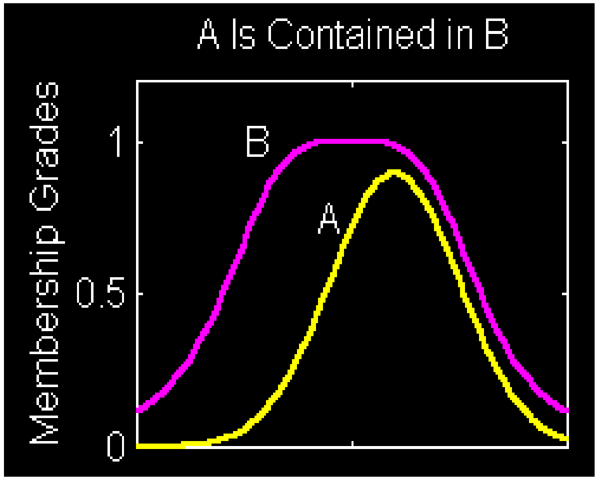
- **União**:

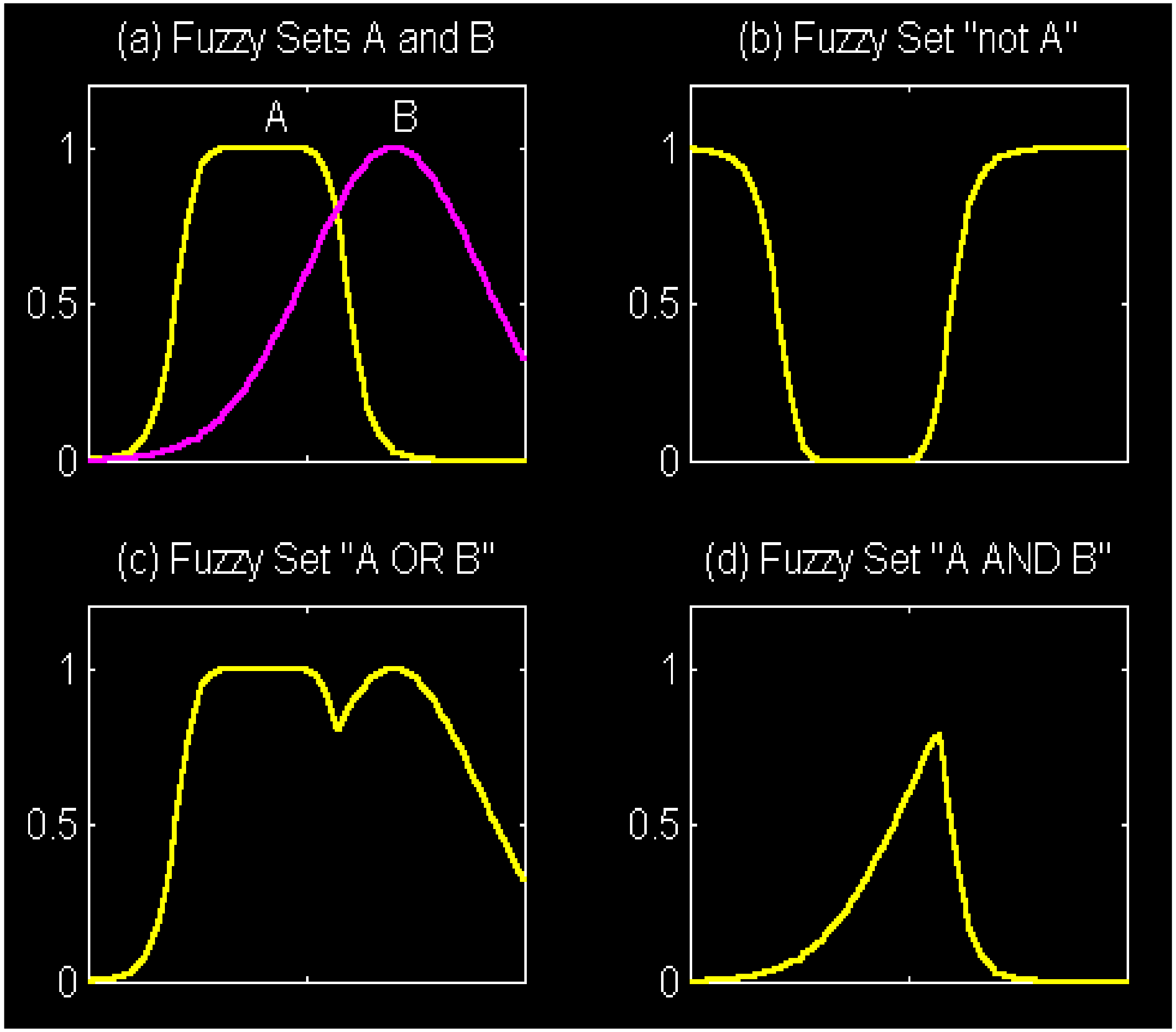
$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

- **Interseção**:

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Operações com conjuntos difusos





Funções de pertinência

Uma dimensão

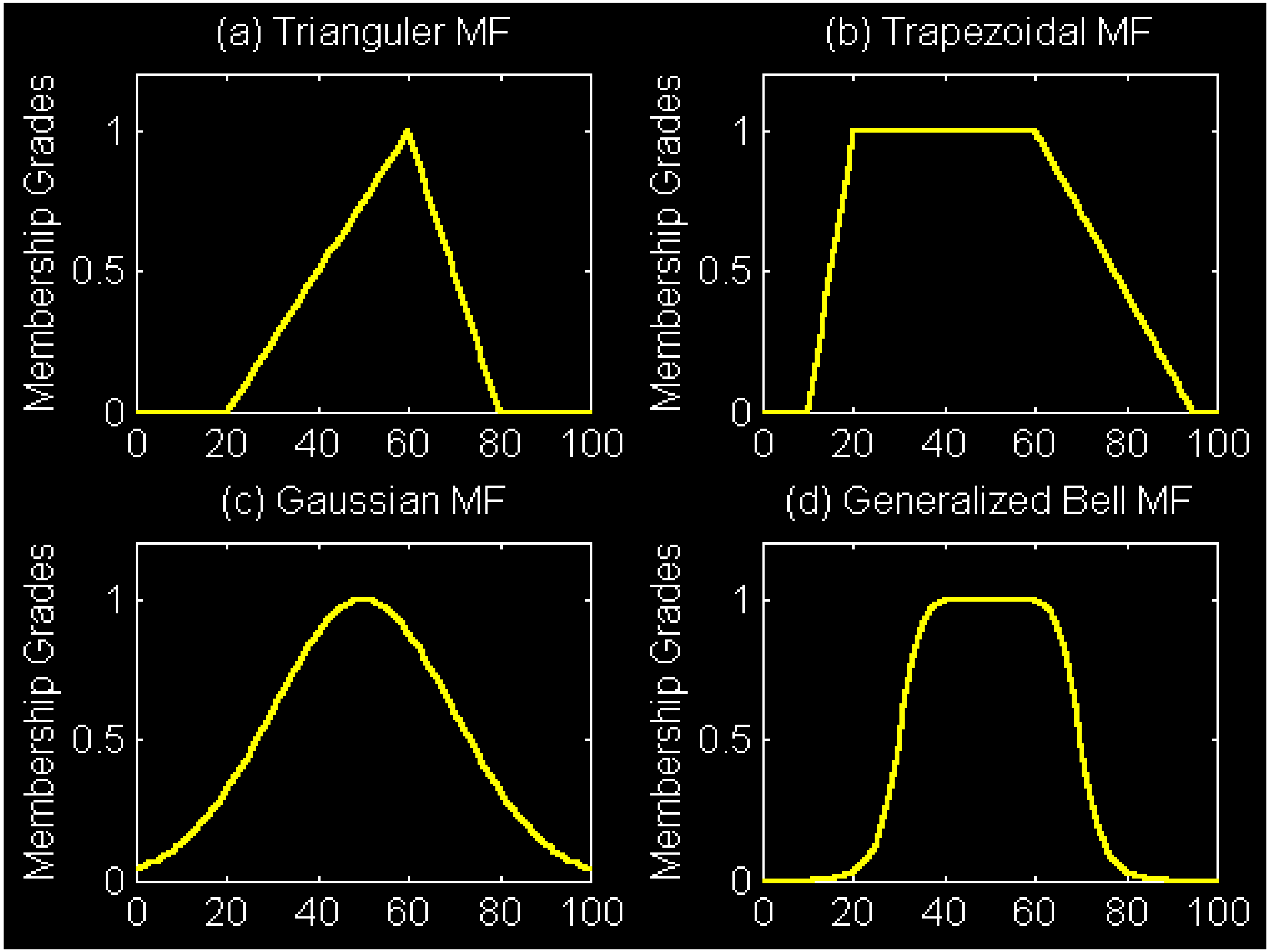
- Triangular: $$trimf(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- Trapezoidal: $$trapmf(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- Gaussiana: $$gaussmf(x;c,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

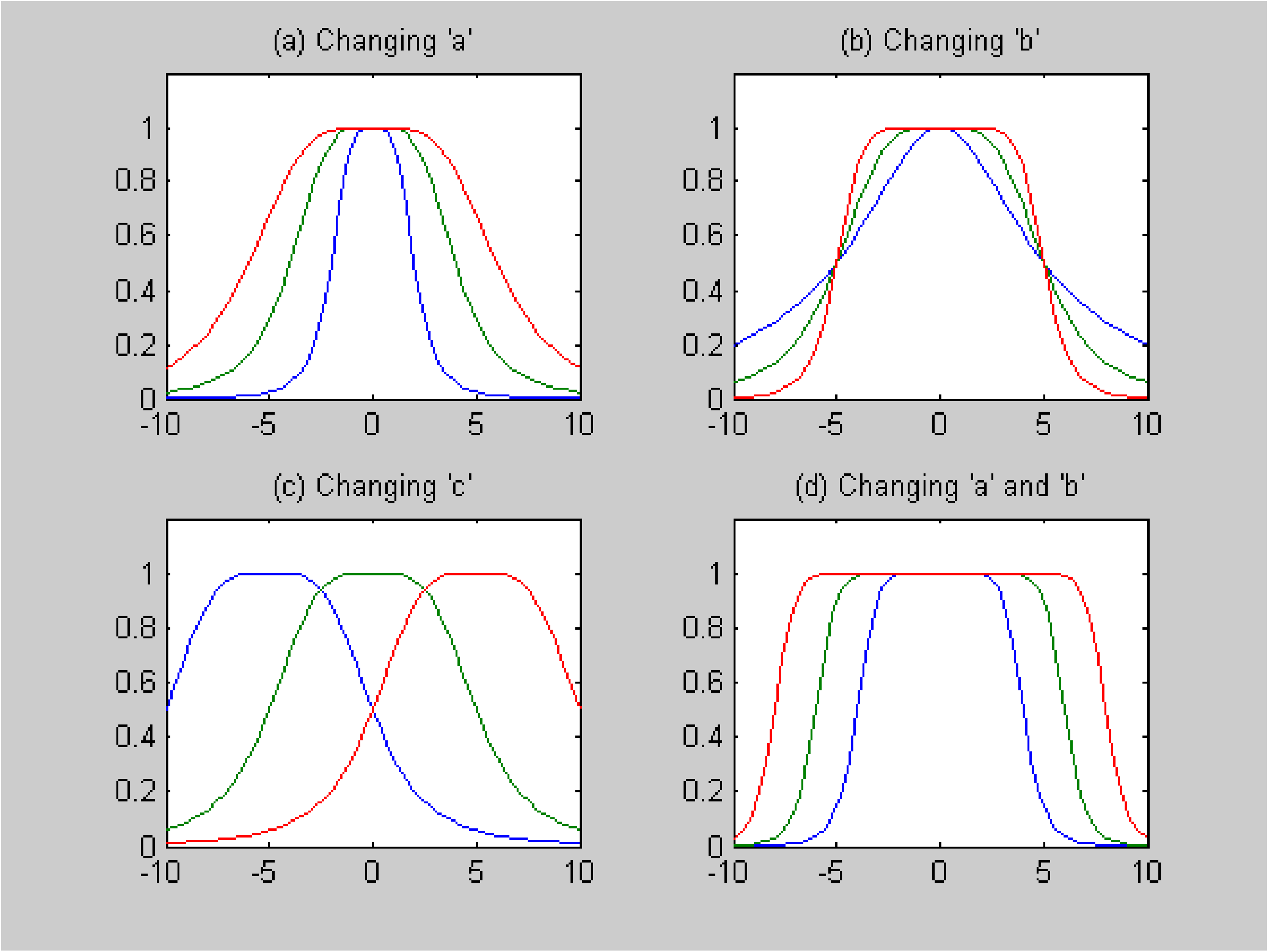
- Generalized bell: $$gbellmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Funções de pertinência



Funções de pertinência

Mudanças dos parâmetros da função de pertinência *generalized bell*.



$$gbellmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Dr. Djamel Bouchaffra

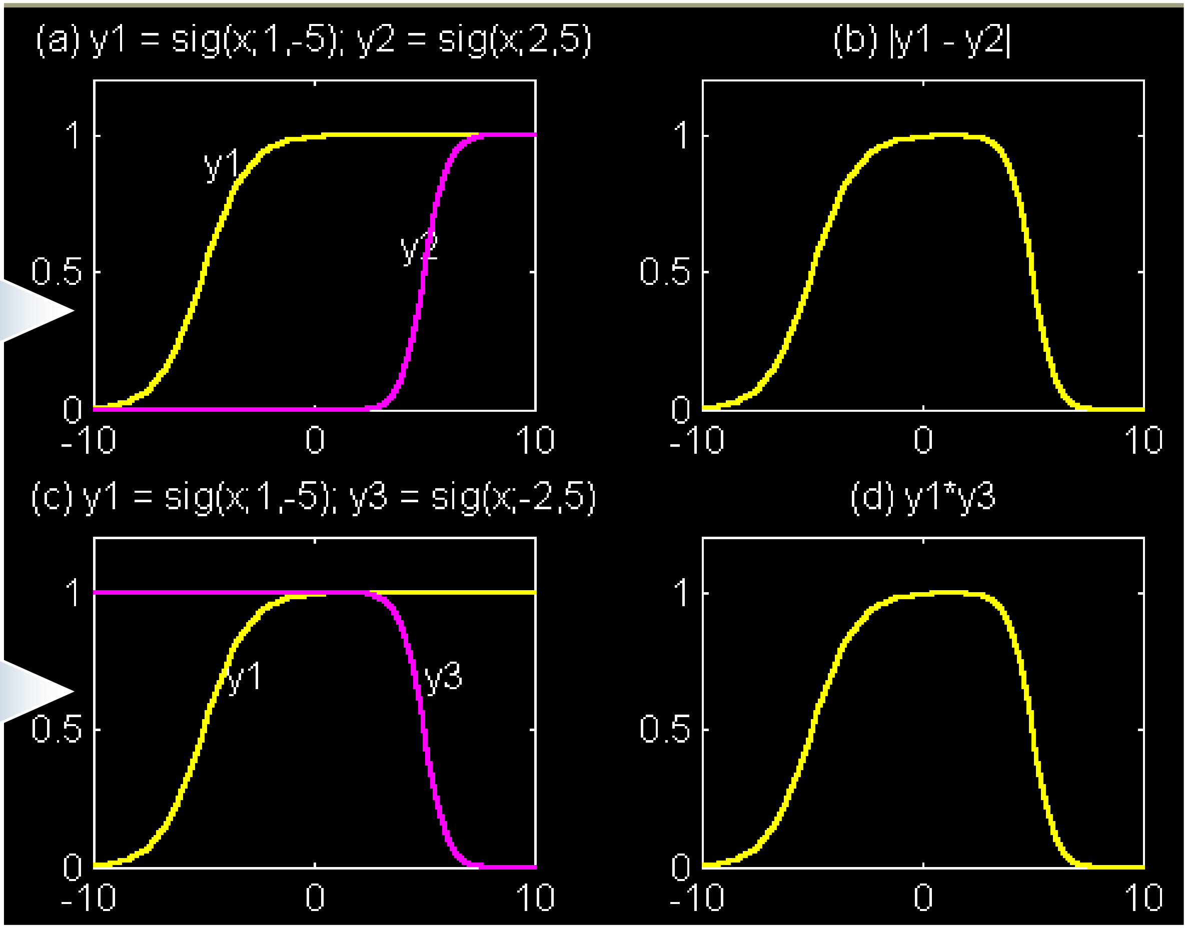
Funções de pertinência

Sigmoidal: $$sigmf(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

Extensões

Diferença absoluta
De duas funções

Produto
De duas funções

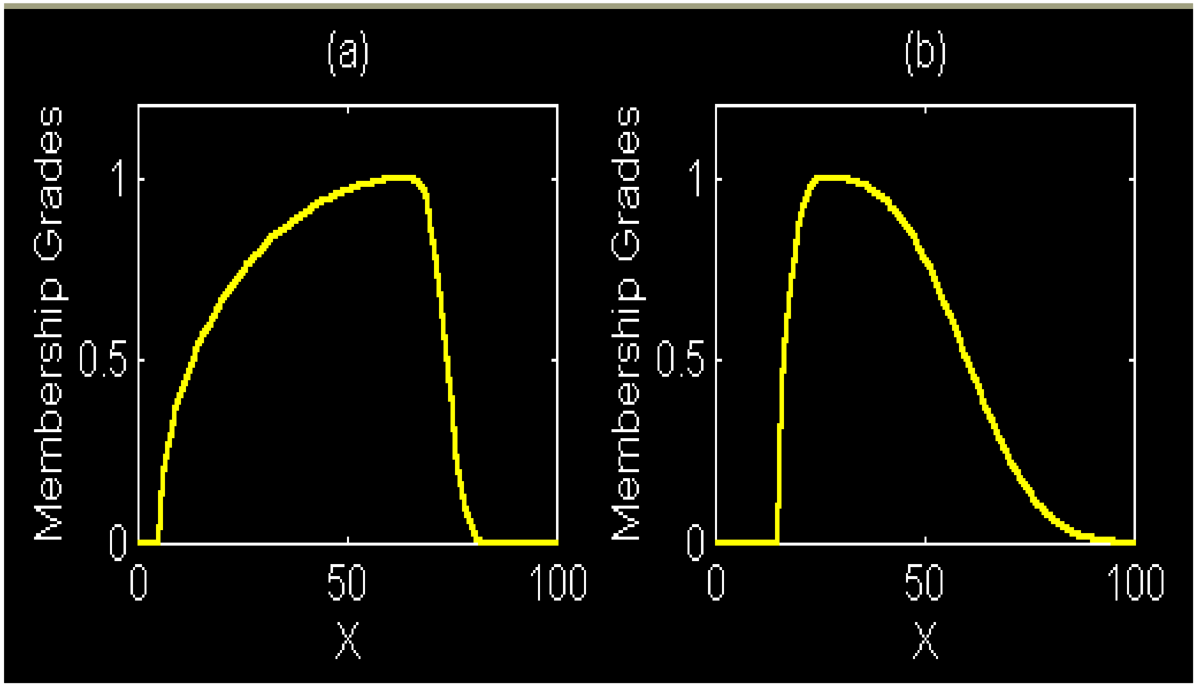


Funções de pertinência

Left –Right (LR): $$\mathrm{LR}(x;c,\alpha,\beta)=\begin{cases}F_L\left(\dfrac{c-x}{\alpha}\right), x<c\\ F_R\left(\dfrac{x-c}{\beta}\right), x\geq c\end{cases}$$

Exemplo: $F_L(x)=\sqrt{\max\{0,1-x^2\}}$ $\quad F_R(x)=\exp(-|x|^3)$

c=65
α=60
β=10



c=25
α =10
β =40

Funções de pertinência

- A lista de funções de pertinência introduzida nesta seção não é de forma alguma exaustiva.

- Outras funções de pertinênia especializadas podem ser criadas para aplicações específicas, se necessário.

- Qualquer tipo de funções contínua de distribuição de probabilidade pode ser utilizado como um função de pertinência.

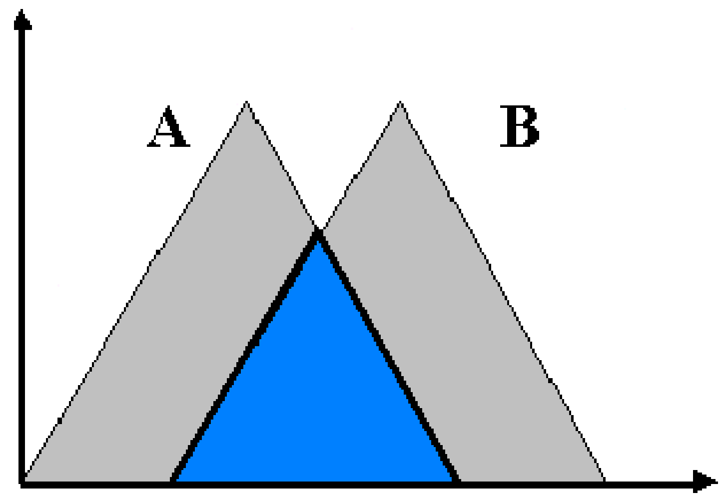
Conjuntos difusos - Operadores de interseção

Interseção (t-norm) $\mu_{(A \cap B)}(x_i) = \mu_A(x_i) \wedge \mu_B(x_i)$

Mínimo: $\mu_{A \cap B}(x_i) = min[\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)]$

Produto: $\mu_{A \cap B}(x_i) = \mu_A(x_i) . \mu_B(x_i)$

Soma limitada: $\mu_{A \cap B}(x_i) = max[(0, \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i) - 1)]$



Operadores de interseção - t-norms

Para conjuntos difusos arbitrárias A e B, definidos sobre o universo x $\in$ X, cujos membros são indicados por valores y = μ_A(x) e z = μ_B(x), correspondentemente, algumas t-norma são:

(T1) Drastic product

$$t^D[y,z] = \begin{cases} \min(y,z), & \textit{if } \max(y,z) = 1 \\ 0, & \textit{if } y < 1 \textit{ and } z < 1 \end{cases}$$

(T2) Hamacher product:

$$t[y,z] = \frac{y \cdot z}{y + z - y \cdot z}$$

(T3) Dubois-Prade class:

$$t_\gamma[y,z] = \frac{y \cdot z}{\max(\gamma,\ y,\ z)}, \quad \gamma \in [0,1]$$

(T4) Yager class:

$$t_\sigma[y,z] = 1 - \min\left(1,\ \left[(1-y)^\sigma + (1-z)^\sigma\right]^{1/\sigma}\right), \quad \sigma \in [0,\infty)$$

Conjuntos difusos - Operadores de interseção

- **União (t-conorm)**

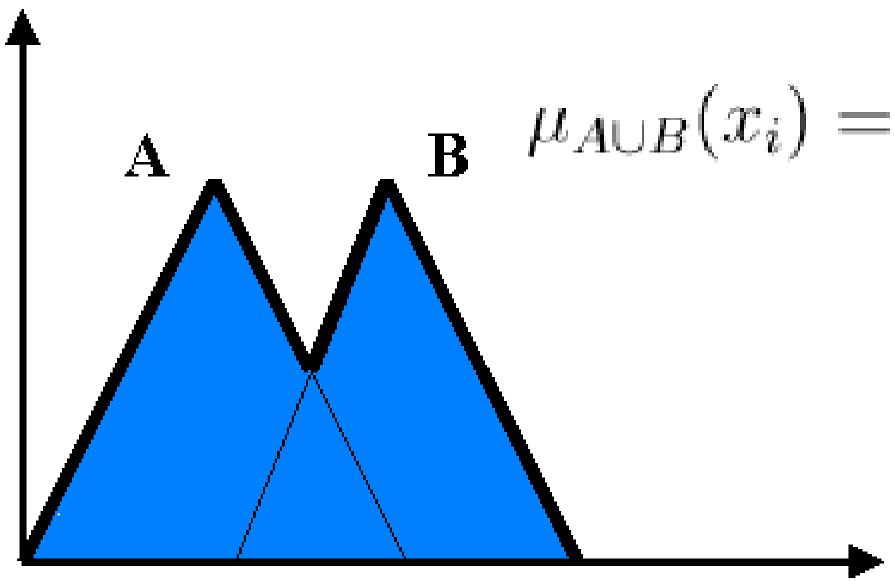
$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \mu_A(x_i) \vee \mu_B(x_i)$$

Máximo:

$$\mu_{A \cup B}(x_i) = max[\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)].$$

Produto ou soma probabilística:

Soma limitada: $\mu_{A \cap B}(x_i) = \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)\mu_B(x_i)$



$$\mu_{A \cup B}(x_i) = min[1, \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)]$$

Operadores de interseção – s-normas ou t-conormas

Para conjuntos fuzzy arbitrários A e B, definidos sobre o universo $x \in X$, cujos membros são indicados por valores $y=\mu_A(x)$ e $z=\mu_B(x)$, correspondentemente, algumas definições s-norma são:

(S1) Drastic sum:

$$s^D[y,z] = \begin{cases} \max(y,z), & \textit{if } \min(y,z)=0 \\ 1, & \textit{if } y>0 \textit{ and } z>0 \end{cases}$$

(S2) Hamacher sum:

$$s[y,z] = \frac{y+z-2y\cdot z}{1-y\cdot z}$$

(S3) Dubois-Prade class:

$$s_\gamma[y,z] = \frac{y+z-y\cdot z-\min(1-\gamma,\ y,\ z)}{\max(\gamma,\ 1-y,\ 1-z)},\quad \gamma\in[0,1]$$

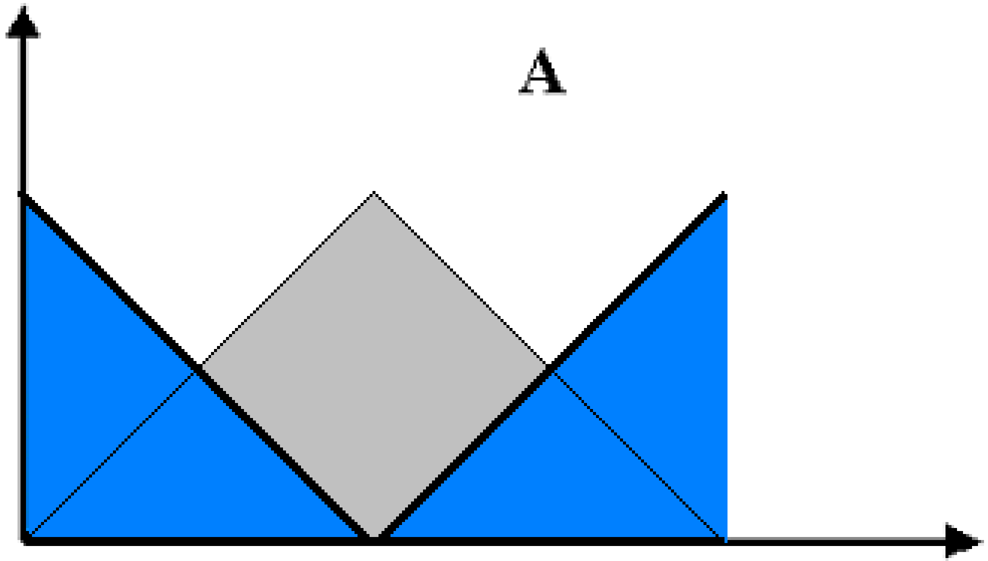
(S4) Yager class:

$$s_\sigma[y,z] = \min\left(1,\ (y^\sigma+z^\sigma)^{1/\sigma}\right),\quad \sigma\in[0,\infty)$$

Conjuntos difusos - Operador do complementar

- **Complemento**

$$\mu_{\overline{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)$$



Conjuntos difusos - Operador do complementar

Operador c é chamado de complemento fuzzy, se satisfaz os seguintes axiomas para qualquer x e y $\in$ [0,1]:

[*Ax*.1]	$c[0]=1 \;\; and \;\; c[1]=0$	(*boundary*)
[*Ax*.2]	$c[x] > c[y], \quad if \;\; x < y$	(*monotonicity*)
[*Ax*.3]	$c[\, c[x]\,] = x$	(*involution*)

Alguns dos operadores para o complemento fuzzy:

(C1) Sugeno's complement: $$c_\gamma[x] = \frac{1-x}{1+\gamma \cdot x} \;, \quad \gamma \in (-1, \infty)$$

(C2) Yager's complement: $$c_\sigma[x] = (1-x^\sigma)^{1/\sigma}, \quad \sigma \in (0, \infty)$$

Exercícios

Two fuzzy sets $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$, both defined on X, are as follows:

$\mu(x_i)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\underset{\sim}{A}$	0.1	0.7	0.8	1.0	0.7	0.1
$\underset{\sim}{B}$	1.0	0.9	0.5	0.2	0.1	0

Express the following λ-cut sets using Zadeh's notation:

(a) $(\overline{\underset{\sim}{A}})_{0.6}$,
(b) $(\underset{\sim}{B})_{0.5}$,
(c) $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_{0.8}$,
(d) $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_{0.6}$,
(e) $(\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}})_{0.7}$,
(f) $(\underset{\sim}{B} \cap \overline{\underset{\sim}{B}})_{0.6}$,
(g) $(\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}})_{0.8}$,
(h) $(\overline{\underset{\sim}{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{B}})_{0.7}$.

Exercícios

The fuzzy sets $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, and $\underset{\sim}{C}$ are all defined on the universe X = [0, 5] with the following membership functions:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \frac{1}{1 + 5(x-5)^2}, \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 2^{-x}, \quad \text{and} \quad \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \frac{2x}{x+5}.$$

(a) Sketch the membership functions.

(b) Define the intervals along the x axis corresponding to the λ-cut sets for each of the fuzzy sets $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, and $\underset{\sim}{C}$ for the following values of λ:

(i) $\lambda = 0.2$
(ii) $\lambda = 0.6$
(iii) $\lambda = 0.9$
(iv) $\lambda = 1.0$.

Exercícios

Assume you were told that the room temperature is *around* 20°C. How would you represent this piece of information, or concept, by (a) a set and (b) a fuzzy set? Ask someone else to answer this question independently and compare his answer with yours.

The middle point of a line segment is, at the same time, *close to* and *far from* its extreme points. How would you geometrically depict this idea through (a) a set and (b) a fuzzy set, both in the unit square?

Pedrycz, W. and Gomide F., An introduction to Fuzzy Sets, 1998, MIT Press

Exercícios

Given the fuzzy set *A* with the following membership function

$$A(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{se } 5 \le x \le 6 \\ -x + 7, & \text{se } 6 < x \le 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Sketch the graph of the function. What is its type?
b) How would you attach a linguistic description to the concept conveyed by *A*

Assume fuzzy set A = 1.0/1 + 0.8/2 + 0.5/3 + 0.1/4 defined in X {1, 2, 3, 4, 5}. Find all α-cuts.

Pedrycz, W. and Gomide F., An introduction to Fuzzy Sets, 1998, MIT Press

Exercícios

Consider the fuzzy set *A* whose membership functions is

$$A(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{3}\right), & \text{se } 5\le x\le 8\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{11}{3}\right), & \text{se } 8< x\le 11\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

a) Sketch the graph of the function. What is its height? Is it normal?

b) Perform the operations of concentration, dilation, contrast intensification, and fuzzification for the normalized (if *A* is not normal) fuzzy set. After performing these operations, what can you say about them and the normalized (again, if *A* is not normal) fuzzy set regarding the inclusion and equality relationships.

Pedrycz, W. and Gomide F., An introduction to Fuzzy Sets, 1998, MIT Press

Exercícios

Consider two fuzzy sets with triangular membership functions A(x; 1,2,3) and B(x; 2, 2, 4).

a) Find their intersection and union and express them analytically, using the min and max operators.

b) Exercise the intersection and union by choosing different t-norms and s-norms.

c) Find the complement of A and B and intersect them with the original sets using several t-norms. Repeat the same with the union operation using several different s-norms.

Pedrycz, W. and Gomide F., An introduction to Fuzzy Sets, 1998, MIT Press