UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Relações Difusas)

Prof. Volmir Wilhelm

Curitiba, Paraná, Brasil

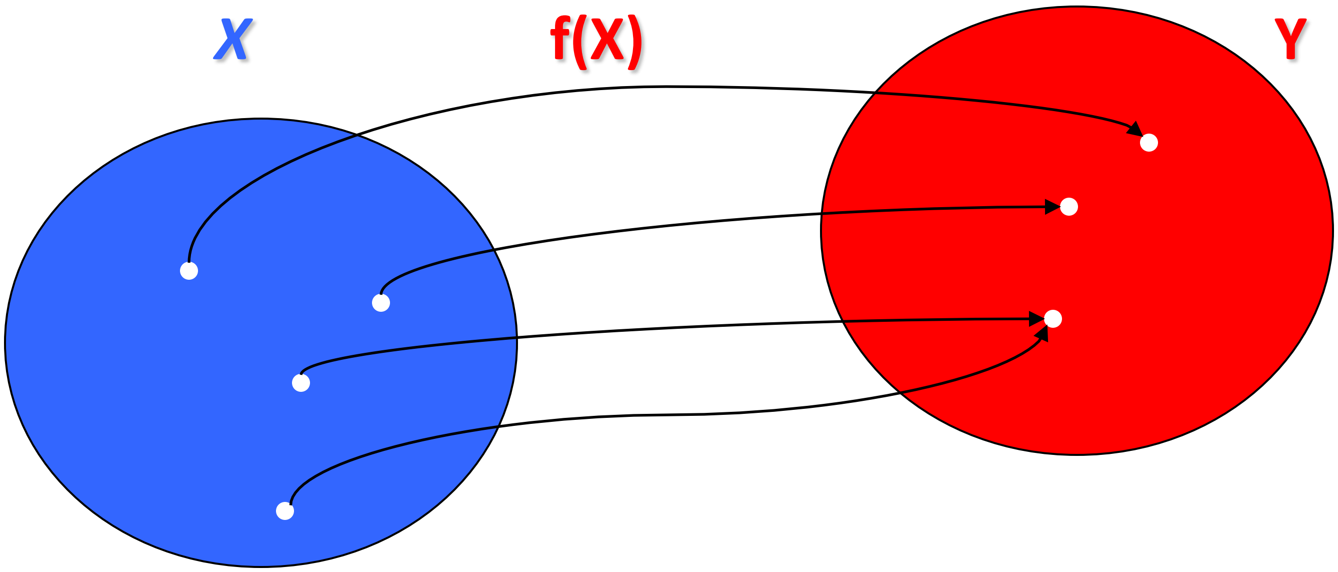
Introdução

- As relações são associações entre elementos de dois ou mais conjuntos.
- Se o grau de associação é 1 ou 0, há uma associação crisp.
- Graus de associação pode estar entre 0 e 1 em uma relação difusa.
- Por exemplo, a relação x é maior que y.

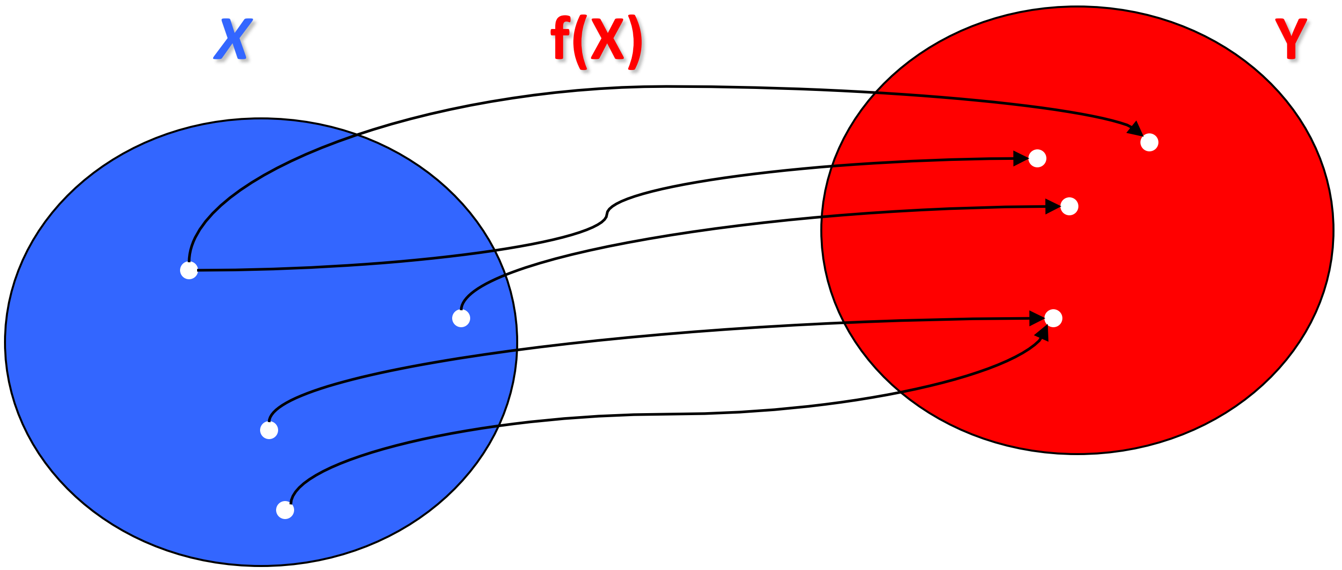
Funções e relações

- Funções e relações são mapeamentos.
- As funções mapeiam vários elementos a um elemento.
- As relações pode mapear muitos para muitos.

Função crisp



Relação crisp



Produto Cartesiano (crisp)

- O produto cartesiano de dois conjuntos crisp X e Y é definido como

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

- Para n conjuntos crisp (x_i) o produto cartesiano é definido como

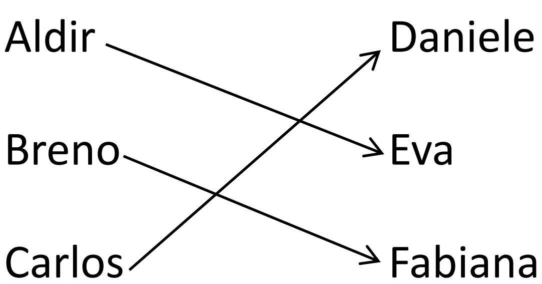
$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ , } i = 1 \ldots n\}$$

Relações clássicas (crisp)

Exemplo

Seja X = {**A**ldir, **B**reno, **C**arlos} e Y={**D**aniele, **E**va, **F**abiana}, então a relação "**casado com**" em X×Y é, por exemplo {(Aldir, Eva),(Breno,Fabiana),(Carlos,Daniele)}

Representação



$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

	Daniele	**Eva**	**Fabiana**
Aldir	0	1	0
Breno	0	0	1
Carlos	1	0	0

Relações crisp

Função característica

- Mostra a força da relação entre os pares.

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R \\ 0 & (x, y) \notin R \end{cases}$$

- Cada par que pertence à relação recebe valor 1, e 0 caso contrário.

Relações binárias crisp

- Uma relação entre dois conjuntos de X e Y é chamado de relação binária (R (X, Y)).
- Relaçãos binárias podem ser definidas em um único conjunto (R (X, X)).
- Essas relações são muitas vezes denominadas de dígrafos ou grafos dirigidos.

Representando relações crisp

Conjunto de pares ordenados.

Exemplo: Considere uma família e a relação “é primo de”

$$X = \{\text{Beatriz},\ \text{Clara},\ \text{Débora},\ \text{Marco}\}$$

$$R \equiv \text{primo de}$$

$$R \subset X \times X$$

$$\begin{aligned} R = \{&(\text{Beatriz, Débora}), (\text{Beatriz, Marco}),\\ &(\text{Clara, Débora}), (\text{Clara, Marco}), (\text{Débora, Beatriz}),\\ &(\text{Débora, Clara}), (\text{Marco, Beatriz}), (\text{Marco, Clara})\} \end{aligned}$$

Representando relações crisp

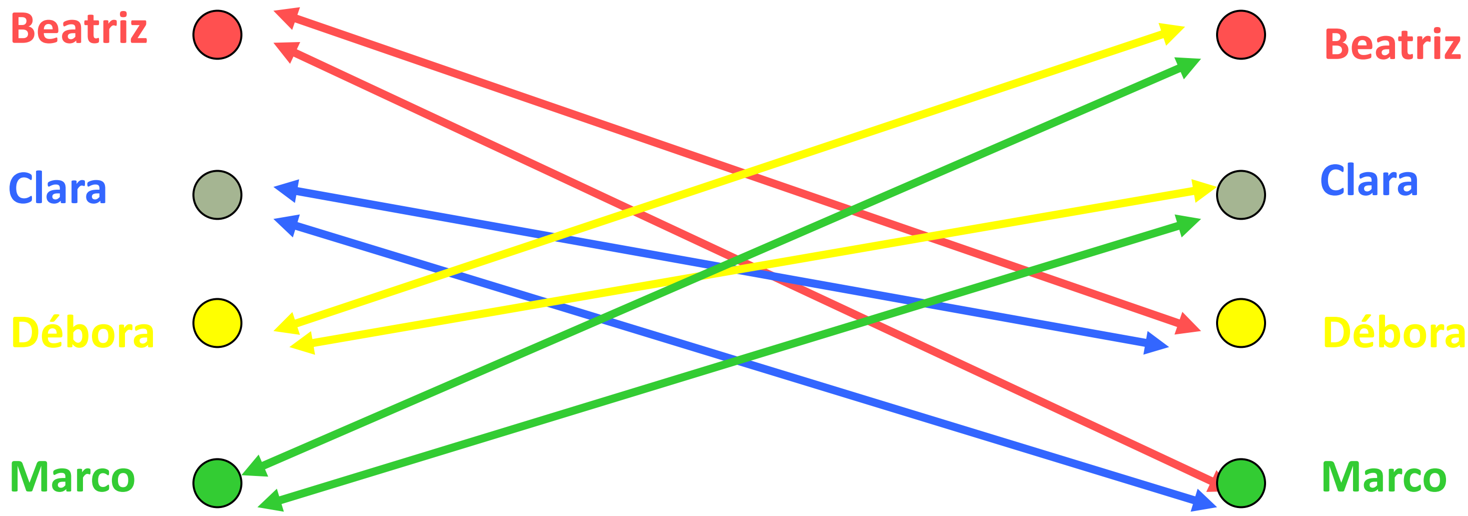
Matriz de pertinência *n*-dimensional

		Beatriz	Clara	Débora	Marco
	Beatriz	0	0	1	1
Primo	Clara	0	0	1	1
	Débora	1	1	0	0
	Marco	1	1	0	0

Representando relações crisp

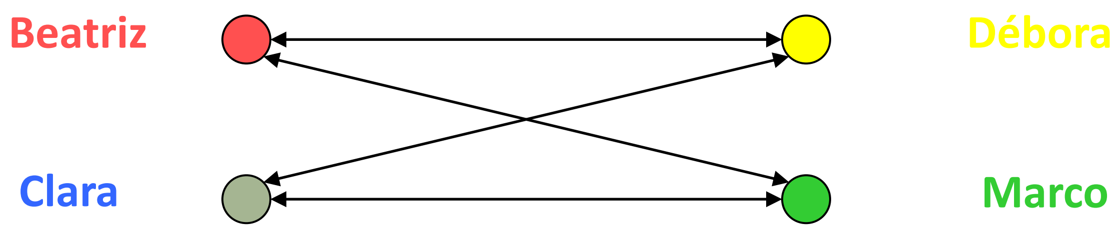
Diagramas que mostram elementos como pontos e as relações como setas entre pontos.

Diagrama Sagital



Representando relações crisp

Diagrama simplificado



Relações crisp especiais

Exemplo 1

Considere o conjunto A={0,1,2} e as relações ilustradas abaixo $A \times A$

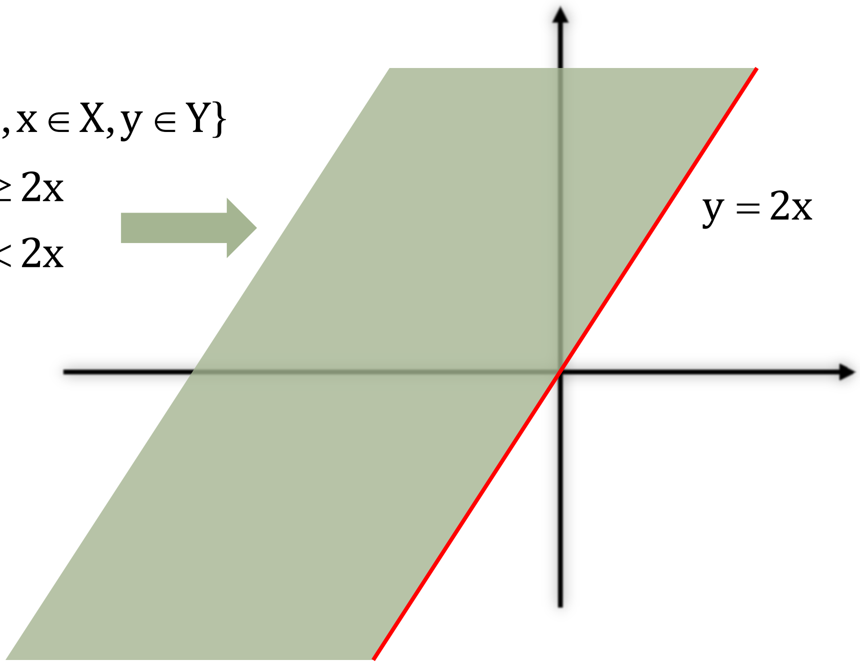
- Relação identidade I = {0,0),(1,1),(2,2)}
- Relação Universal U={(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)}

Relações crisp especiais

Exemplo 2: Espaço contínuo

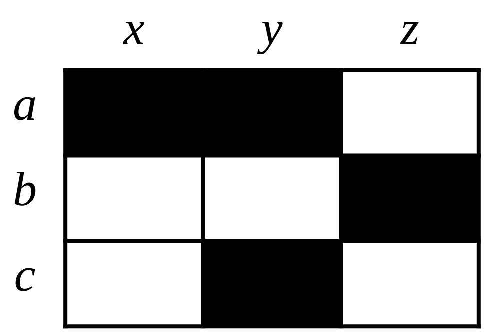
$$R = \{(x, y) \mid y \geq 2x, x \in X, y \in Y\}$$

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1 & y \geq 2x \\ 0 & y < 2x \end{cases}$$



Relações crisp especiais

Exemplo 3



$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Operações com relações crisp

- Relações Crisp são basicamente conjuntos definidos em conjuntos universos de dimensões superiores, ou seja, produtos cartesianos

- Operações habituais, tais como união, interseção e assim por diante também são aplicáveis.

União:

$$R \cup S \rightarrow \chi_{R \cup S}(x, y) = \max\{\chi_R(x, y), \chi_S(x, y)\}$$

Interseção:

$$R \cap S \rightarrow \chi_{R \cap S}(x, y) = \min\{\chi_R(x, y), \chi_S(x, y)\}$$

Complemento:

$$\chi_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \chi_R(x, y)$$

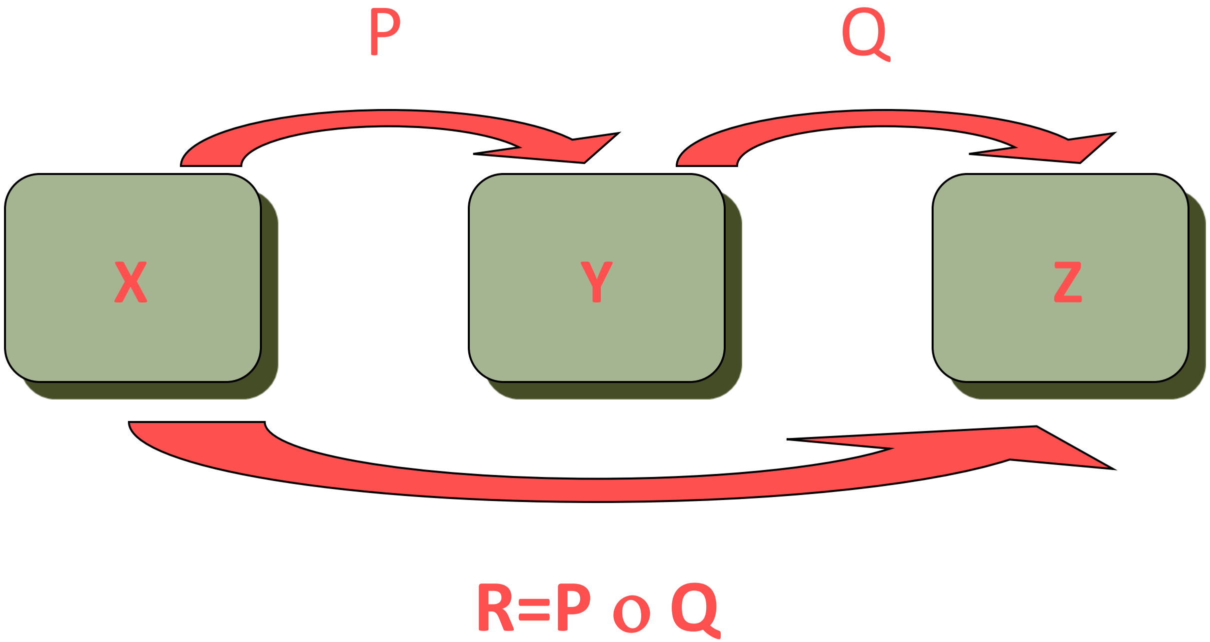
Propriedades das operações crisp

Comutativa	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idempotência	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Identidade	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
	$A \cup X = X$
	$A \cap X = A$

Meios excluídos	$A \cup \overline{A} = E$
	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Composição de relações crisp



Composição de relações crisp

A operação $\circ$ é similar a multiplicação de matrizes.

$$\chi_{P\circ Q}(x,y) = \chi_R(x,y) = \bigvee_y \left(\chi_P(x,y) \wedge \chi_Q(y,z)\right)$$

$\vee = \max$

$\wedge = \min$ ou $\wedge = \text{produto}$

Exemplo de composição de relações crisp

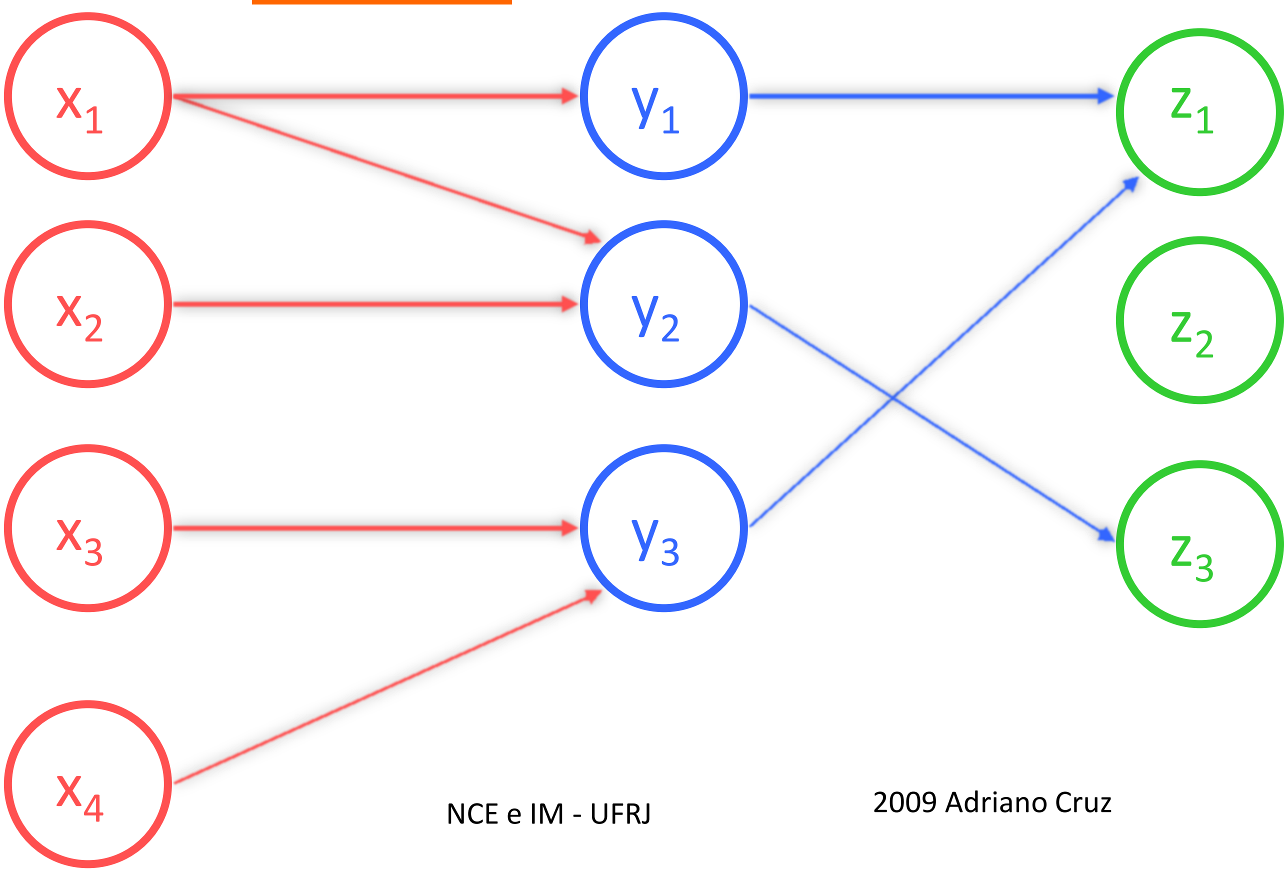
Exemplo 1

$P = X \times Y$

$Q = Y \times Z$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



continua ...

Exemplo de composição de relações crisp

Exemplo 1 ... continuação

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

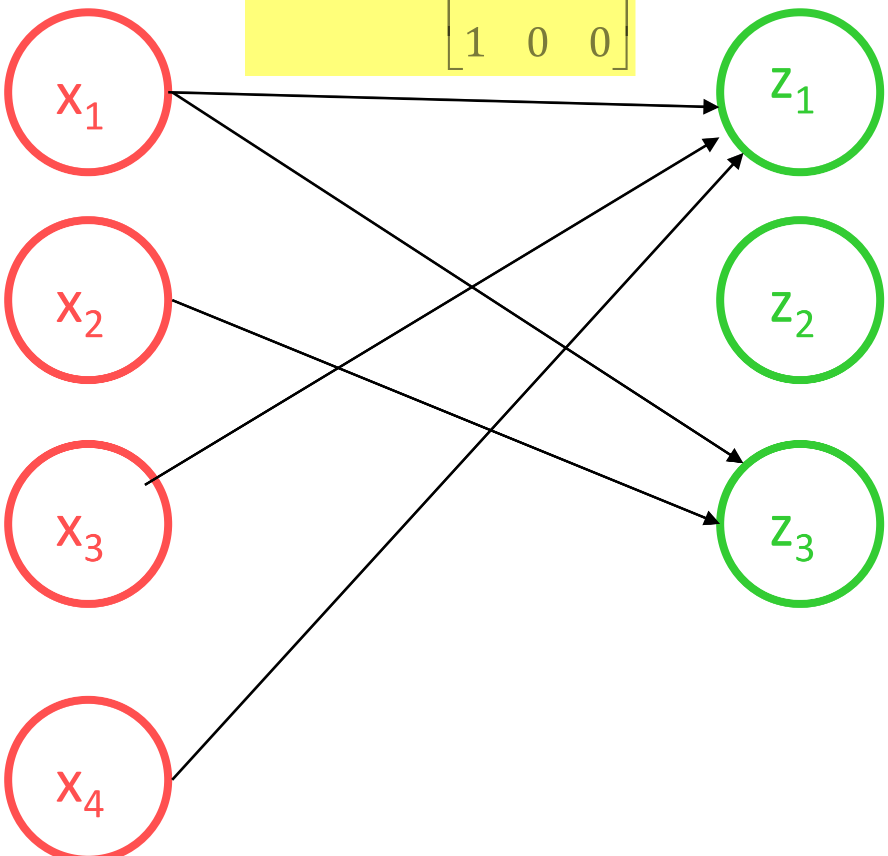
$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

continua ...

Exemplo de composição de relações crisp

Exemplo 1 ... continuação

$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Exemplo de composição de relações crisp

Exemplo 2

$$P(X,Y)= \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q(Y,Z)= \begin{array}{c} \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow R(X,Z)= \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de composição de relações crisp

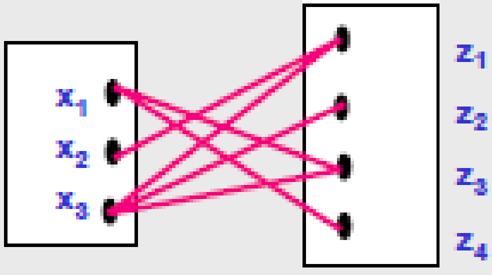
Exemplo 3

- *Exemplo (caso crisp):*

$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$

$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$R(X,Z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Relações difusas
Relações *fuzzy*

Relações difusas

- A relação difusa é um conjunto difuso definido no produto cartesiano de conjuntos crisp A_1, A_2, ..., A_n, onde n-úplas (x_1, x_2, ..., x_n) podem ter vários graus de pertinência na relação.

- O grau de pertinência indica a força da relaçào entre os elementos da n-úpla.

$$\mu_R : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightarrow [0,1]$$
$$R = \left\{ ((x_1, x_2, ..., x_n), \mu_R) \mid \mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n \right\}$$

Relações difusas

A ***relação fuzzy*** *R (X,Y)* é um **conjunto fuzzy** caracterizado pela função de pertinência

$$\mu_R(x,y) \qquad x \in X \text{ e } y \in Y$$

$$\Downarrow$$

$$R(X,Y) = \{ [(x,y) , \mu_R(x,y)] \,/\, (x,y) \in X \times Y \}$$

Exemplo de relação difusa

Exemplo 1

$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{8, 2, 10\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{2, 0, 4, 3\}$

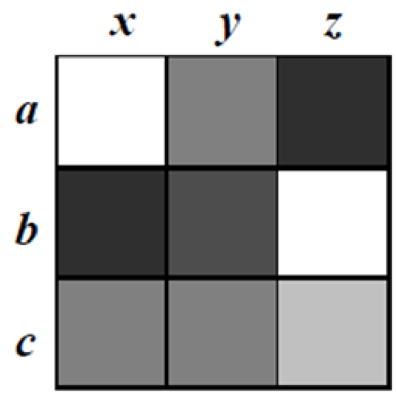
$R(X,Y)$ = x é muito maior do que y

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo de relação difusa

Exemplo 2

$$R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$



Exemplo de relação difusa

Exemplo 3

$X = \{x_1, x_2\}$ = {Fortaleza, Florianópolis}

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ = {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba}

R: "muito próxima".

Matriz Relacional para o caso *crisp*

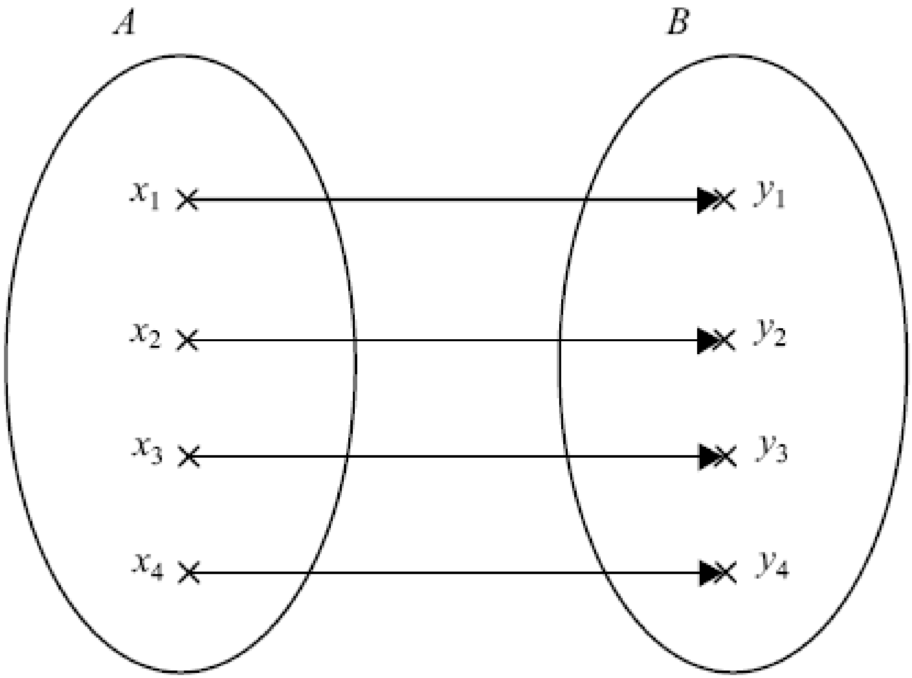
		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

Matriz Relacional para o caso *fuzzy*

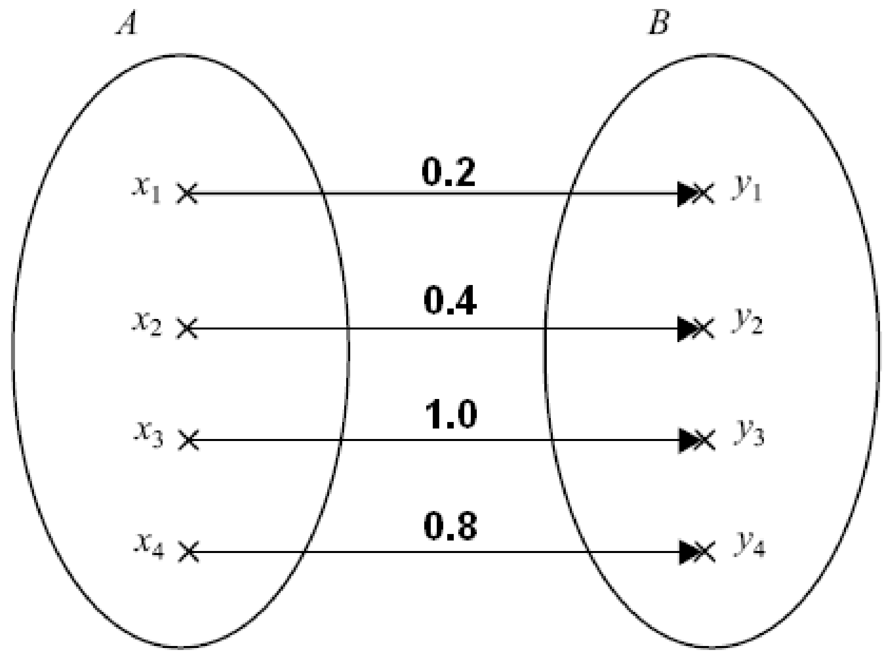
		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1	0,8

Representação de relação difusa

Representação por grafo bi partido



(Crisp)



(Difuso)

Representação de relação difusa

Representação por Matriz

A \ B	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	1	0
x_2	1	0	0	0
x_3	0	1	0	1
x_4	0	0	0	0

(Crisp)

A \ B	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.0	0.0	0.8	0.0
x_2	1.0	0.0	0.0	0.0
x_3	0.0	0.9	0.0	1.0
x_4	0.0	0.0	0.0	0.0

(Difuso)

Operações com relações difusas

OBSERVAÇÃO:

– Como **as relações fuzzy** são também **conjuntos fuzzy**, **as operações com essas relações** podem ser definidas utilizando os operadores de **UNIÃO**, **INTERSEÇÃO** e **COMPLEMENTO**.

União:

$$R \cup S \rightarrow \mu_{R \cup S}(x,y) = \max\left[\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right]$$

Interseção:

$$R \cap S \rightarrow \mu_{R \cap S}(x,y) = \min\left[\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right]$$

Complementar:

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

Relação difusa de união

Exemplo de união de duas relações difusas

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.0	1.0	0.0

M_S	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.6	0.9	0.3

$M_{R \cup S}$	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.6	1.0	0.3

Relação difusa de interseção

Exemplo de interseção de duas relações difusas

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.0	1.0	0.0

M_S	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.6	0.9	0.3

$M_{R \cap S}$	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.0	0.9	0.0

Relação difusa do complementar

Exemplo de relação difusa complementar

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.0	1.0	0.0

$M_{\bar{R}}$	a	b	c
1	0.7	0.8	0.0
2	0.2	0.0	0.0
3	1.0	0.0	1.0

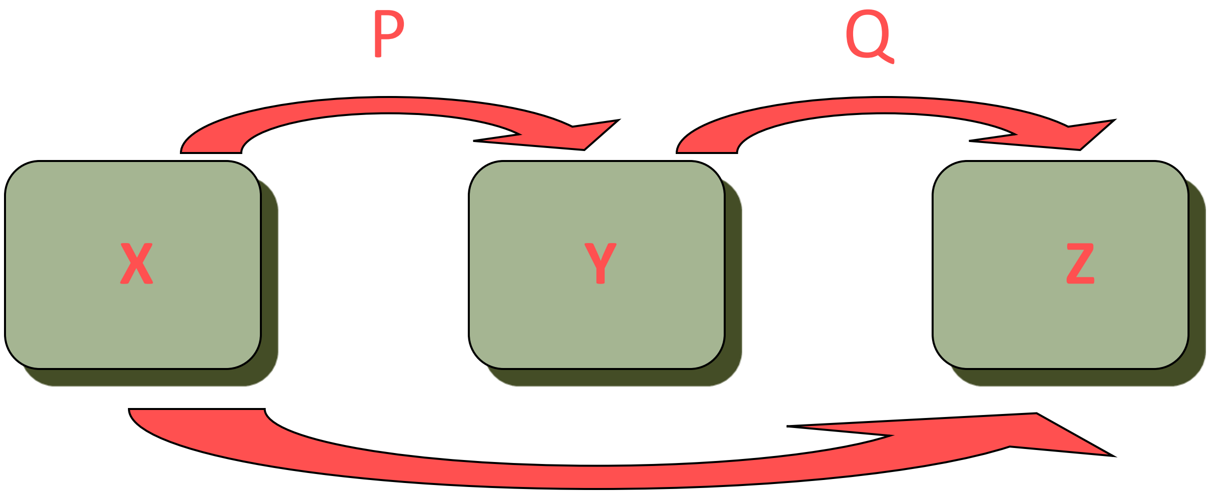
Propriedades das operações difusas

Comutativa	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idempotência	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Identidade	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
	$A \cup X = X$
	$A \cap X = A$

Meios Excluídos	$A \cup \overline{A} \neq E$
	$A \cap \overline{A} \neq \varnothing$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Composição de relações difusas



R=P o Q

Composição de relações difusas

Definição

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \mu_R(x,z) = \underset{y}{\vee}\left(\mu_P(x,y) \wedge \mu_Q(y,z)\right)$$

A composição R = P o Q pode ser executada usando diferentes métodos, tais como:

- **max-min:** $\mu_R(x,z) = \max\{\min[\ \mu_P(x,y),\ \mu_Q(y,z)]\}$
- **max-produto:** $\mu_R(x,z) = \max\{\mu_P(x,y) \times \mu_Q(y,z)\}$
- **min-max:** $\mu_R(x,z) = \min\{\max[\mu_P(x,y),\ \mu_Q(y,z)]\}$
- **max-max:** $\mu_R(x,z) = \max\{\max[\mu_{P'}(x,y),\ \mu_Q(y,z)]\}$
- **min-min:** $\mu_R(x,z) = \min\{\min[\ \mu_P(x,y),\ \mu_Q(y,z)]\}$

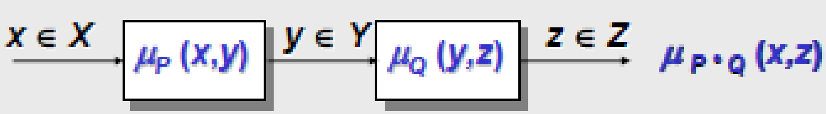
Composição de relações difusas

Composição *fuzzy* → faz-se uma generalização do caso não-fuzzy

$$\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \sup_{y} \left[\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z) \right]$$

- a norma-t é *usualmente* o *min* ou o *produto*
- para universos finitos, o *sup* é o *max*

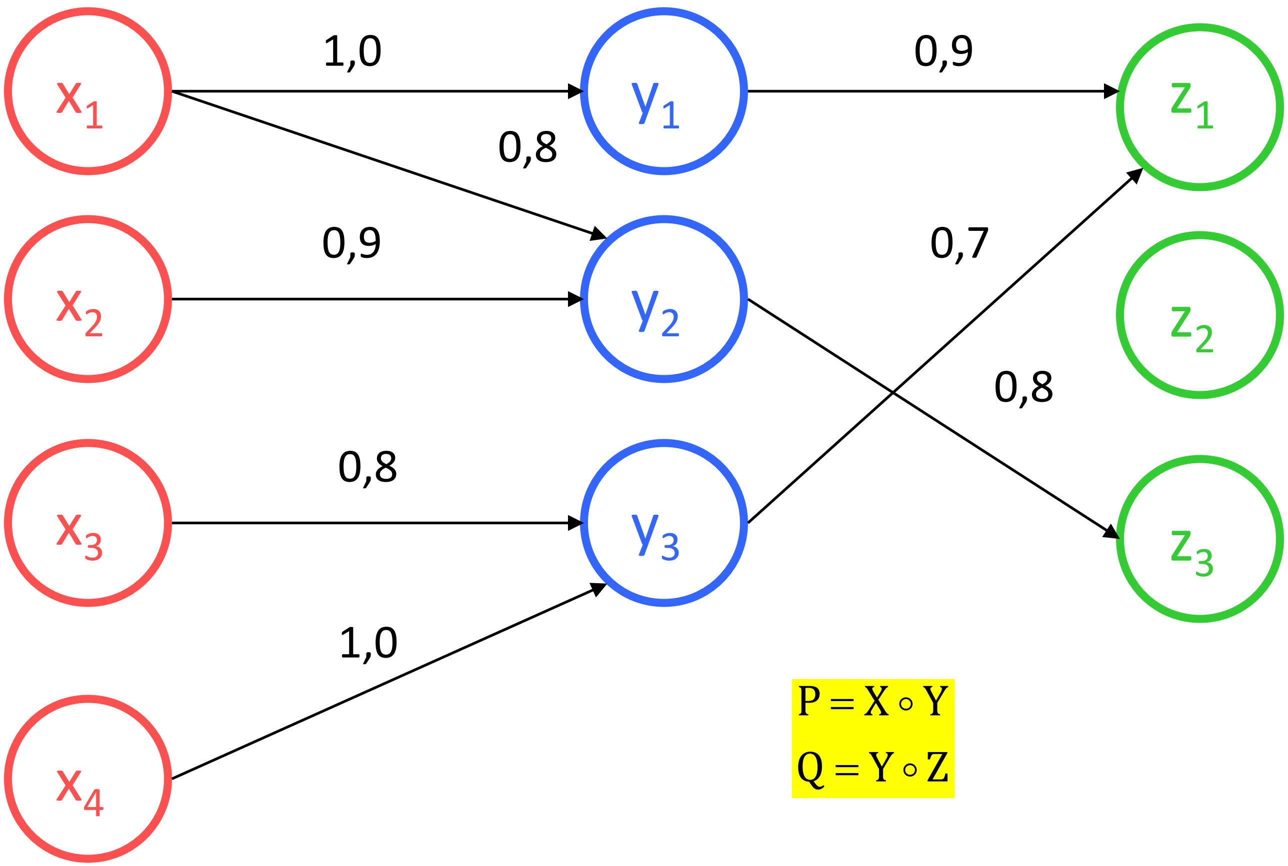
Interpretação gráfica:



Obs.: o procedimento de "*multiplicação de matrizes*" aplica-se também ao caso *fuzzy*

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 1



$$P = X \circ Y$$
$$Q = Y \circ Z$$

continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 1 ... continuação

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_R(x_1, z_1) = [(1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}8 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0{,}7)]$$

$$P \circ Q = \begin{bmatrix} 0{,}9 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0{,}8 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0{,}8 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0{,}7 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0{,}7 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

continua...

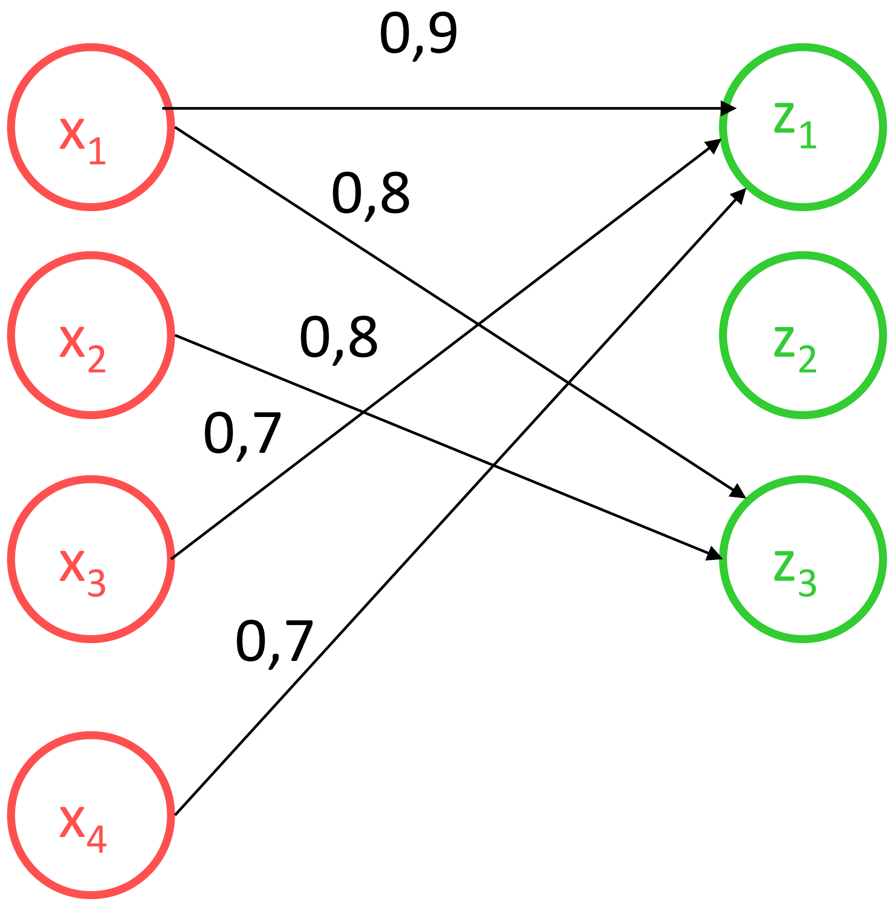
Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 1 ... continuação

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

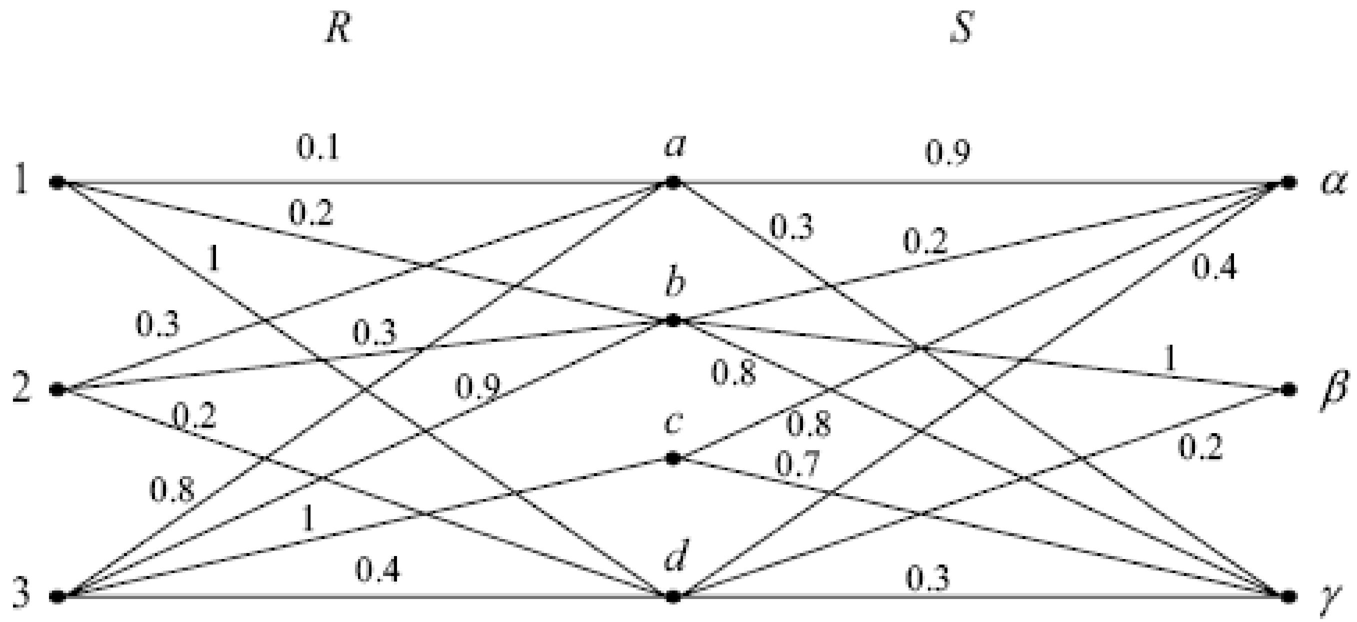


Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 2

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3



continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 2 ... continuação

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

$$\mu_{S \bullet R}(1, \alpha) = \max[\min(0.1, 0.9), \min(0.2, 0.2), \min(0.0, 0.8), \min(1.0, 0.4)]$$
$$= \max[0.1, 0.2, 0.0, 0.4] = 0.4$$

continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 2 ... continuação

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

$$\begin{aligned}\mu_{S \bullet R}(1,\ \beta) &= \max[\min(0.1, 0.0), \min(0.2, 1.0), \min(0.0, 0.0), \min(1.0, 0.2)] \\ &= \max[0.0, 0.2, 0.0, 0.2] = 0.2\end{aligned}$$

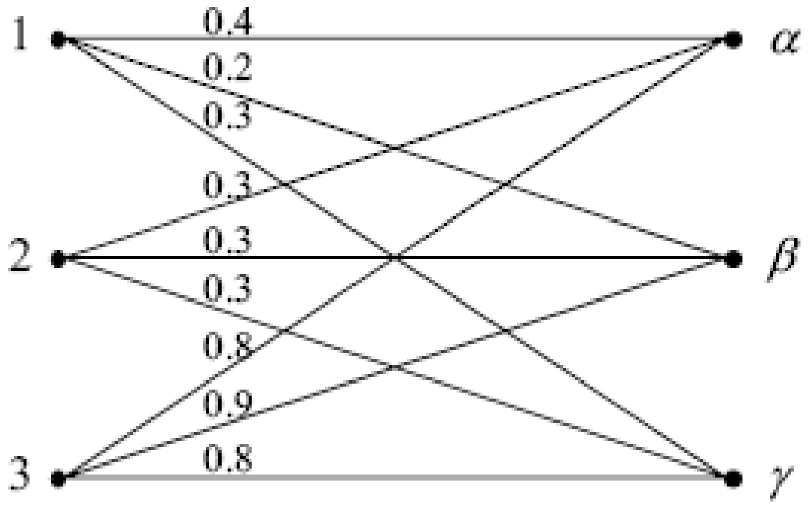
continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 2 ... continuação

S•R	α	β	γ
1	0.4	0.2	0.3
2	0.3	0.3	0.3
3	0.8	0.9	0.8

$S \bullet R$



Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 3

Sejam $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$ e $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$ e as relações R e S assim definidas

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y1 & y2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x1 \\ x2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y1 \\ y2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

– Composição max-min

$$\underset{\sim}{T} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x1 \\ x2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

– Composição max-produto

$$\underset{\sim}{T} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x1 \\ x2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.63 & 0.42 & 0.25 \\ 0.72 & 0.48 & 0.20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 4

Sejam $\mu_{Rse}(\%se) = \frac{0.3}{30} + \frac{0.7}{60} + \frac{1.0}{100} + \frac{0.2}{120}$ $\quad \mu_{Ia}(\%a) = \frac{0.2}{20} + \frac{0.4}{40} + \frac{0.6}{60} + \frac{0.8}{80} + \frac{1.0}{100} + \frac{0.1}{120}$

$$\mu_N(rpm) = \frac{0.33}{500} + \frac{0.67}{1000} + \frac{1.0}{1500} + \frac{0.15}{1800}$$

Produto cartesiano – composição max-min

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ 30 \\ 60 \\ 100 \\ 120 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 20 & 40 & 60 & 80 & 100 & 120 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \\ 120 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 500 & 1000 & 1500 & 1800 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.15 \\ 0.33 & 0.4 & 0.4 & 0.15 \\ 0.33 & 0.6 & 0.6 & 0.15 \\ 0.33 & 0.67 & 0.8 & 0.15 \\ 0.33 & 0.67 & 1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ 30 \\ 60 \\ 100 \\ 120 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 500 & 1000 & 1500 & 1800 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.15 \\ 0.33 & 0.67 & 0.7 & 0.15 \\ 0.33 & 0.67 & 1 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 5

Sejam

$$\underset{\sim}{R}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} N & C & T & E & J \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .6 & 1 \\ 0 & .1 & .5 & 1 & 0 \\ .4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & .2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\underset{\sim}{R}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} .01 & .1 & 1 & 10 & 100 \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ C \\ T \\ E \\ J \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & .4 & 1 & .3 & 0 \\ .2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .5 \\ 1 & .1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Usando a composição max-min

$$\underset{\sim}{R}_3 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} .01 & .1 & 1 & 10 & 100 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0.1 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & .1 & 0 & .6 & .5 \\ .1 & .1 & .5 & 1 & .5 \\ .2 & 1 & .7 & 1 & 0 \\ .2 & .4 & 1 & .3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 6

Sejam

$\underset{\sim}{B}$ = {hard word(HW), good manners(GM), high productivity(HP)}

$\underset{\sim}{P}$ = {nice to have around(NHA), makes the boss look good(MLG)}

$\underset{\sim}{R}$ = {public compliments(PC), good raise(GR)}

$$\underset{\sim}{R}_{P,B} = \begin{array}{c} \\ NHA \\ MLG \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} HW & GM & HP \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{R}_{R,P} = \begin{array}{c} \\ PC \\ GR \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} NHA & MLG \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Então

$$\underset{\sim}{R}_{R,B} = \begin{array}{c} \\ PC \\ GR \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} HW & GM & HP \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 7

- **Estudantes:**

  ***X* = {*Maria, João, Pedro*}**

- **Características de cursos**

  ***Y* = {*teoria, aplicação, hardware, programação*}**

- **Cursos**

  ***Z* = {*lógica fuzzy, controle fuzzy, redes neurais, sistemas especialistas*}**

– **Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:**

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

– **Características dos cursos:**

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{r} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 7 ... continuação

– Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

– Características dos cursos:

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

– A composição (*max-min*) pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$P \circ Q = \begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obs: *ao contrário deste exemplo*, a composição *max-produto* geralmente não produz o mesmo resultado!

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 8

– Example of max-min & max-product composition

- Let R_1 = "x is relevant to y"
  R_2 = "y is relevant to z"
  be two fuzzy relations defined on X*Y and Y*Z respectively
  X = {1,2,3}, Y = $\{\alpha,\beta,\chi,\delta\}$ and Z = {a,b}.

  Assume that:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

continua...

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 9 ... continuação

The derived fuzzy relation "x is relevant to z" based on R_1 & R_2

Let's assume that we want to compute the degree of relevance between $2 \in X$ & $a \in Z$

Using max-min, we obtain:

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \circ R_2}(2,a) &= \max\{0.4 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.2, 0.8 \wedge 0.5, 0.9 \wedge 0.7\} \\ &= \max\{0.4, 0.2, 0.5, 0.7\} \\ &= 0.7\end{aligned}$$

Using max-product composition, we obtain:

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \circ R_2}(2,a) &= \max\{0.4 * 0.9, 0.2 * 0.2, 0.8 * 0.5, 0.9 * 0.7\} \\ &= \max\{0.36, 0.04, 0.40, 0.63\} \\ &= 0.63\end{aligned}$$

Exemplo de composição de relações difusas

Exemplo 10

Seja C um conjunto fuzzy no universo do discurso {1, 2, 3} e R uma relação difusa binária em {1; 2; 3}. Assuma que C = 0,2/1 + 0,4/2 + 0,5/3 e R é dada na seguinte tabela

R	1	2	3
1	1	0,8	0,3
2	0,80	1	0,8
3	0,3	0,8	1

Seja a t-norma produto, utilizando a definição de composição temos

$$C \circ R = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C \circ R = 0{,}32/1 + 0{,}4/2 + 0{,}5/3}$$

Exercícios

In a water treatment process, we use a biological process to remove biodegradable organic matter. The organic matter is measured as the BOD, where the optimal BOD of effluent should be less than 20 mg l^{-1}. Let $\underset{\sim}{B}$ represent a fuzzy set "good effluent" on the universe of optical BOD values (20, 40, 60) as defined by the membership function

$$\mu_{\underset{\sim}{B}} = \frac{0.5}{60} + \frac{0.8}{40} + \frac{1.0}{20}.$$

continua na próxima página ...

...continuação da página anterior

The retention time is critical to a bioreactor; we try to find the retention time, measured in days. Let $\underset{\sim}{T}$ represent a fuzzy set called *optimal retention time* on the universe of days (6, 8, 10) as given by the membership function

$$\mu_{\underset{\sim}{T}} = \frac{0.9}{10} + \frac{0.6}{8} + \frac{0.4}{6}.$$

The utilization rate of organic food indicates the level of the treatment in the biological process, and this rate is measured on a universe of fractions from 0 to 1, where 1 is optimal. Fuzzy set $\underset{\sim}{U}$ will represent "high utilization rates," as defined by the membership function

$$\mu_{\underset{\sim}{U}} = \frac{1}{0.9} + \frac{0.8}{0.8} + \frac{0.6}{0.7} + \frac{0.4}{0.6}.$$

We can define the following relations:

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{T}$, which reflects how retention time affects BOD removal;
$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{T} \times \underset{\sim}{U}$, which relates how retention time affects organic food consumption; and
$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}$, which represents the BOD removal and food utilization.

(a) Find $\underset{\sim}{R}$ and $\underset{\sim}{S}$ using Cartesian products.
(b) Find $\underset{\sim}{W}$ using max–min composition.
(c) Find $\underset{\sim}{W}$ using max–product composition.

Exercícios

3.6. The relationship between temperature and maximum operating frequency R depends on various factors for a given electronic circuit. Let $\underset{\sim}{T}$ be a temperature fuzzy set (in degrees Fahrenheit) and $\underset{\sim}{F}$ represent a frequency fuzzy set (in megahertz) on the following universes of discourse:

$$\underset{\sim}{T} = \{-100, -50, 0, 50, 100\} \quad \text{and} \quad \underset{\sim}{F} = \{8, 16, 25, 33\}.$$

Suppose a Cartesian product between $\underset{\sim}{T}$ and $\underset{\sim}{F}$ is formed, which results in the following relation:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 16 \\ 25 \\ 33 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -100 & -50 & 0 & 50 & 100 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.9 & 0.4 \\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

continua na próxima página ...

...continuação da página anterior

The reliability of the electronic circuit is related to the maximum operating temperature. Such a relation $\underset{\sim}{S}$ can be expressed as a Cartesian product between the reliability index, $\underset{\sim}{M} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ (in dimensionless units), and the temperature, as in the following example:

$$\underset{\sim}{S} = \begin{array}{c} \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ 50 \\ 100 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Composition can be performed on any two or more relations with compatible row–column consistency. To find a relationship between frequency and the reliability index, use

(a) max–min composition

(b) max–product composition.

Exercícios

Suppose we have two fuzzy sets, A defined on a universe of three discrete temperature, X={x_1,x_2,x_3), and B defined on a universe of two discrete pressures, Y={y_1,y_1}. Let say, A represent ‘ambient’ temperature and B the ‘near optimum’ pressure and the Cartesian Product might represent the efficient condition of operation. Find the efficient condition ?

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} \qquad B = \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2}$$

Suppose we have two fuzzy sets, A and B

$$A = \frac{1}{LS} + \frac{0.4}{MS} + \frac{0.2}{HS} \qquad B = \frac{1}{SRR} + \frac{0.5}{MRR}$$

$$C = \frac{0.1}{LS} + \frac{0.3}{MS}$$

Find fuzzy relation, R=AxB, S=CxB

Exercícios

Suppose that we have the following relations R_1 and R_2 described by tables below

R_1 = x is larger than y

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1.0	0.1	0.7
x_2	0.0	0.8	0.0	0.0
x_3	0.9	1.0	0.7	0.8

R_2 = y very close to x

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0.0	0.9	0.6
x_2	0.9	0.4	0.5	0.7
x_3	0.3	0.0	0.8	0.5

Find $R_1 \cap R_2$ $\quad R_1 \cup R_2$

Exercícios

- Consider the following fuzzy relation:

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \text{where } R = \{u, \mu_R(u) \mid u \in U\}$$

- and a fuzzy set X given as follows:

  X= (0.6 0.5 1) where $X = \{v, \mu_X(v) \mid v \in V\}$

- Using the max-min composition, solve:

  $Y = X \circ R$

Also solve using:

- max-a. product
- max-bounded product
- max-drastic product

Try also:

- max-alg. sum
- max-bounded sum