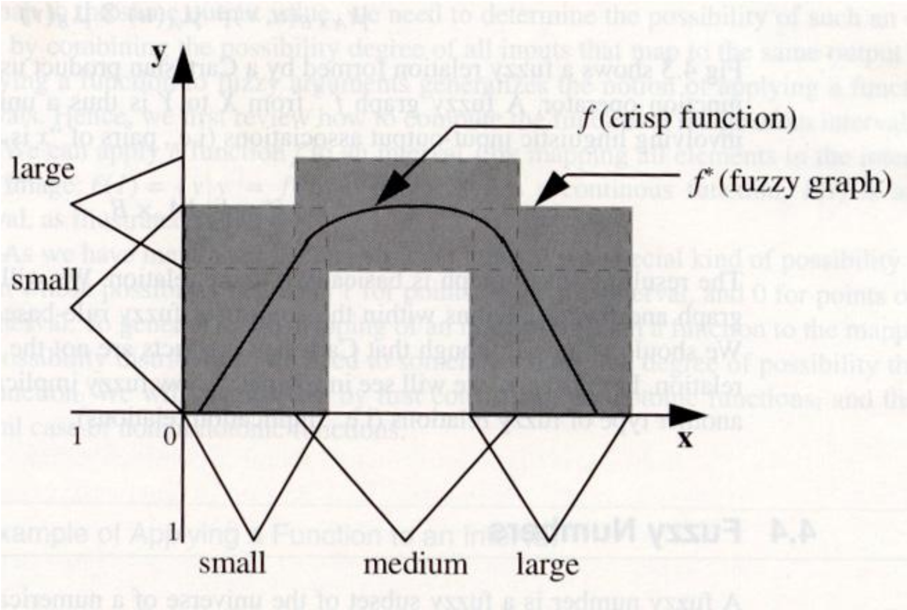
UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Princípio da Extensão)

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

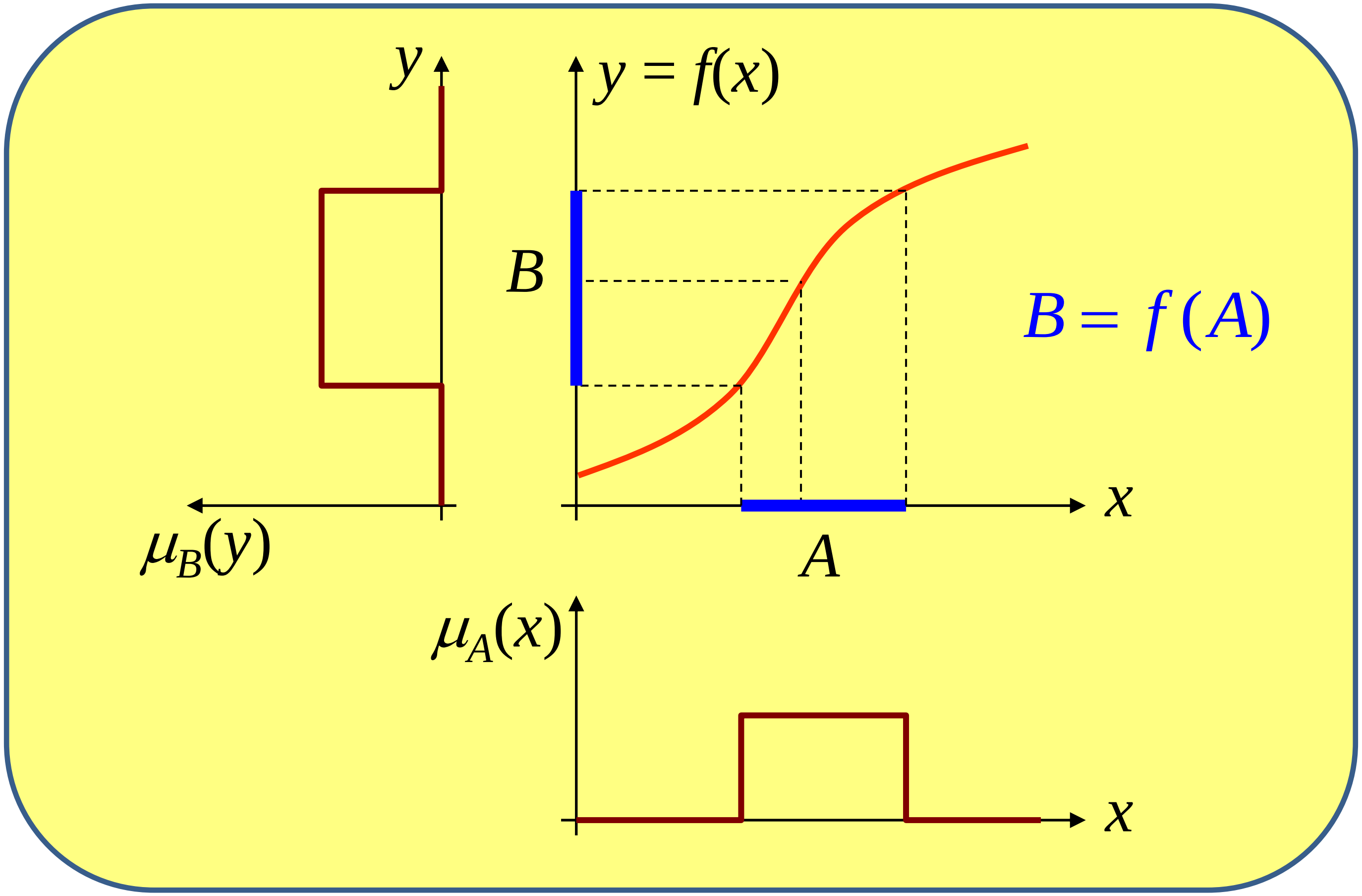
Gráficos difusos



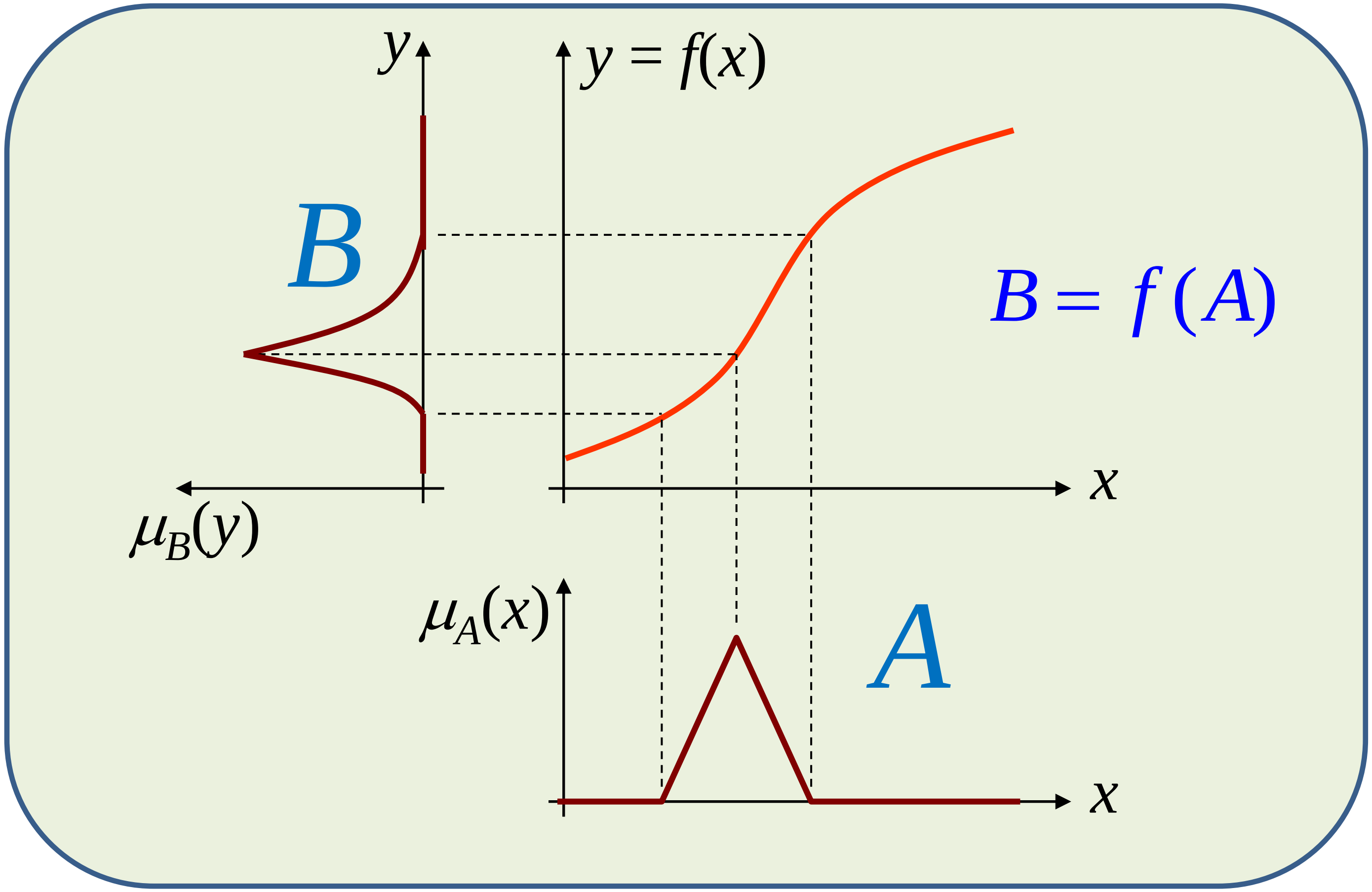
- Um gráfico difuso descreve um mapeamento funcional entre um conjunto de variáveis linguísticas de entrada e uma variável linguística de saída.
- *A fuzzy relation may not have a meaningful linguistic label.*
- *Most fuzzy relations used in real-world applications do not represent a concept, rather they represent a functional mapping from a set of input variables to one or more output variables.*
- *Fuzzy rules can be used to describe a fuzzy relation from the observed state variables to a control decision (using fuzzy graphs)*

Fuzzy Logic:Intelligence, Control, and Information, J. Yen and R. Langari, PrenticeHall

Funções aplicadas a conjuntos crisp



Funções aplicadas a conjuntos difusos



Princípio da extensão – conjuntos crisp

- Funções, tais como a função logarítmica, $y = \log(x)$, ou a função linear $y = ax + b$, são mapeamentos de um universo, X, a um outro universo, Y.

- Simbolicamente, este mapeamento (função f) é por vezes designado por $f: X \rightarrow Y$.

- Também denominado o mapeamento $y=f(x)$ de *imagem de x em f* e o mapeamento inverso, $x=f^{-1}(y)$, é denominado a *imagem original de y*.

Princípio da extensão – conjuntos crisp

- Um mapeamento também pode ser expressado por uma relação R, no espaço Cartesiano $X \times Y$.

- Uma tal relação (crisp) pode ser descrita simbolicamente por $R(x, y)|y = f(x)$, com a função característica que descreve a associação dos pares (x, y) para a relação R, tal como

$$\chi_R(x,y) = \begin{cases} 1, & y = f(x) \\ 0, & y \neq f(x) \end{cases}$$

- Para um conjunto A definido no universo X, a sua imagem, o conjunto B sobre o universo Y, é encontrado a partir do mapeamento, $B=f(A)=y|\forall x \in A, y=f(x)$, em que B será definida pelo seu valor característico

$$\chi_B(y) = \chi_{f(A)}(y) = \bigcup_{y=f(x)} \chi_A(x)$$

Princípio da extensão – conjuntos crisp

Exemplo 1: Seja o conjunto crisp A = {0, 1}, ou alternativamente A = 0/-2+0/-1+1/0+1/1 +0/2}, definido no universo X={-2,-1,0,1,2} e seja o mapeamento y=|4x|+2. Desejamos determinar o conjunto crisp B usando o princípio da extensão.

Considerando o conjunto universo X, temos Y = {2,6,10}.

Considerando o domínio A, o mapeamento irá produzir os seguintes cálculos para os valores de pertinência de cada um dos elementos do universo Y:

$\chi_B(2) = \vee\{\chi_A(0)\} = 1$
$\chi_B(6) = \vee\{\chi_A(-1), \chi_A(1)\} = \vee\{0, 1\} = 1$
$\chi_B(10) = \vee\{\chi_A(-2), \chi_A(2)\} = \vee\{0, 0\} = 0$

Então B = 1/2 + 1/6 + 0/10

Ou B = {2,6}

Princípio da extensão – conjuntos crisp

Exemplo 2 (Relação difusa): Seja o conjunto crisp A = 0/-2+0/-1+1/0+1/1+0/2, definido no universo X={-2,-1,0,1,2} e seja a função y=|4x|+2 com Y={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Queremos determinar o conjunto crisp B usando o princípio da extensão.

A relação que desecreve este mapeamento é

$$\mathrm{R} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A imagem B podem ser encontrada através da composição (pois X e Y são finitos): isto é, B = A $\circ$ R

B = 0/0+0/1+1/2+0/3+0/4+0/5+1/6+0/7+0/8+0/9+0/10

B = 1/2+1/6

Princípio da extensão – conjuntos difusos

- Fornece um procedimento geral para estender expressões matemáticas em domínios crisp para domínios difusos.

- Generaliza um mapeamento ponto-a-ponto de uma função *f*(.) a um mapeamento entre conjuntos *fuzzy*.

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Exemplo 1:

Seja A = {(-1, 0,5), (0, 0,8), (1, 1), (2, 0,4)} e $f(x)=x^2$

Aplicando o princípio da extensão, obtem-se

B = {(0, 0,8), (1, 1), (4, 0,4)}

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Exemplo 2: Suponha que temos um mapeamento difuso, f, dada pela seguinte relação difusa, R

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1{,}4 & 1{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \end{array} \text{ m} \\ \begin{array}{c} 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ \text{kg} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

que representa um mapeamento difuso entre o comprimento e massa de particulas de teste programados para o vôo em um experimento de espaço. O mapeamento é difuso por causa da complicada relação entre massa e o custo para enviar a massa para o espaço, as restrições sobre o comprimento das partículas de teste montados na seção de carga da nave espacial, e o valor científico do experimento. Suponha que um experimento está sendo planejado para o vôo, mas os requisitos de massa específicos ainda não foram determinados. Para fins de planejamento, a massa (kg) se presume ser uma quantidade difusa descrita pela seguinte função de pertinência:

continua...

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Exemplo 2 ... continuação

a=0,8/40 + 1/50 + 0,6/60 + 0,2/70 + 0/80

A imagem difusa B pode ser encontrada usando o princípio da extensão (ou, equivalente, composição para esse mapeamento difuso), b = a $\circ$ R. Esta composição resulta em um vetor de saída difuso descrevendo a imprecisão no comprimento do objeto (em metros), para ser utilizado para efeitos de planeamento:

b = a $\circ$ R = 0,8/1,4 + 1/1,5 + 0,8/1,6 + 0,6/1,7 + 0,2/1,8 m.

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Definição

Seja f um mapeamento de X para o universo Y, então o princípio da extensão permite definir um conjunto difuso B em Y através de

$$B = f(A) = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x), x \in X\}$$

onde

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Generalização

Seja $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ e $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos difusos em $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ respectivamente. Seja f um mapeamento de X para o universo Y, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
Então o princípio da extensão nos permite definir um conjunto difuso B em Y através de

$$B = f(A) = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_n) \in X\}$$

onde

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{(x_1, x_2, ..., x_n) \in f^{-1}(y)} \min \{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n)\}, & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Princípio da extensão – conjuntos difusos

Suponha que f é uma função de X em Y, e A é um conjunto difuso em X definido por

$$A = \mu_A(x_1)/(x_1) + \mu_A(x_2)/(x_2) + \ldots . + \mu_A(x_n)/(x_n)$$

Então o princípio de extensão afirma que a imagem do conjunto difuso A sob o mapeamento $f(.)$ pode ser expressado como um conjunto difuso B,

$$B = f(A) = \mu_A(x_1)/(y_1) + \mu_A(x_2)/(y_2) + \ldots . + \mu_A(x_n)/(y_n)$$

onde $y_i = f(x_i)$, $i=1,\ldots,n$. Se $f(.)$ é um mapeamento *many-to-one* então

$$\mu_B(y) = \max_{x=f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

Princípio da extensão

Exemplo 1

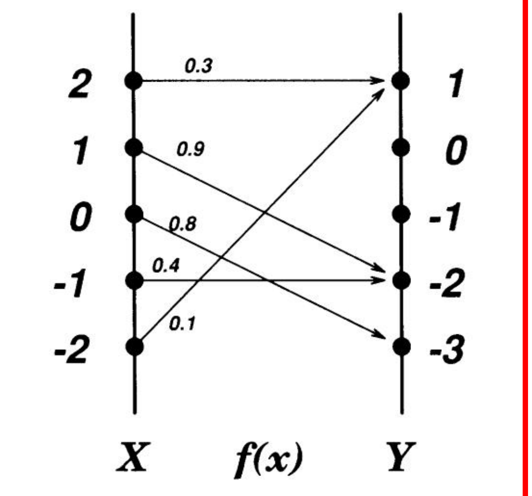
Seja A=0,1/-2+0,4/-1+0,8/0+0,9/1+0,3/2 e $f(x) = x^2-3$

Após a aplicação do princípio da extensão, temos

B = 0,1/1 + 0,4/-2 + 0,8/-3 + 0,9/-2 + 0,3/1 =

= 0,8/-3+max(0,4; 0,9)/-2+max(0,1; 0,3)/1 =

= 0,8/-3 + 0,9/-2 + 0,3/1



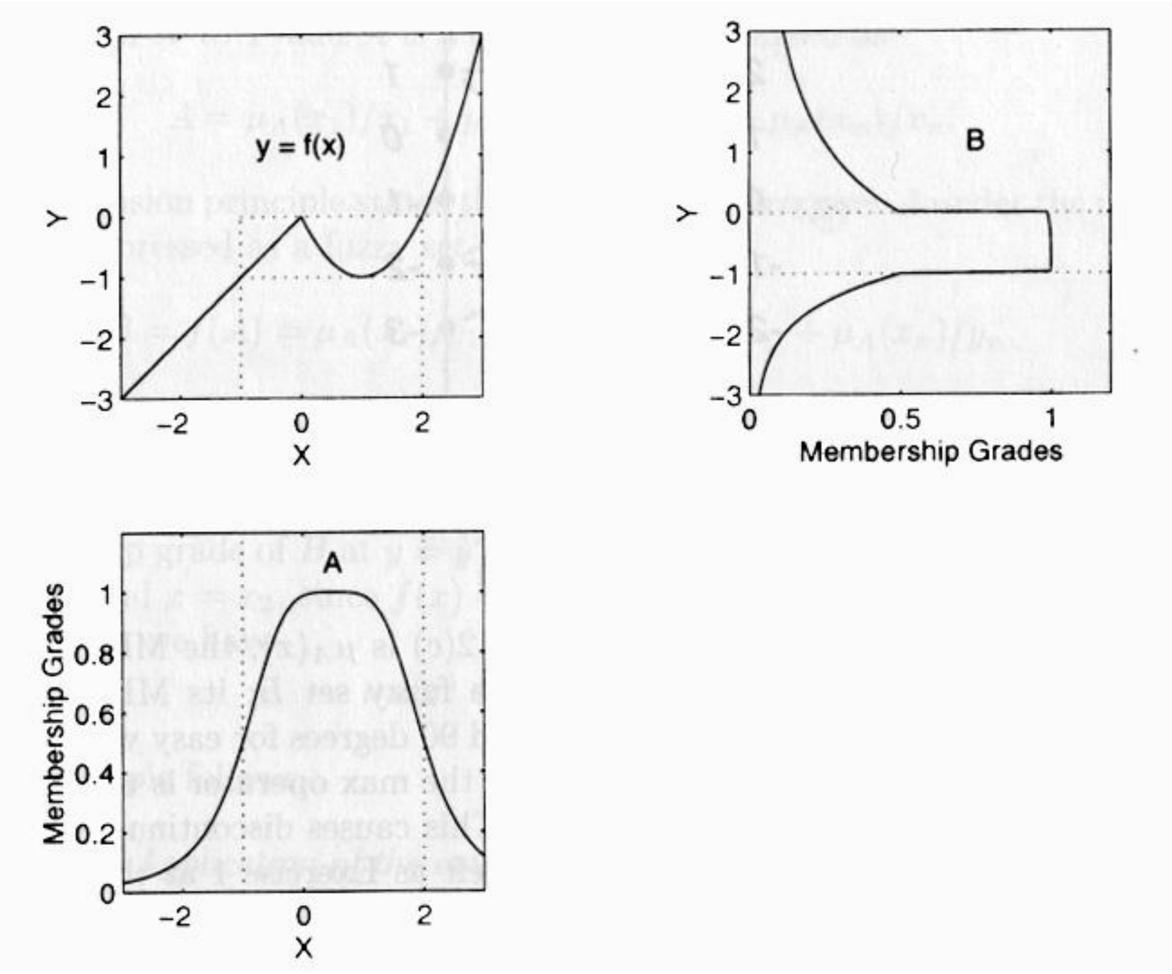
Neuro-Fuzzy and Soft Computing, J. Jang, C. Sun, and E. Mitzutani, Prentice Hall

Princípio da extensão

Exemplo 2

Seja $\mu_A(x)$ = bell(x;1.5,2,0.5) e

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2-1, & \text{if } x >= 0 \\ x, & \text{if } x <= 0 \end{cases}$$

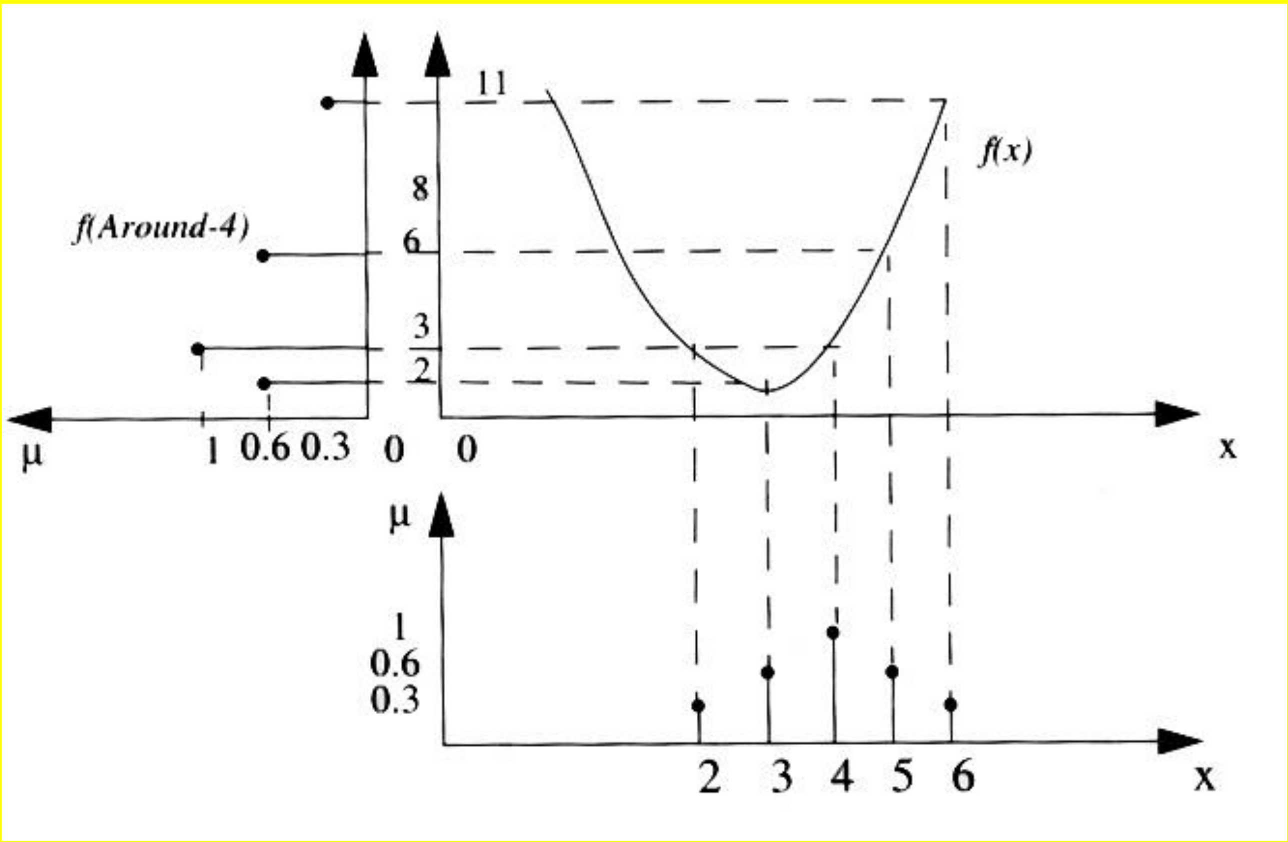


Neuro-Fuzzy and Soft Computing, J. Jang, C. Sun, and E. Mitzutani, Prentice Hall

Princípio da extensão

Exemplo 3

"Próximo de 4" = 0,3/2 + 0,6/3 + 1/4 + 0,6/5 + 0,3/6 e $y = f(x) = x^2 - 6x + 11$

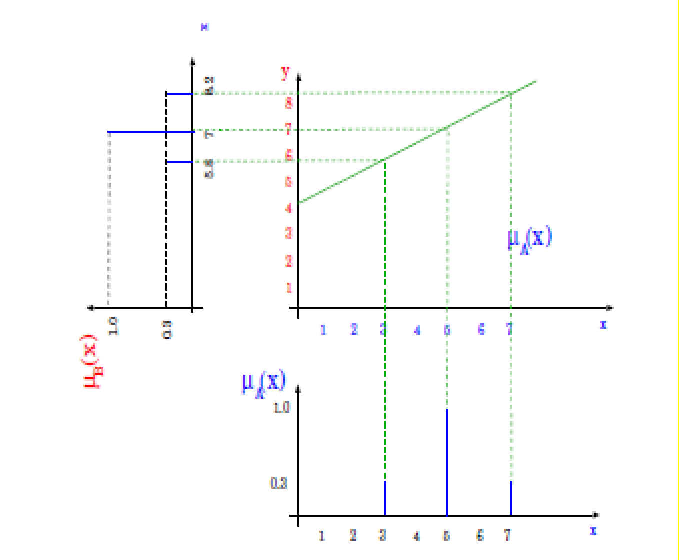


Fuzzy Logic:Intelligence, Control, and Information, J. Yen and R. Langari, PrenticeHall

Princípio da extensão

Exemplo 4

- Function: $y = f(x) = 0.6 * x + 4$.
- Input: Fuzzy number - *around*-5.
- $around - 5 = \{\frac{0.3}{3} + \frac{1.0}{5} + \frac{0.3}{7}\}$.
- $f(around - 5) = \{\frac{0.3}{f(3)} + \frac{1}{f(5)} + \frac{0.3}{f(7)}\}$.
- $f(around - 5) = \{\frac{0.3}{0.6*3+4} + \frac{1}{0.6*5+4} + \frac{0.3}{0.6*7+4}\}$.
- $f(around - 5) = \{\frac{0.3}{5.8} + \frac{1}{7} + \frac{0.3}{8.2}\}$.

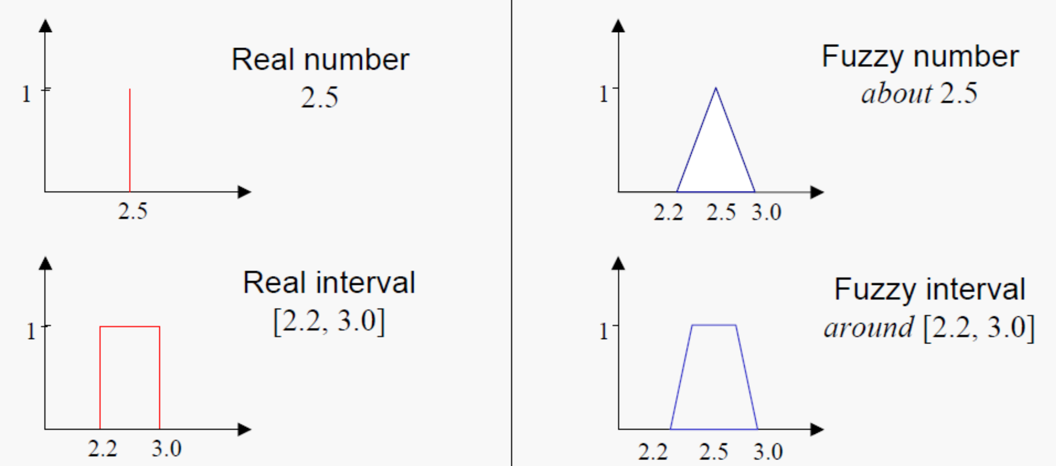


Princípio da extensão

Exemplo 5

- Function: $y = f(x) = x^2 - 6 * x + 11$.
- Input: Fuzzy number - *around*-4.
- $around - 4 = \{\frac{0.3}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.3}{6}\}$.
- $f(around - 4) = \{\frac{0.3}{f(2)} + \frac{0.6}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \frac{0.6}{f(5)} + \frac{0.3}{f(6)}\}$.
- $f(around - 4) = \{\frac{0.3}{3} + \frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.3}{11}\}$.
- $f(around - 4) = \{\frac{0.3 \vee 1}{3} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.3}{11}\}$.
- $f(around - 4) = \{\frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.3}{11}\}$.

Números difusos e intervalos difusos e operações



Arithmetic operations with closed intervals are:

$$[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e]$$

$$[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d]$$

$$[a,b].[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\max(ad,ae,bd,be)]$$

$$[a,b]/[d,e]=[a,b].[1/e,1/d]=[\min(a/d,a/e,b/d,b/e),\max(a/d,a/e,b/d,b/e)]$$

$$0\notin[d,e]$$

Operações aritméticas com números difusos

Exemplo

Sejam A e B dois números inteiros difusos definidos como

A = 0,3/1 + 0,6/2 + 1/3 + 0,7/4 + 0,2/5
B = 0,5/10 + 1/11 + 0,5/12

Então:

F(A+B) = 0,3/11+ 0,5/12 + 0,5/13 + 0,5/14 +0,2/15 +
0,3/12 + 0,6/13 + 1/14 + 0,7/15 + 0,2/16 +
0,3/13 + 0,5/14 + 0,5/15 + 0,5/16 +0,2/17

Usando o operador max para valores de não únicos,

F(A+B) = 0,3/11 + 0,5/12 + 0,6/13 + 1/14 + 0,7/15 + 0,5/16 + 0,2/17

Fuzzy Logic:Intelligence, Control, and Information, J. Yen and R. Langari, PrenticeHall

Princípio da extensão

Observações

- Um gráfico difuso é uma relação difusa formado por pares de produtos cartesianos de conjuntos fuzzy

- O princípio de extensão permite que um conjunto difuso seja mapeado através de uma função

- Adição, subtração, multiplicação e divisão de números difusos são todos definidos com base no princípio da extensão

- Dada uma fórmula f(x) e um conjunto fuzzy A definida por $\mu_A(x)$, como podemos calcular a função de pertinência de f (A)? -> Princípio da Extensão

Fuzzy Logic:Intelligence, Control, and Information, J. Yen and R. Langari, PrenticeHall

Exercícios

Given the following fuzzy numbers and using Zadeh's extension principle, calculate $\underset{\sim}{\mathrm{K}} = \underset{\sim}{\mathrm{I}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{J}}$ and explain (or show) why $\underset{\sim}{6}$ is nonconvex:

$$\underset{\sim}{\mathrm{I}} = \underset{\sim}{3} = \frac{0.2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.2}{4},$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{J}} = \underset{\sim}{2} = \frac{0.1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.1}{3}.$$

Fuzzy Logic with Engineering Applications: Timothy J. Ross, McGraw-Hill

Let $X = \{1, 2, 3, 4\}$ and $y = f(x) = x^2 + 1$. Given the fuzzy set A, with $A = 0.2/1 + 0.1/2 + 1.0/3 + 0.3/4$, compute the image $B = f(A)$. Sketch this transformation graphically.

Pedrycz, W. and Gomide F., An introduction to Fuzzy Sets, 1998, MIT Press

Exercise 4.4. Consider fuzzy set $A = 0.5/-1 + 0.8/0 + 1/1 + 0.4/2$ and function $f(x) = x^2$. Determine the fuzzy set $f(A)$ using the extension principle.

Li-Xin Wang

Exercícios

This problem makes use of Zadeh's extension principle. You are given the fuzzy sets $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$ on the real line as follows:

$\mu(x_i)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\underset{\sim}{A}$	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	0.7	0.2	0.0
$\underset{\sim}{B}$	0.0	1.0	0.9	0.5	0.2	0.1	0.0	0.0

If x and y are real numbers defined by sets $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$, respectively, calculate the fuzzy set $\underset{\sim}{C}$ representing the real numbers z given as

(a) $z = 3x - 2$
(b) $z = 4x^2 + 3$
(c) $z = x^2 + y^2$
(d) $z = x - x$
(e) $z = \min(x, y)$.

Fuzzy Logic with Engineering Applications: Timothy J. Ross, McGraw-Hill