UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Lógica Difusa)

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Lógica Difusa

*Fuzzy Logic is in fact, **a precise problem-solving methodology**.*

Lógica Difusa

➔ Raciocínio Aproximado

Raciocínio (*reasoning*) A capacidade de inferir informações sobre uma faceta desconhecida de um problema, a partir da informação disponível.

Lógica Difusa

Where does fuzzy logic come from?

Fuzzy logic was introduced by Professor Lofti Zadeh in 1965. He stated "As the complexity of a system increases, our ability to make precise and significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance become almost mutually exclusive characteristics".

"The closer ones looks at a real problem, the fuzzier becomes its solution".

Lógica Difusa

Brief history of FL

In the year 1987, the first subway system was built which worked with a fuzzy logic-based automatic train operation control system in Japan. It was a big success and resulted in a fuzzy boom.

For a long time, a lot of Western scientists have been reluctant to use fuzzy logic because they felt that it threatened the integrity of scientific thought. The term 'fuzzy' also didn't helped to spread the new approach.

Today, Fuzzy Logic concept used widely in many implementations like automobile engine & automatic gear control systems, air conditioners, video enhancement in TV sets, washing machines, mobile robots, sorting and handling data, Information Systems, Pattern Recognition (Image Processing, Machine Vision), decision support, traffic control systems and many, many others.

Lógica Difusa

Fuzzy logic makes use of human common sense. It lets novices (beginner) build control systems that work in places where even the best mathematicians and engineers, using conventional approaches to control, cannot define and solve the problem.

Fuzzy Logic approach is mostly useful in solving cases where no deterministic algorithm available or it is simply too difficult to define or to implement, while some intuitive knowledge about the behavior is present.

Fuzzy logic is used in system control and analysis design, because it shortens the time for engineering development and sometimes, in the case of highly complex systems, is the only way to solve the problem.

Fuzzy logic is the way the human brain works, and we can mimic this in machines so they will perform somewhat like humans (not to be confused with Artificial Intelligence, where the goal is for machines to perform EXACTLY like humans).

Lógica Difusa

- Técnica inteligente que tem como objetivo modelar o modo aproximado de raciocínio, imitando a habilidade humana de tomar decisões em um ambiente de incerteza e imprecisão.
- Permite que os sistemas inteligentes de controle e suporte à decisão lidem com informações imprecisas ou nebulosas
- Inspirada na lógica tradicional.
- Procura modelar os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões.
- Serve de base para o raciocínio aproximado (*approximate reasoning*).
- Fornece o ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago.

Lógica Difusa

- **Aplicações em diversas áreas do conhecimento**
  - Controle
    - diretamente sobre o processo
    - supervisão
  - previsão de séries
  - classificação

- **Principais vantagens**
  - formulação através de regras linguísticas
  - não necessita de modelo matemático formal

- **Regras linguísticas**
  - obtidas através de especialistas
  - geradas através de dados numéricos

Lógica Difusa – Algumas Aplicações

- **Controle**
  - Controle de Aeronave (Rockwell Corp.)
  - Operação do Metrô de Sendai (Hitachi)
  - Transmissão Automática (Nissan, Subaru)
  - Space Shuttle Docking (NASA)

- **Otimização e Planeja**mento
  - Elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubishi)
  - Análise do Mercado de Ações (Yamaichi)

- **Análise de Sinais**
  - Ajuste da Imagem de TV (Sony)
  - Autofocus para Câmera de Vídeo (Canon)
  - Estabilizador de Imagens de Vídeo (Panasonic)

1000 patentes envolvendo Lógica Difusa já foram anunciadas

Aplicações Industriais

- ***NISSAN***: freios antiderrapantes
- ***GM***: sistema de transmissão nebuloso
- ***SANYO***: microondas
- ***SHARP***: refrigeração
- ***BOSCH***: máquinas de lavar
- ***HITACHI***: aspirador
- ***PANASONIC***: camcorder

Aplicações Comerciais

- **Yamaichi Securities:** Sistema de Gerenciamento de Fundos de Investimento
- **Fuji Bank:** Sistema de Negociação de Bolsa de Valores
- **World Bank:** Sistema de Investimento
- **Metus Systems:** Sistema fuzzy de detecção de fraude no sistema de saúde

Regras Clássicas *versus* Regras Difusas

Implicações/Regras Clássicas - Crisp

- Uma regra **SE-ENTÃO** clássica usa a lógica binária, por exemplo,

  Regra 1: **SE velocidade > 100 ENTÃO distância_parada é 100**

  Regra 2: **SE velocidade < 40 ENTÃO distância_parada é 20**

- A variável velocidade pode assumir qualquer valor numérico entre **0** e **220** km/h, mas a variável linguística **distância_parada** pode assumir ou o valor **100** ou **20**.

- Em outras palavras, as regras clássicas são expressos na língua "preto-e-branco" da lógica booleana.

Regras Clássicas *versus* Regras Difusas

Implicações/Regras Difusas

- Pode-se também representar as regras de **distância de parada** de forma difusa:

Regra 1: **SE** **velocidade** é **rápido**, **ENTÃO** **distância_parada** é **longa**

Regra 2: **SE** **velocidade** é **lenta**, **ENTÃO** **distância_parada** é **curta**

- Em regras fuzzy, a variável linguística **velocidade** tem também o intervalo (universo de discurso) entre **0** e **220**Km/h, mas esta gama inclui conjuntos fuzzy, como **lento**, **médio** e **rápido**.
- O universo de discurso da variável linguística **distância_parada** pode estar entre **0** e **300**m, e pode incluir conjuntos difusos como **curta**, **média** e **longa**.
- Regras difusas relacionam conjuntos difusos.
- Em um sistema difuso, todas as regras disparam até certo ponto, ou em outras palavras, disparam parcialmente. Se o antecedente é verdadeiro em algum grau de pertinência, então o conseqüente também é verdadeiro para o mesmo grau.

Lógica Proposicional Crisp

Lógica Proposicional Crisp

Proposições

Uma **proposição é uma afirmação passível** de assumir valor lógico *verdadeiro ou falso;*

Toda proposição é verdadeira **OU** falsa (*princípio do terceiro excluído*);

Uma proposição não pode ser verdadeira **E** falsa (*princípio da não-contradição*).

Lógica Proposicional Crisp

Proposições simples - exemplos

Todos os animais são mamíferos.

Quero mais café!

Traduz um desejo. Logo, não é uma proposição e, portanto, não podemos atribuir um valor lógico.

Ele é médico.

Não é uma proposição, pois a palavra "ele" não esclarece de quem se fala e, portanto, não se pode atribuir valor lógico à declaração.

$x + y \geq 5$

Também não é uma proposição já que depende dos valores de x e y

Embora todas as sentenças anteriores façam parte da nossa linguagem usual, estamos interessados apenas naquelas que possam ser classificadas em verdadeiras ou falsas.

Proposições compostas - exemplos

Amanhã é sábado **E** Eliete é professora.

José completou 20 anos **OU** Carlos não sabe dirigir.

Roma é a capital italiana **ENTÃO** $7 \times 6 = 42$.

Lógica Proposicional Crisp

Sejam os conjuntos A e B definidos no universo X. Seja a proposição p que mede o grau verdade ν de que x é elemento de A e a verdade ν da declaração q de que x é elemento de B.

Tabela verdade

$\nu(p)$	$\nu(q)$	$\nu(p \wedge q)$	$\nu(p \vee q)$	$\nu(\sim q)$	$\nu(p \to q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

O ponto fundamental em assinalar “valores-verdade” para proposições compostas é que permite o uso da lógica para decidir a verdade (ν) de uma proposição composta usando somente o conhecimento das partes.

Lógica Proposicional Crisp

Tabela Verdade Crisp

$\nu(p)$	$\nu(q)$	$\nu(p \land q)$	$\nu(p \lor q)$	$\nu(\sim q)$	$\nu(p \rightarrow q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

$\chi(p)$	$\chi(q)$	$\chi(p \land q)$	$\chi(p \lor q)$	$\chi(\sim p)$	$\chi(p \rightarrow q)$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

onde χ é a função característica que representa a verdade (1) e a falsidade (0)

Lógica Proposicional Crisp

Tabela Verdade

$\nu(p)$	$\nu(q)$	$\nu(p \to q)$	$\nu(\sim[p \wedge \sim q])$	$\nu(\sim p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tautologias*: $(p \to q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow \chi_{p\to q}(x,y) = 1 - \min[\chi_p(x), 1 - \chi_q(y)]$

$(p \to q) \leftrightarrow \sim p \vee q \Rightarrow \chi_{p\to q}(x,y) = \max[1 - \chi_p(x), \chi_q(y)]$

$\chi_p(x)$	$\chi_q(y)$	$\chi_{p \to q}(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

***Tautologia:** proposição sempre verdadeira formada pela combinação de outras proposições

Lógica Proposicional Crisp

Implicações

$p \to q$

<u>p é a hipótese</u>, o antecedente ou a premissa.

<u>q é a conclusão</u>, ou consequência.

$\nu(p \to q) = V$ ou $\nu(p \to q) = F$

Exemplos

p: 2 é um número par (V)

q: 6 é múltiplo de 3 (V),

Se 2 é par, então 6 é múltiplo de 3 $\nu(p \to q) = V$

p: 4 é ímpar (F)

q: 3 é par (F)

$\nu(p \to q) = V$

OBS: quando o valor lógico da proposição p é falso, temos que a condicional é automaticamente verdadeira (não depende do valor lógico de q). Isto se justifica pelo fato de que se p é falsa, qualquer conclusão pode se tirar daí, verdadeira ou falsa. Por exemplo, se supusermos que 1 = 2, podemos concluir que 0 = 1 e também que 3 = 3. Em outras palavras, se p é falsa, tudo é válido como nos ditados populares: "Se você é o dono da Coca-Cola então eu sou o rei da Inglaterra". (http://www.fund198.ufba.br/logica/2-logica98.pdf)

Modus Ponens Crisp

Suponhamos agora que a operação de implicação envolve diferentes universos de discurso: p é uma proposição descrita pelo conjunto A que é definido no universo X, e q é uma proposição descrita pelo conjunto B que é definido no universo Y.

Então a implicação $p \rightarrow q$ nos leva a uma tautologia denominada MODUS PONENS.

O método de dedução modus ponens é um esquema de inferência muito usado. É uma operação cuja tarefa é determinar o valor verdade de um consequente.

Modus Ponens Crisp

Tabela verdade – Modus Ponens

Premissa 1	: SE	$X \in A$ ENTÃO	$Y \in B$
Premissa 2	:	$X \in A$	
Conclusão	:		$Y \in B$

Rule: **If** A**, then** B**.**
Fact: A**.**
Conclusion: **Therefore,** B**.**

Modus Ponens: $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

A	B	$\nu(A \rightarrow B)$	$\nu(A \wedge (A \rightarrow B))$	$\nu(A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Modus Ponens Crisp

O método **dedutivo modus ponens** é usado como uma ferramenta para fazer inferências em sistemas baseados em regras. Uma regra típica **SE-ENTÃO**, é usada para determinar se um antecedente (causa) infere um consequente (efeito).

Suponha que temos uma regra da forma **SE A, ENTÃO B**, onde A é um conjunto definido no universo X e B é um conjunto definido no universo Y. Esta regra pode ser traduzida em uma relação entre os conjuntos A e B

$$(p \to q) = R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y) \equiv \text{SE A, ENTÃO B}$$

onde p é uma proposição definida no conjunto A do universo X e q proposição definida no conjunto B do universo Y.

Levando em consideração que os elementos de Y tem função característica igual a 1, então em termos da função característica temos

$$\chi_R(x,y) = \max[(\chi_A(x) \wedge \chi_B(y)), ((1 - \chi_A(x)) \wedge 1)]$$

Modus Ponens Crisp

Inferência Dedutiva

Considere uma determinada regra SE x é A ENTÃO y é B, onde A e B são conjuntos difusos discretos definidos em universos X e Y respectivamente.

Seja o fato x é A’, onde A’ e A não são necessariamente idênticos.

Premissa 1: x é A $\rightarrow$ y é B
Premissa 2: x é A’

Conclusão (resultado inferência): y é B’

Objetivo: determinar B’= A’ $\wedge$ (A $\rightarrow$ B))

B’ pode ser encontrado aravés da seguinte formulação

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)$$

B’= A’ $\circ$ R é a composição da premissa de A’ e a relação crisp R representa a implicação (x é A) $\rightarrow$ (y é B).

Lógica Proposicional Difusa

Lógica Proposicional Difusa

A lógica fuzzy confere graus intermédios de verdade para todas as proposições.

A "lógica fuzzy é um super conjunto" da lógica convencional (booleana), que foi estendido para lidar com o conceito de valores verdade parciais: verdades entre "completamente verdadeiro" e "completamente falso".

Lógica Proposicional Difusa

Exemplos de proposições compostas

- p: temperatura é alta **e** pressão é baixa
- p: temperatura é alta **ou** baixa

Exemplo de implicação difusa

- p: se a pressão é alta **ou** a temperatura é baixa **então** girar um pouco

A proposição difusa é uma declaração p que adquire um valor verdade difuso $\nu(p)$.

Exemplo de valoração da proposição (antecedente ou consequente)**:**

Proposião simples p: O professor não é charmoso

$\nu(p) = 0,2$ significa que p é parcialmente verdadeira.

$\nu(p) = 1,0$ significa que p é absolutamente verdadeira.

Lógica Proposicional Difusa

Implicação

Da lógica crisp temos que $(p \rightarrow q) = \nu(\sim p \vee q)$. Logo o grau verdade ν da implicação dada pela função característica χ é dada por: $\chi(p \rightarrow q) = \chi(\sim p \vee q) = \max(\chi(\sim p), \chi(q))$

Agora, sejam os conjuntos difusos A e B definidos no universo X. Seja a proposição p que mede o grau verdade μ de que x é elemento do conjunto A e a verdade μ da declaração q de que x é elemento de B. Então

$$\mu_{p \rightarrow q}(x) = \mu_{\sim p \vee q}(x) = \max[\mu(\sim p), \mu(q)] = \max[1 - \mu(p), \mu(q)]$$

Outras formas de implicação podem ser usadas (próximo slide)

Lógica Proposicional Difusa

Operadores de implicação mais usados

* O operador de "implicação" trouxe complicações aos teóricos de lógica fuzzy.

* Se definirmos o operador na forma usual obteremos uma tabela verdade que é contra-intuitiva e inadequada porque várias leis lógicas deixam de ser respeitadas.

* Vários pesquisadores tentaram desenvolver definições alternativas, chegando a uma lista com mais de 72 possibilidades.

* Seja a implicação p $\rightarrow$ q, com ν(p)= x e ν(q) = y. Então podemos calcular ν(p $\rightarrow$ q).

* **As funções da operação de implicação mais comuns são:**

Willmot	$I_W(x,y) = \max\{1-x, \min\{x,y\}\}$
Mamdani	$I_M(x,y) = \min\{x,y\}$
Rscer-Gaines	$I_{RG}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ 0, & x > y \end{cases}$
Kleene-Dienes	$I_{KD}(x,y) = \max\{1-x, y\}$
Brouwer-Gödel	$I_{BG}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ y, & x > y \end{cases}$
Goguen	$I_G(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ y/x, & x > y \end{cases}$
Lukasiewicz	$I_L(x,y) = \min\{1-x+y, 1\}$
Fodor	$I_F(x,y) = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \max\{1-x, y\}, & x > y \end{cases}$
Reichenbach	$I_R(x,y) = 1-x+xy$

Lógica Proposicional Difusa

Modus Ponens – Raciocínio Aproximado

Se os conjuntos difusos A e B definidos nos universos X e Y respectivamente então a regra **SE x é A, ENTÃO y é B**, é equivalente a relação difusa

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)$$

A função de pertinência da relação R é expressada pela fórmula

$$\mu_R(x,y) = \max[(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),(1 - \mu_A(x))]$$

Existem outras formas de calcular $\mu_R(x,y)$ (slide anterior).

Lógica Proposicional Difusa

Raciocínio Aproximado – Inferência Dedutiva

Sejam A e B proposições (conjuntos) difusas. Seja a Regra 1: **SE x é A ENTÃO y é B**. Seja um novo antecedente, digamos A' e consideremos a Regra 2: **SE x é A' ENTÃO y é B**'.

Da Regra 1, é possível derivar o consequente da Regra 2, B', através de

$$B' = A' \circ R$$

onde

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)$$

B' = A' $\circ$ R é a composição da premissa de A' e a relação difusa R representa a implicação (x é A) $\rightarrow$ (y é B).

$$\mu_{B'}(y) = \max_{y \in Y}\{\min[\mu_{A'}(y), R(x,y)]\}$$

Outras fórmulas podem ser usadas.

Lógica Proposicional Difusa

Algumas observações

Inferência Dedutiva: Ato ou processo de derivar conclusões lógicas de proposições conhecidas ou decididamente verdadeiras. Em outras palavras: é a obtenção de novas proposições a partir de proposições verdadeiras já existentes.

Lógica Tradicional (Crisp): A regra é disparada somente se a premissa 1 for exatamente igual ao antecedente, sendo que o resultado da regra é o próprio consequente.

Lógica Fuzzy: A regra é disparada desde que exista um grau de similaridade diferente de zero entre a premissa 1 e o antecedente da regra, sendo que o resultado é um consequente que tem um grau de similaridade diferente de zero com o consequente da regra.

Lógica Proposicional Difusa

Antecedentes compostos

Conexão das proposições por meio de *e*

$(x \text{ é } A) \; e \; (y \text{ é } B)$

relação fuzzy $R_{A e B}$

$$\boxed{\mu_R(x, y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)}$$

norma-t (geralmente o *min* ou o *produto*)

Conexão das proposições por meio de *ou*

$(x \text{ é } A) \; ou \; (y \text{ é } B)$

relação fuzzy $R_{A ou B}$

$$\boxed{\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(y)}$$

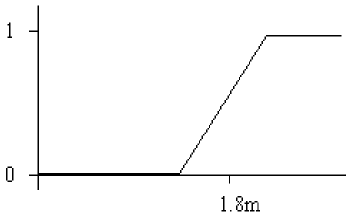
co-norma-t (geralmente o *max*)

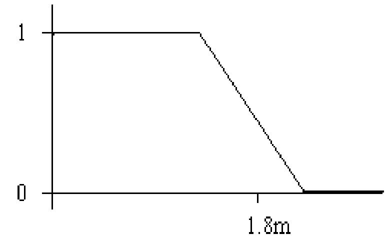
Lógica Proposicional Difusa

Exemplo – Antecedentes Compostos

$$\mu_{Tall}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1{,}7 \\ \dfrac{x - 1{,}7}{0{,}2}, & 1{,}7 < x < 1{,}9 \\ 1, & x \ge 1{,}9 \end{cases}$$

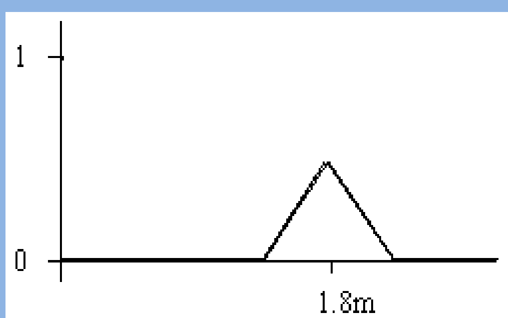
$$\mu_{Short}(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1{,}7 \\ \dfrac{1{,}9 - x}{0{,}2}, & 1{,}7 < x < 1{,}9 \\ 0, & x \ge 1{,}9 \end{cases}$$





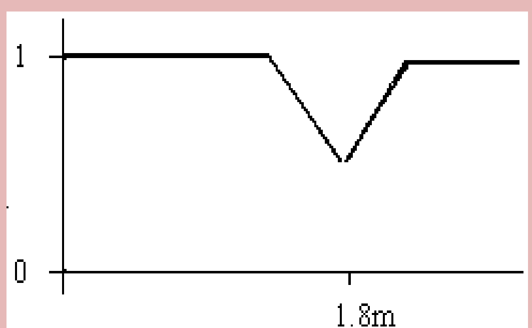
Tall(*x*) **AND** *Short*(*x*)

Interseção -> min{$f_A(x)$, $f_B(x)$}



Tall(*x*) **OR** *Short*(*x*)

União -> max{$f_A(x)$, $f_B(x)$}



Inferência Fuzzy

Inferência Fuzzy

Exemplo 1

Example 5.11. For research on the human visual system, it is sometimes necessary to characterize the strength of response to a visual stimulus based on a magnetic field measurement or on an electrical potential measurement. When using magnetic field measurements, a typical experiment will require nearly 100 off/on presentations of the stimulus at one location to obtain useful data. If the researcher is attempting to map the visual cortex of the brain, several stimulus locations must be used in the experiments. When working with a new subject, a researcher will make preliminary measurements to determine if the type of stimulus being used evokes a good response in the subject. The magnetic measurements are in units of femtotesla (10^{-15} tesla). Therefore, the inputs and outputs are both measured in terms of magnetic units.

We will define inputs on the universe X = [0, 50, 100, 150, 200] femtotesla, and outputs on the universe Y = [0, 50, 100, 150, 200] femtotesla. We will define two fuzzy sets, two different stimuli, on universe X:

$$\underset{\sim}{W} = \text{``weak stimulus''} = \left\{\frac{1}{0} + \frac{0.9}{50} + \frac{0.3}{100} + \frac{0}{150} + \frac{0}{200}\right\} \subset X$$

$$\underset{\sim}{M} = \text{``medium stimulus''} = \left\{\frac{0}{0} + \frac{0.4}{50} + \frac{1}{100} + \frac{0.4}{150} + \frac{0}{200}\right\} \subset X$$

and one fuzzy set on the output universe Y,

$$\underset{\sim}{S} = \text{``severe response''} = \left\{\frac{0}{0} + \frac{0}{50} + \frac{0.5}{100} + \frac{0.9}{150} + \frac{1}{200}\right\} \subset Y$$

We will construct the proposition: IF "weak stimulus" THEN not "severe response," using classical implication.

$$\text{IF } \underset{\sim}{W} \text{ THEN } \overline{\underset{\sim}{S}} = \underset{\sim}{W} \longrightarrow \overline{\underset{\sim}{S}} = (\underset{\sim}{W} \times \overline{\underset{\sim}{S}}) \cup (\overline{\underset{\sim}{W}} \times Y)$$

Inferência Fuzzy

Exemplo 2

Considere as proposições abaixo:

Premissa 1: Se está no norte de Wisconsin, então é frio (A → B).
Premissa 2: John vive no extremo norte de Wisconsin (A´).
Conclusão: B'........ (muito frio?)

Premissa 1

Definir conjuntos fuzzy

A = norte = 0,1 / Madison + 0,5 / Dells + 0,7 / Greenbay + 1,0 / Superior;
B = frio = 1,0 / 20 + 0,9 / 35 + 0,4 / 50 + 0,2 / 65.

Se norte(A) então frio(B)

norte → frio
A → B
⇒

Norte\Frio	20	35	50	65
M	1,0	1,0	1,0	1,0
D	1,0	1,0	0,9	0,7
G	1,0	1,0	0,7	0,5
S	1,0	0,9	0,4	0,2

continua...

Esta relação encontra-se pela equação: $\mu_{norte \rightarrow frio}(u, v) = 1 \wedge \{1 - norte(u) + frio(v)\}$
(Lukasiewicz : $I_L(x, y) = \min\{1 - x + y, 1\}$)

Inferência Fuzzy

Exemplo 2 ... continuação

Premissa 2

A' = Extremo_Norte(A') = (norte)^2 = 0,01 / Madison + 0,25 / Dells +
+ 0,49 / Greenbay + 1,0 / Superior

Conclusão

B' = ?

Usando a regra de composição max-min,

$$B' = [0{,}01 \;\; 0{,}025 \;\; 0{,}49 \;\; 1{,}0] \circ \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = [1{,}0 \;\; 0{,}9 \;\; 0{,}49 \;\; 0{,}49]$$

Observação

No entanto, uma propriedade do Modus Ponens não é satisfeita:

Se A' = A, então

$$B' = [0{,}1 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}7 \;\; 1{,}0] \circ \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = [1{,}0 \;\; 0{,}9 \;\; 0{,}7 \;\; 0{,}5] \neq B$$

(B = 1,0 / 20 + 0,9 / 35 + 0,4 / 50 + 0,2 / 65)

Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

A formula de implicação de **Mamdani** satisfaz todas as propriedades do Modus Ponens.

Considere o seguinte sistema de inferência

Premissa 1: x é A $\rightarrow$ y é B

Premissa 2: x é A´

Conclusão: y é B´

Objetivo: dado A´, determinar B´

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B)$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x,y) = \mu_{A'}(x) \wedge \mu_B(y)$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_u\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A \rightarrow B}(x,y)\}$$

Mamdani: substituir "$\wedge$" por min ou prod

Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 2

A = norte = 0,1/1 + 0,5/2 + 0,7/3 + 1,0/4

B = frio = 1,0/20 + 0,9/35 + 0,4/50 + 0,2/65

$A' = A$

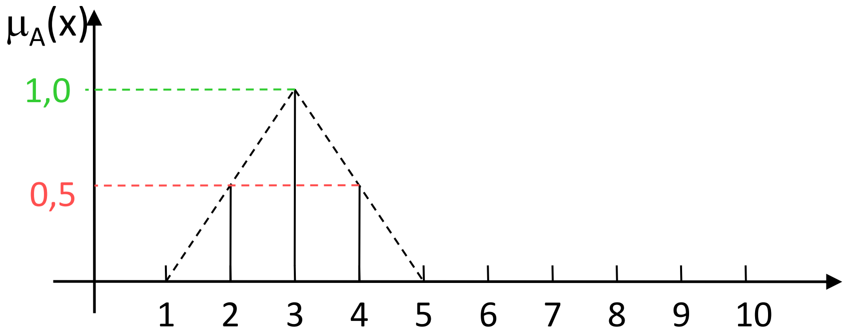
$B' = ?$

$$B' = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1{,}0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} = B$$

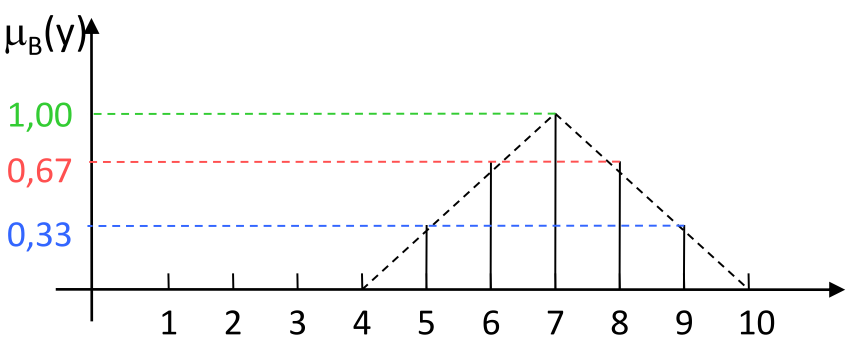
Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 3

Considere o conjunto difuso *A*



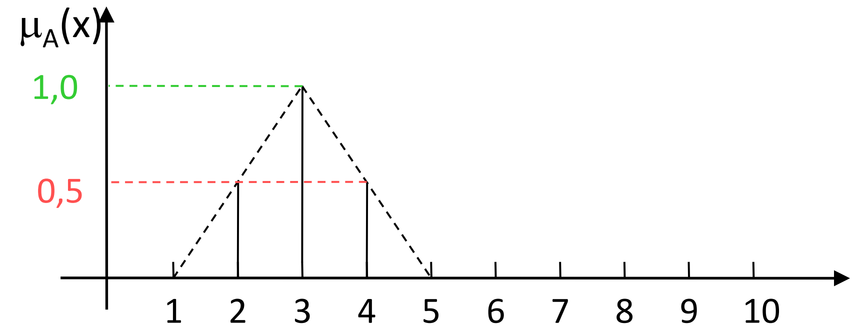
e o conjunto difuso *B*

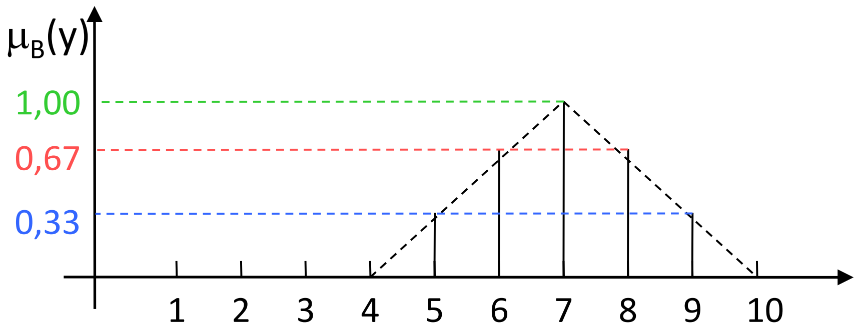


continua ...

Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 3 ... continuação





Seja a premissa 1

SE x é A **ENTÃO** y é B ($A \rightarrow B$)

$$\text{Mamdani}: \mu_{A\rightarrow B}(x,y) = \min\{x,y\}$$

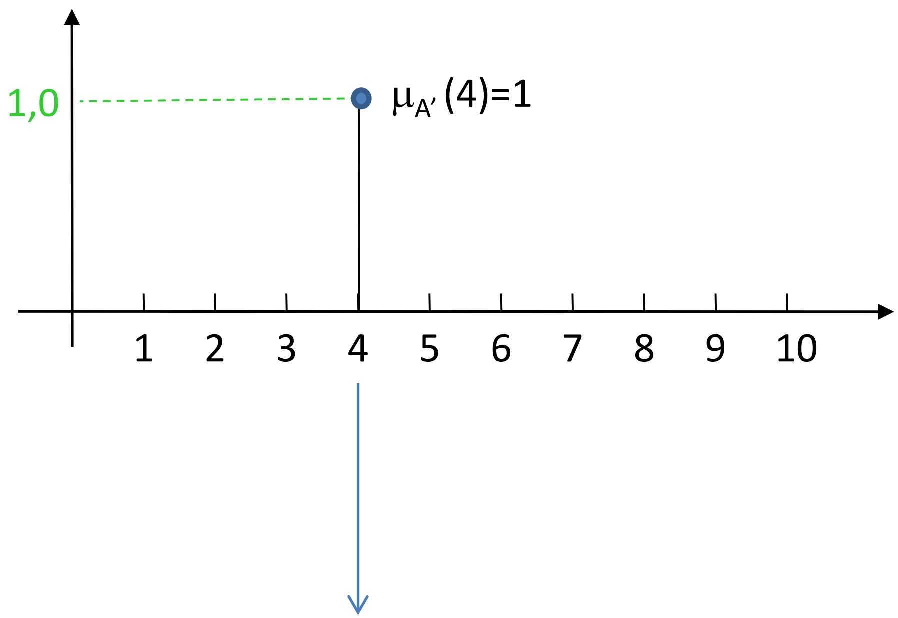
$$R_{A\rightarrow B} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}66 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}33 \end{bmatrix}$$

continua ...

Exemplo 3 ... continuação

Seja a premissa 2

Seja A'={(4,1)}



$$A' = \sum_{i=0}^{10} \mu_A(x_i)/x_i = \frac{1}{4}$$

continua ...

Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 3 . . . continuação

Conclusão

B'(y) = ?

B'(y)=A'(x) o $R_{A \rightarrow B}(x,y)$

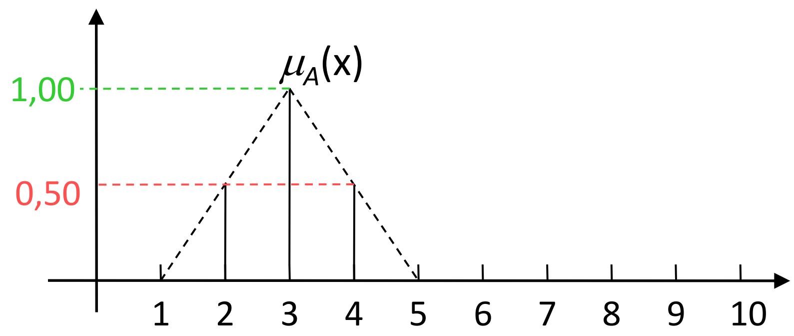
$$B' = [0\ 0\ 1] \circ \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}66 & 0{,}33 \\ 0{,}33 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}33 \end{bmatrix} = [0{,}33\ 0{,}50\ 0{,}50\ 0{,}50\ 0{,}33]$$

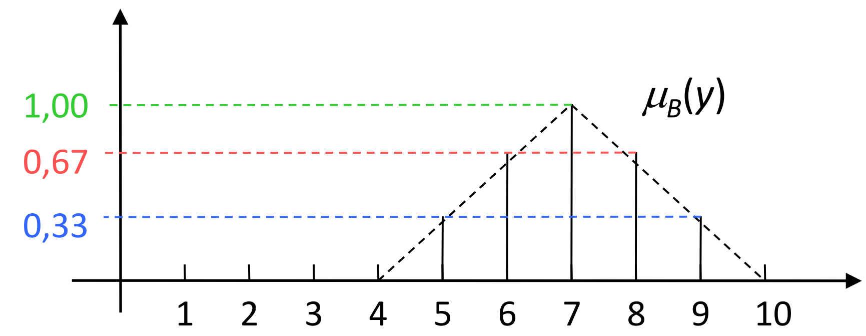
$$B' = 0{,}33/5 + 0{,}50/6 + 0{,}50/7 + 0{,}50/8 + 0{,}33/9$$

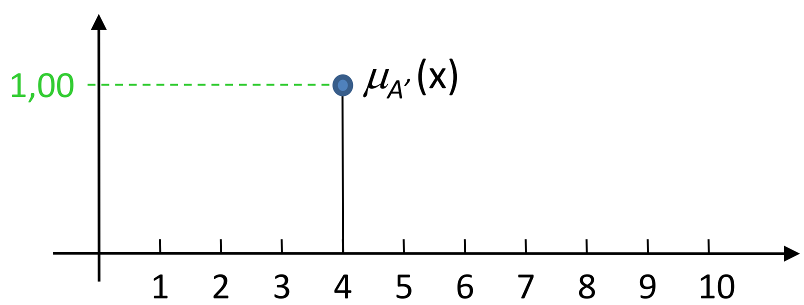
continua . . .

Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 3 . . . **RESUMO**

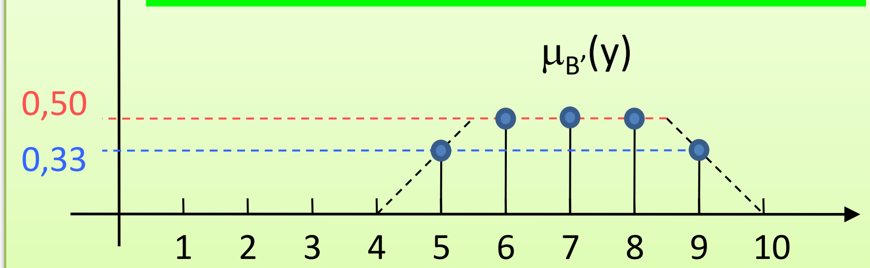






$$\mu_{B'}(y) = \max_{y \in Y}\{\min[\mu_{A'}(y), R(x,y)]\}$$

$$B' = 0{,}33/5 + 0{,}50/6 + 0{,}50/7 + 0{,}50/8 + 0{,}33/9$$



Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 4

Premissa 1

Se u é A, então v é B

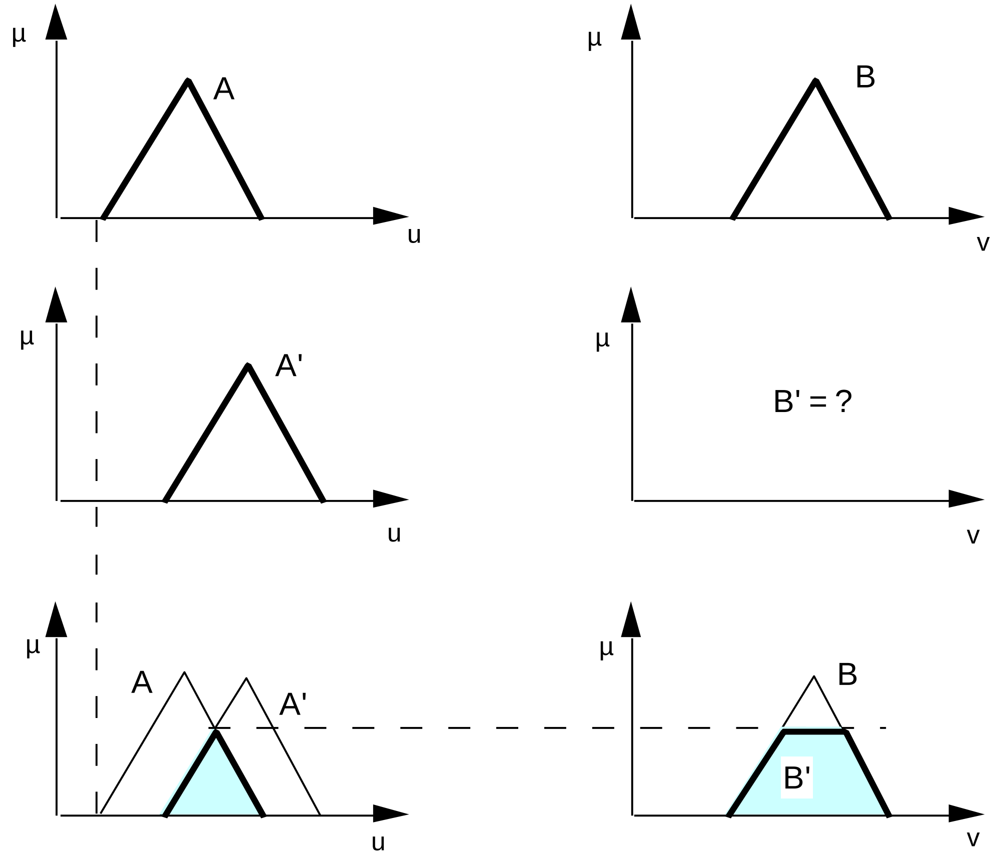
Premissa 1

Se u é A', então v é ?

Questão

v=B'=?

B'=min{B, max[min(A,A')]}



Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

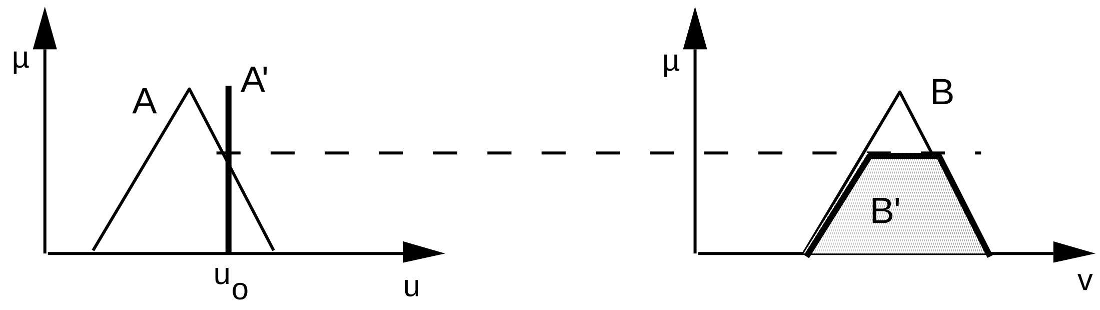
Exemplo 5

Quando A’ é crisp ($u = u_o$)?

Quando $A' = 1/(u = u_o)$, temos

$$\max(\min(A, A')) = \mu_A(u_o), \text{ e}$$

$$\mu_{B'}(v) = \min[\mu_B(v), \mu_A(u_o)]$$



Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 6

Regra 1

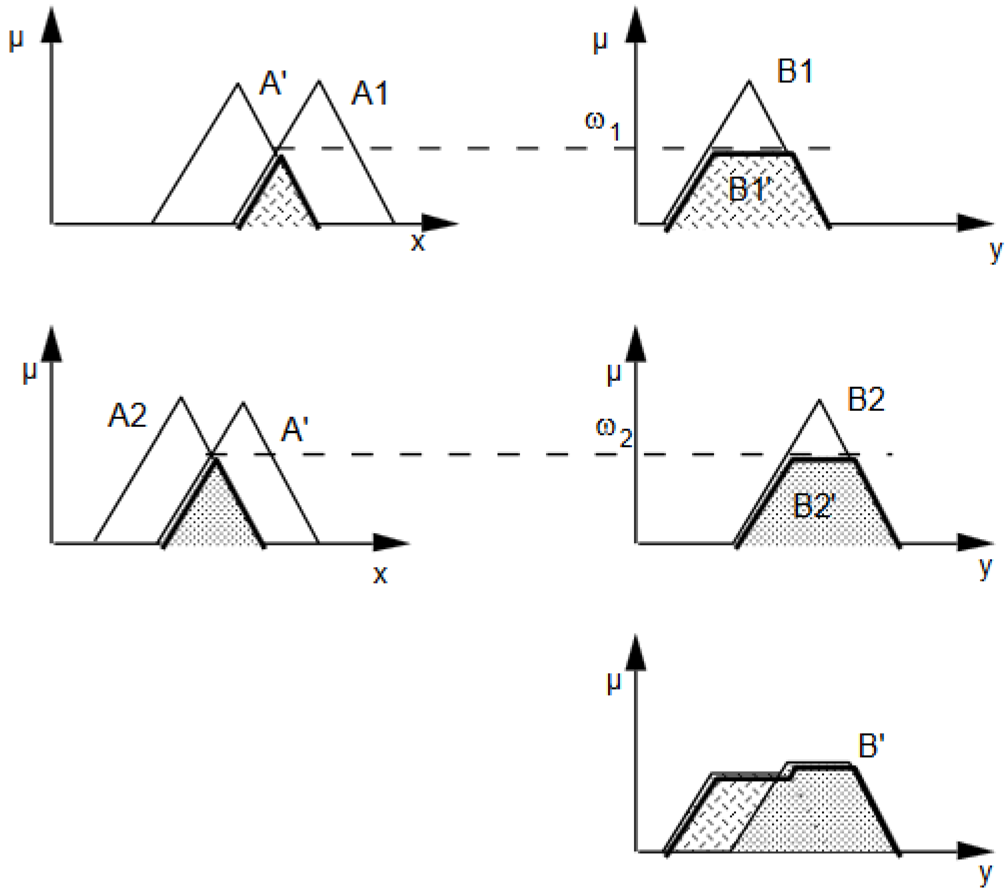
Se X é A_1, então Y é B_1

Regra 2

Se X é A_2, então Y é B_2

Questão

Se X é A’, então Y=B’=?



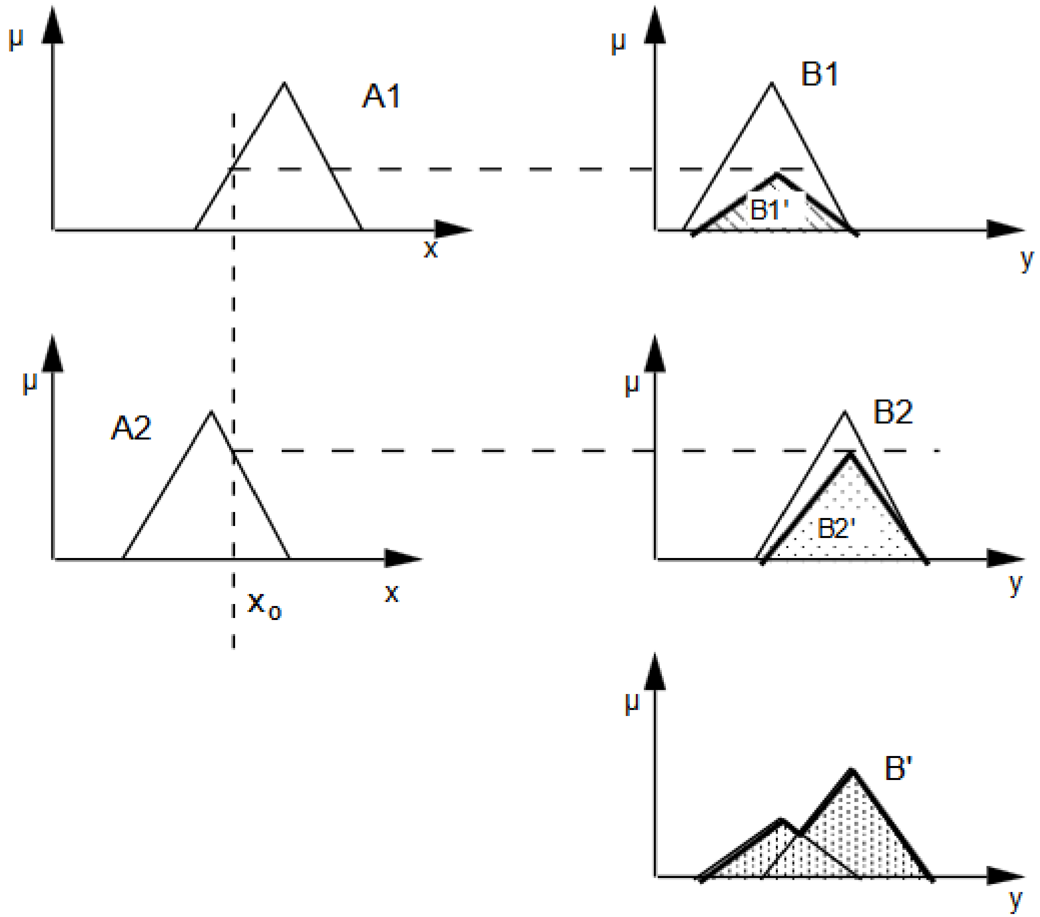
Inferência Fuzzy – Fórmula de Mamdani

Exemplo 7

Neste caso foi usado max.prod ao invés de max.min do exemplo 6.

<u>Questão</u>

E se $x = x_0$, o que é y=B'=?



Inferência Fuzzy

Exemplo 7

Considere duas regras (base de regras).

Regra 1. **SE** o ângulo é pequeno, **ENTÃO** a força é grande.
Regra 2. **SE** o ângulo é médio, **ENTÃO** a força é médio.

Suponha $\mu_{pequeno}$(Angulo) = 0,4, e $\mu_{médio}$(Angulo) = 0,7.

Tanto a regra 1 como a regra 2 são ativadas.

<u>Questão</u>: Como encontrar o conjunto fuzzy que descreve a variável fuzzy "força" como resultado de disparar as regras 1 e 2?

Exercícios

- **Dienes-Rescher Implication**: If we replace the logic operators $^-$ and $\vee$ in (5.21) by the basic fuzzy complement (3.1) and the basic fuzzy union (3.2), respectively, then we obtain the so-called *Dienes-Rescher implication.* Specifically, the fuzzy IF-THEN rule $IF\ < FP_1 >\ THEN\ < FP_2 >$ is interpreted as a fuzzy relation Q_D in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_D}(x,y) = max[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \tag{5.23}$$

- **Lukasiewicz Implication**: If we use the Yager s-norm (3.10) with $w = 1$ for the $\vee$ and basic fuzzy complement (3.1) for the $^-$ in (5.21), we obtain the *Lukasiewicz implication.* Specifically, the fuzzy IF-THEN rule $IF\ < FP_1 >\ THEN\ < FP_2 >$ is interpreted as a fuzzy relation Q_L in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_L}(x,y) = min[1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)] \tag{5.24}$$

- **Zadeh Implication**: Here the fuzzy IF-THEN rule $IF\ < FP_1 >\ THEN\ < FP_2 >$ is interpreted as a fuzzy relation Q_Z in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_Z}(x,y) = max[min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)] \tag{5.25}$$

  Clearly, (5.25) is obtained from (5.22) by using basic fuzzy complement (3.1), basic fuzzy union (3.2), and basic fuzzy intersection (3.3) for $^-\vee$ and $\wedge$, respectively.

- **Mamdani Implications**: The fuzzy IF-THEN rule (5.28) is interpreted as a fuzzy relation Q_{MM} or Q_{MP} in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_{MM}}(x,y) = min[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \tag{5.31}$$

  or

$$\mu_{Q_{MP}}(x,y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y) \tag{5.32}$$

Exercícios

Exercise 6.2. Let $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ and $V = \{y_1, y_2\}$, and assume that a fuzzy IF-THEN rule "IF x is A, THEN y is B" is given, where $A = .5/x_1 + 1/x_2 + .6/x_3$ and $B = 1/y_1 + .4/y_2$. Then, given a fact "x is A'," where $A' = .6/x_1 + .9/x_2 + .7/x_3$, use the generalized modus ponens (6.10) to derive a conclusion in the form "y is B'," where the fuzzy relation $A \to B$ is interpreted using:

(a) Dienes-Rescher implication (5.23),

(b) Lukasiewicz implication (5.24),

(c) Zadeh implication (5.25), and

(d) Mamdani Product implication (5.32).

definidas na página anterior

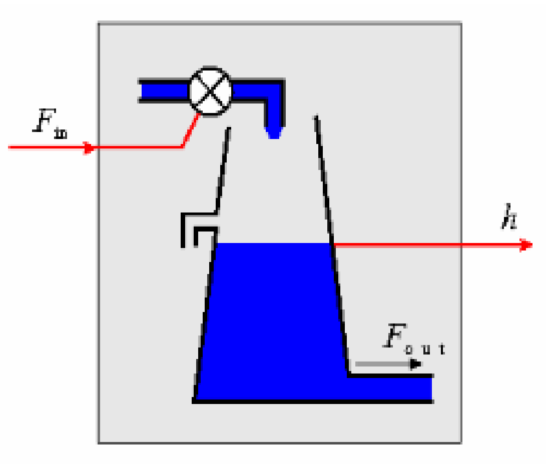
Exercise 6.3. Repeat Exercise 6.2 with $A = .6/x_1 + 1/x_2 + .9/x_3$, $B = .6/y_1 + 1/y_2$, and $A' = .5/x_1 + .9/x_2 + 1/x_3$.

Exercícios

Consider the following situation, which can be described by two rules:

R1: If FLOW is large then LEVEL is large
R2: If FLOW is small then LEVEL is small.

Assume $\mu_{large}(x) = x/10$ for $x \in [0, 10]$ and $\mu_{small}(y) = 1\text{-}y/10$ for $y \in [0, 10]$
What fuzzy set can be derived for the LEVEL if the FLOW is assumed to be in the interval [0,2] (a crisp set) ?



Exercícios

Let X = {a, b, c, d} ,

A = {(a, 0) (b, 0.8) (c, 0.6) (d, 1)}

B = {(1, 0.2) (2, 1) (3, 0.8) (4, 0)}

Y = { 1, 2, 3, 4} the universe of discourse could be viewed as

{ (1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1) }

i.e., a fuzzy set all of whose elements **x** have $\mu(x) = 1$

Determine the implication relations

(i) If x is A THEN y is B

Solution

To determine implication relations (i) compute :

The operator $\Rightarrow$ represents **IF-THEN** statement like,

IF x is A THEN y is B, is equivalent to **R = (A x B) U (¬ A x Y)** and

the membership function **R** is given by

$\mu_R(x, y) = \max[\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x)]$

Willmot: $I_W(x, y) = \max\{1 - x, \min\{x, y\}\}$

http://www.myreaders.info/07-Fuzzy_Systems.pdf

Exercícios

Apply the fuzzy Modus Ponens rules to deduce Rotation is quite slow?

Given :

(i) If the temperature is high then then the rotation is slow.

(ii) The temperature is very high.

Let **H (High) , VH (Very High) , S (Slow) and QS (Quite Slow)** indicate the associated fuzzy sets.

Let the set for temperatures be **X = {30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}** , and

Let the set of rotations per minute be **Y = {10, 20, 30, 40, 50, 60}** and

H = {(70, 1) (80, 1) (90, 0.3)}

VH = {(90, 0.9) (100, 1)}

QS = {10, 1) (20, 08) }

S = {(30, 0.8) (40, 1) (50, 0.6)

To derive **R(x, y)** representing the implication relation (i) above, compute

R (x, y) = max (H x S , ¬ H x Y)

Exercícios

Seja

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$A = 0{,}5/x_1 + 1/x_2 + 0{,}6/x_3$, $B = 1/y_1 + 0{,}4/y_2$

$B' = 0{,}9/y_1 + 0{,}7/y_2$

Determine X é A'. Use a implicação de Lukasiewicz.

Exercícios

Seja

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$

$A = 0{,}5/x_1 + 1/x_2 + 0{,}6/x_3$, $B = 1/y_1 + 0{,}4/y_2$

$A' = 0{,}6/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}7/x_3$

Determine Y é B'. Use a implicação de Lukasiewicz.

http://www.myreaders.info/07-Fuzzy_Systems.pdf