



TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Conjuntos Difusos – Inferência)

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Inferência Difusa

Em 1975, o professor Ebrahim Mamdani, da Universidade de Londres construiu um dos primeiros sistemas fuzzy para controlar um motor a vapor em combinação com uma caldeira. Ele aplicou um conjunto de regras fuzzy fornecidos por operadores experientes.

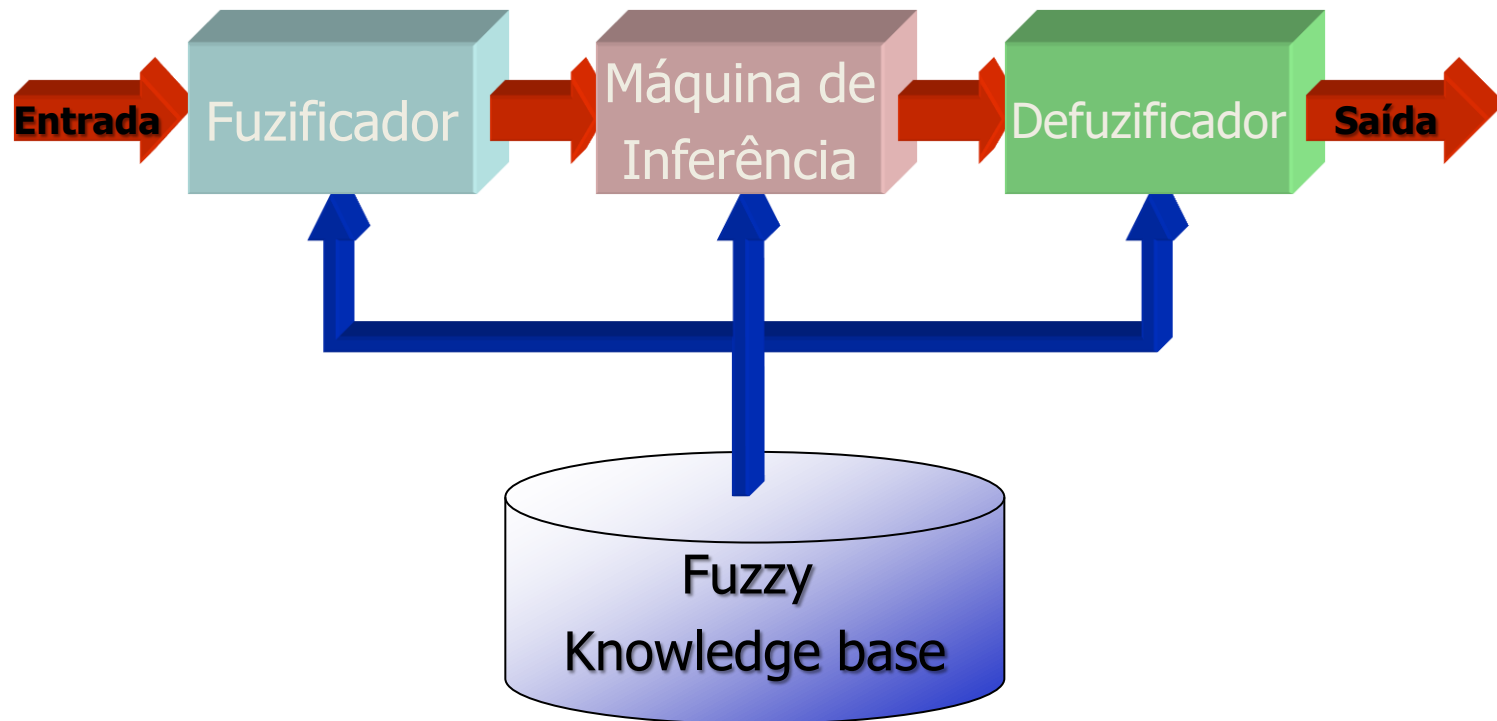
A técnica de inferência fuzzy mais comumente utilizado é o chamado **método Mamdani**.

O processo de inferência fuzzy é realizada em quatro etapas:

1. Fuzificação das variáveis de entrada
2. Avaliação das regras (inferência)
3. Agregação das saídas das regras (composição)
4. Defuzificação

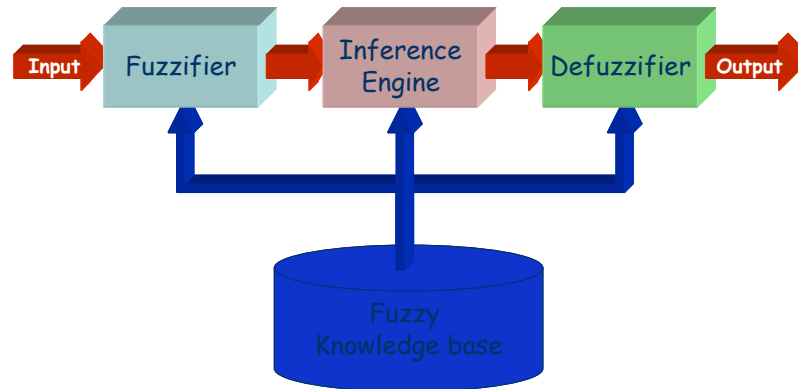
Sistema de Inferência Difusa

A arquitetura do Sistema de Inferência Difusa



Sistema de Inferência Difusa-FIS

A arquitetura do Sistema de Inferência Difusa

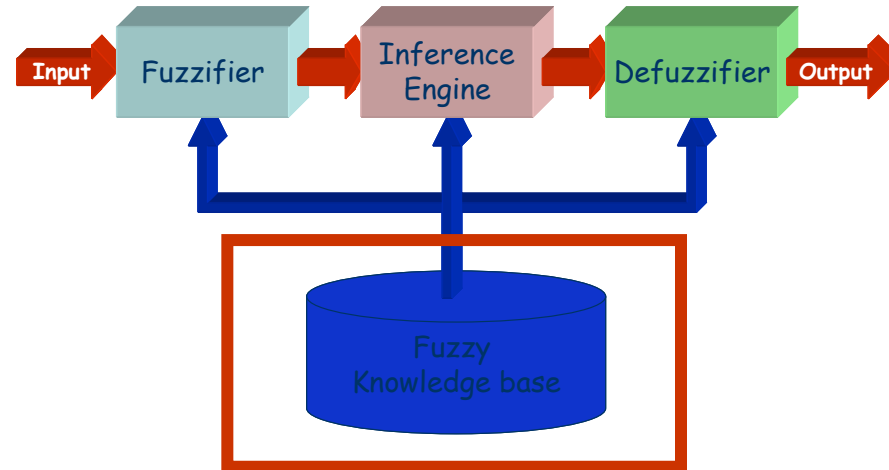


Os passos de raciocínio aproximado (operações de inferência baseado em regras difusas SE-ENTÃO) realizada pelo FIS são:

1. Comparar as variáveis de entrada com as funções de pertinência da parte antecedente para obter os valores dos graus de pertinência de cada variável linguística. (este passo é muitas vezes chamado fuzificação.)
2. Combinar (geralmente multiplicação ou min) os valores dos graus de pertinência na premissa para obter a “força de disparo” (grau de satisfação) de cada regra.
3. Gerar os consequentes (ou fuzzy ou crisp) de cada regra, dependendo da “força de disparo”.
4. Agregar os consequentes para produzir uma saída crisp. (Este passo é chamado de defuzificação.)

Sistema de Inferência Difusa

Base de conhecimento



A **base de regras** e o **banco de dados** são referenciados em conjunto como sendo a **base de conhecimento**.

- uma **base de regras** contém uma série de regras difusas **SE-ENTÃO**;
- um **banco de dados** define as **funções de pertinência** dos conjuntos difusos utilizados nas regras difusas.

Sistema de Inferência Difusa

Base de conhecimento – regras difusas

SE x é A_1 e y é B_1 ENTÃO z é C_u : R_{11}

SE x é A_1 e y é B_2 ENTÃO z é C_v : R_{12}

...

SE x é A_1 e y é B_n ENTÃO z é C_x : R_{1n}

SE x é A_2 e y é B_1 ENTÃO z é C_x : R_{21}

SE x é A_2 e y é B_2 ENTÃO z é C_y : R_{22}

...

SE x é A_2 e y é B_n ENTÃO z é C_i : R_{2n}

...

SE x é A_m e y é B_1 ENTÃO z é C_x : R_{m1}

...

Sistema de Inferência Difusa

Regras Difusas – completude

A **completude** é uma propriedade de uma teoria lógica; um sistema formal é chamado de completo quando qualquer sentença verdadeira (V) pode ser deduzida do sistema.


Uma base de regras difusas é **completa** se para qualquer valor de entrada existe uma saída com valor entre 0 e 1.

Sistema de Inferência Difusa

Regras Difusas – consistência

Na lógica uma teoria consistente é uma que não contenha uma contradição.

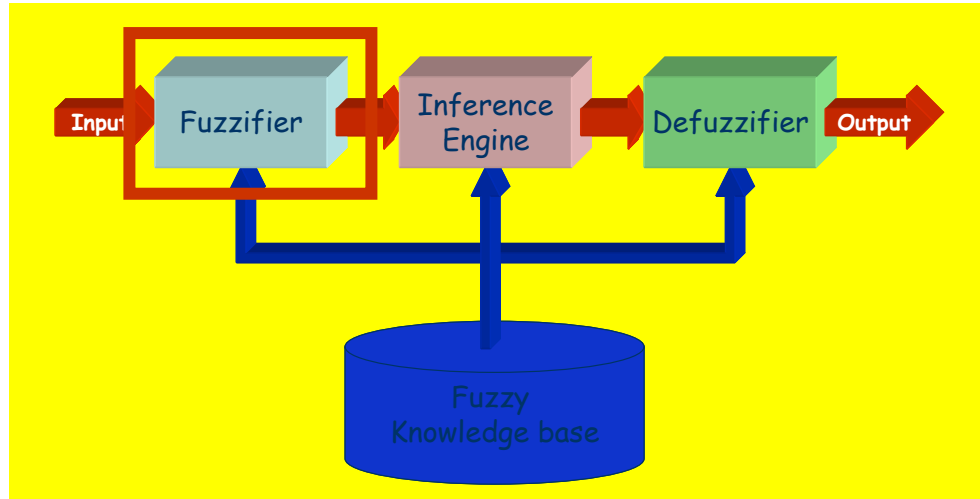
Um conjunto de regras difusas é inconsistente se duas regras com o mesmo antecedente possuem consequentes diferentes (conjuntos difusos diferentes).



SE x é A_1 e y é B_1 **ENTÃO** z é C_v : R_1
SE x é A_1 e y é B_1 **ENTÃO** z é C_x : R_2

Sistema de Inferência Difusa

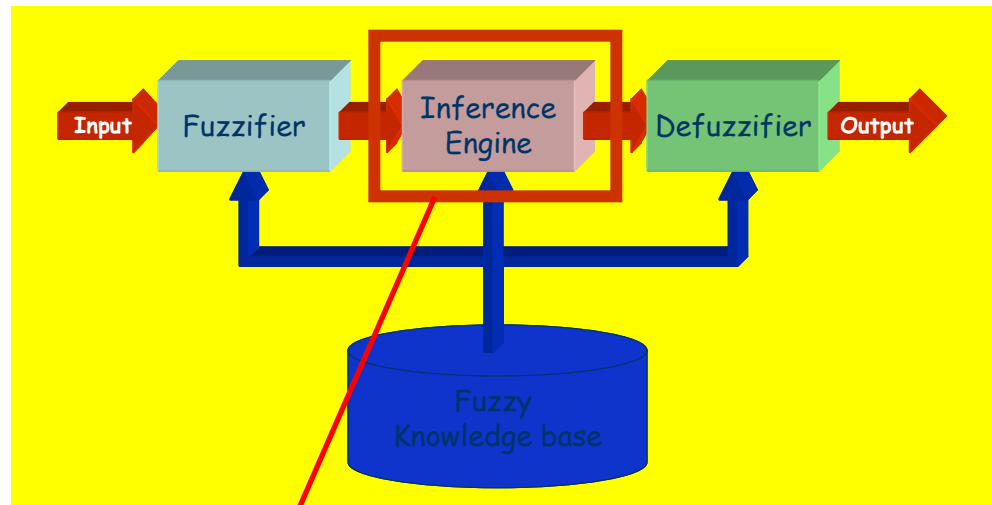
Fuzzificação



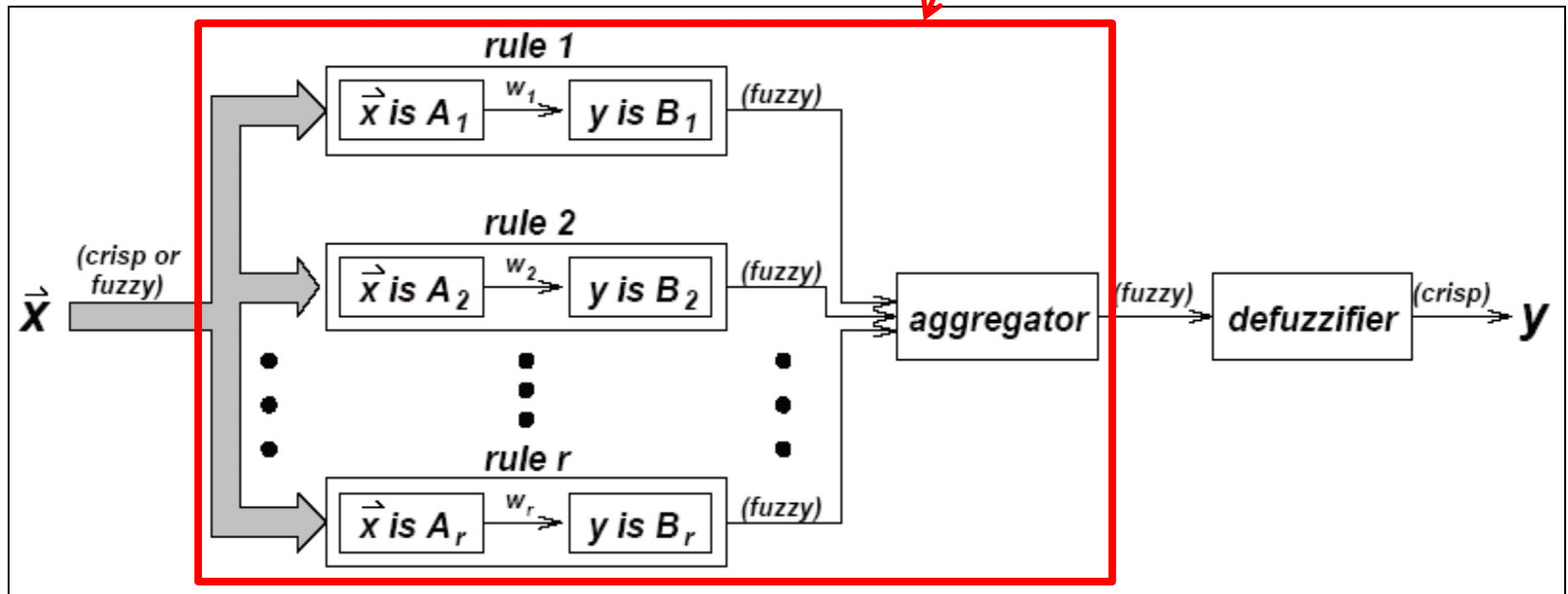
Converte a entrada crisp numa variável linguística usando as funções de pertinência armazenadas na base de conhecimento difuso.

Sistema de Inferência Difusa

Máquina de inferência

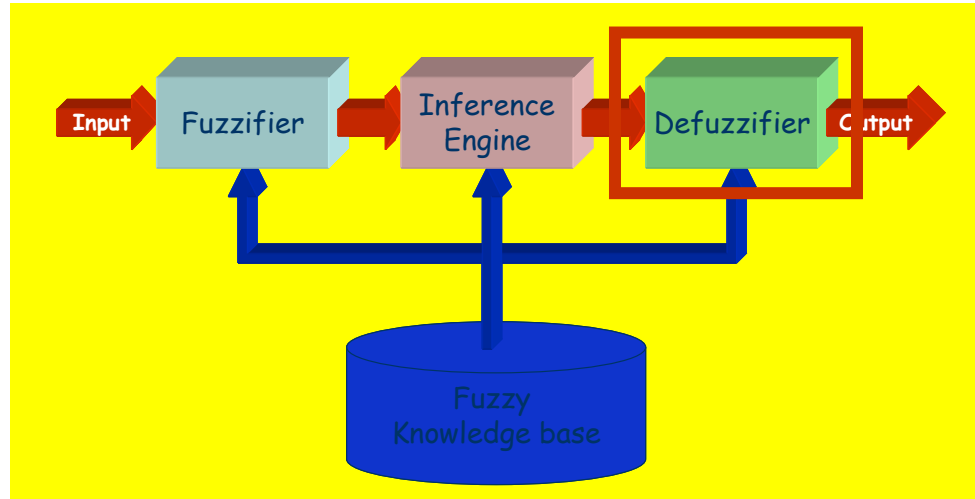


Usando regras difusas do tipo SE-ENTÃO converte a entrada difusa para a saída difusa.



Sistema de Inferência Difusa

Defuzzificação



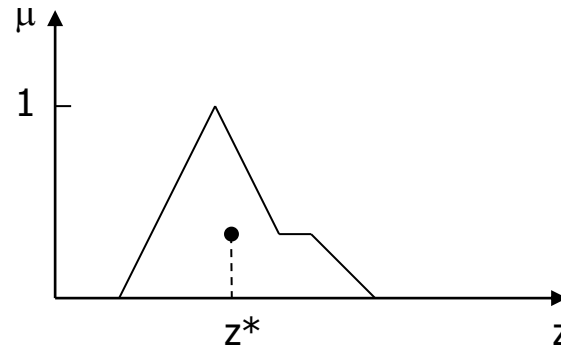
Converte a saída difusa da máquina de inferência para crisp usando funções de pertinência análogas às utilizadas na fuzificação.

Método de Inferência Difusa

Defuzzificação – Alguns Métodos

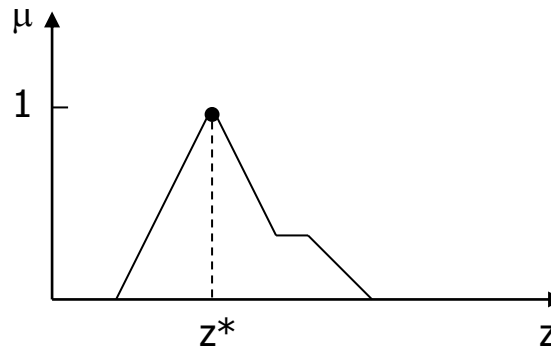
Centro de Gravidade-CG

$$z^* = \frac{\int z \times \mu_c(z) dz}{\int \mu_c(z) dz}$$



Máxima Pertinência

$$\mu_c(z^*) \geq \mu_c(z) \quad \forall z \in Z$$



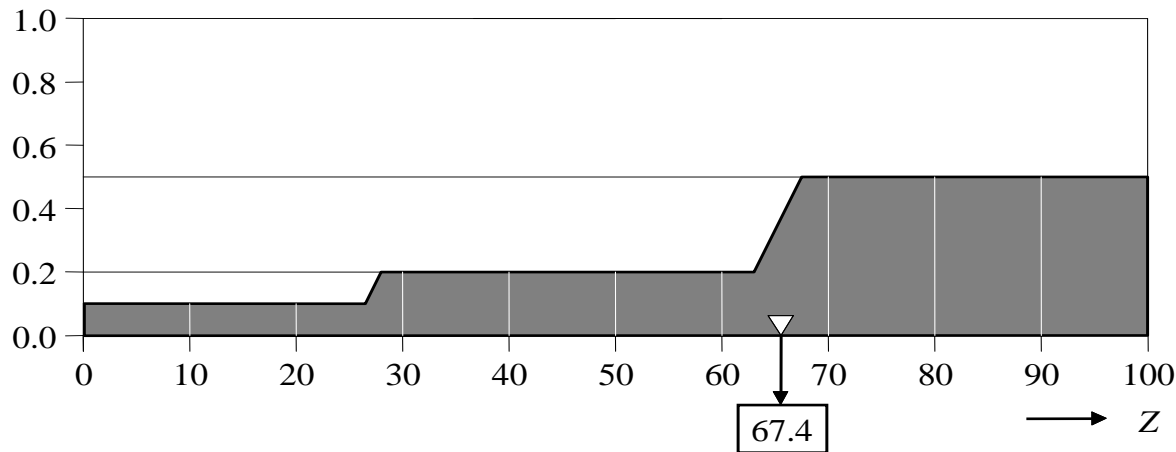
Método de Inferência Difusa

Defuzzificação – Alguns Métodos

Centro da Gravidade-CG – Exemplo

- O método de defuzzificação do CG encontra um ponto que representa o centro de gravidade do conjunto agregado difuso A, no intervalo [a, b].
- Uma estimativa razoável pode ser obtido através do cálculo sobre uma amostra de pontos.

Degree of Membership



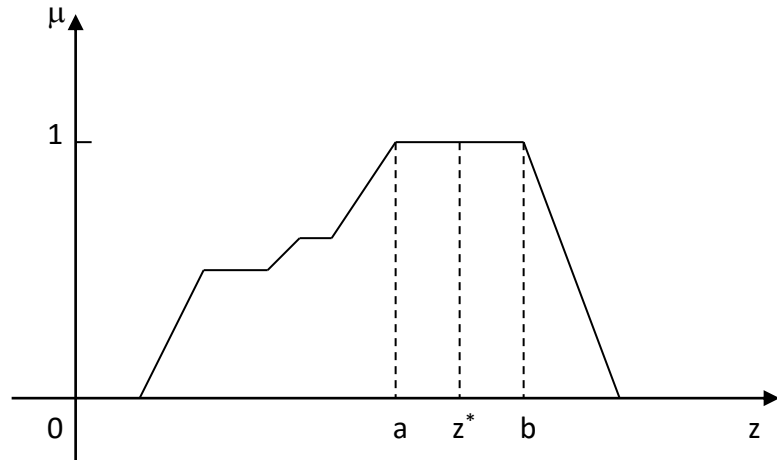
$$CG = \frac{(0+10+20) \times 0.1 + (30+40+50+60) \times 0.2 + (70+80+90+100) \times 0.5}{0.1+0.1+0.1+0.2+0.2+0.2+0.2+0.5+0.5+0.5+0.5} = 67.4$$

Método de Inferência Difusa

Defuzzificação – Alguns Métodos

Mean-MAX Pertinência – MOM
(middle-of-maxima method)

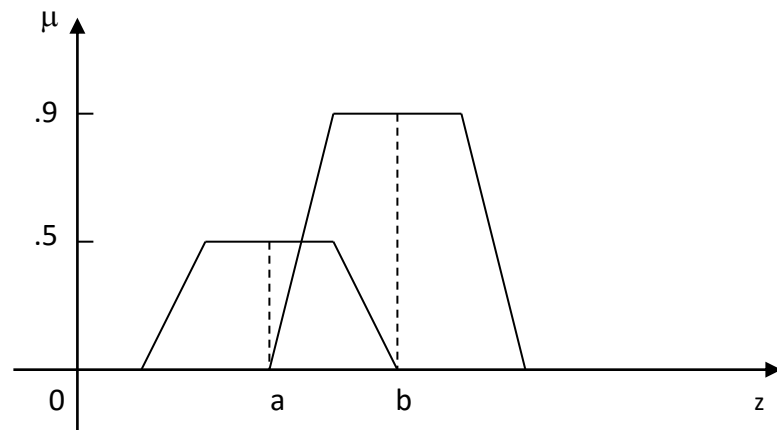
$$z^* = \frac{a + b}{2}$$



Média Ponderada

Válida somente para funções de pertinência simétricas

$$z^* = \frac{\sum \mu_c(\bar{z}) \times \bar{z}}{\sum \mu_c(\bar{z})}$$



Método de Inferência Difusa

Defuzzificação – Alguns Métodos

Média Ponderada – Exemplo

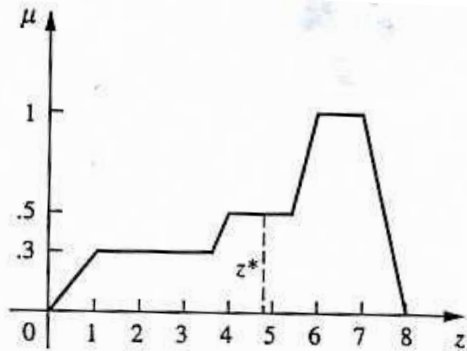


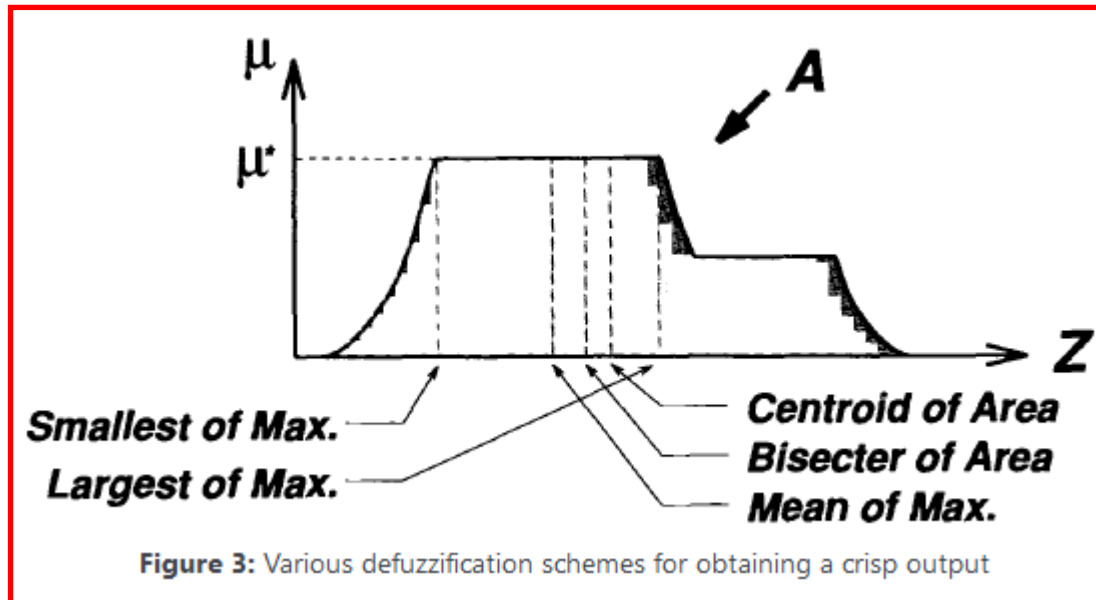
FIGURE 5.12

The centroid method for finding z^* .

$$z^* = \frac{(.3 \times 2.5) + (.5 \times 5) + (1 \times 6.5)}{.3 + .5 + 1} = 5.41 \text{ meters}$$

Método de Inferência Difusa

Defuzzificação – Sumário de diferentes métodos



<http://www.bindichen.co.uk/post/AI/mamdani-fuzzy-model.html>

Sistema de Inferência Difusa

Métodos de inferência (Máquinas de inferência)

Os 2 tipos mais importantes de método de inferência fuzzy são Mamdani e Sugeno. O método de inferência difuso do tipo **Mamdani** é o método mais comumente usado. Este método foi introduzido por Mamdani e Assilian (1975).

Outro método de inferência bem conhecido é o chamado método do processo de inferência fuzzy **Sugeno** ou **Takagi-Sugeno-Kang**. Este método foi introduzido por Sugeno (1985). Este método também é chamado de método TS.

A principal diferença entre os dois métodos reside no consequente das regras Fuzzy.

Método de inferência difusa Mamdani

Método de Inferência Difusa Mamdani

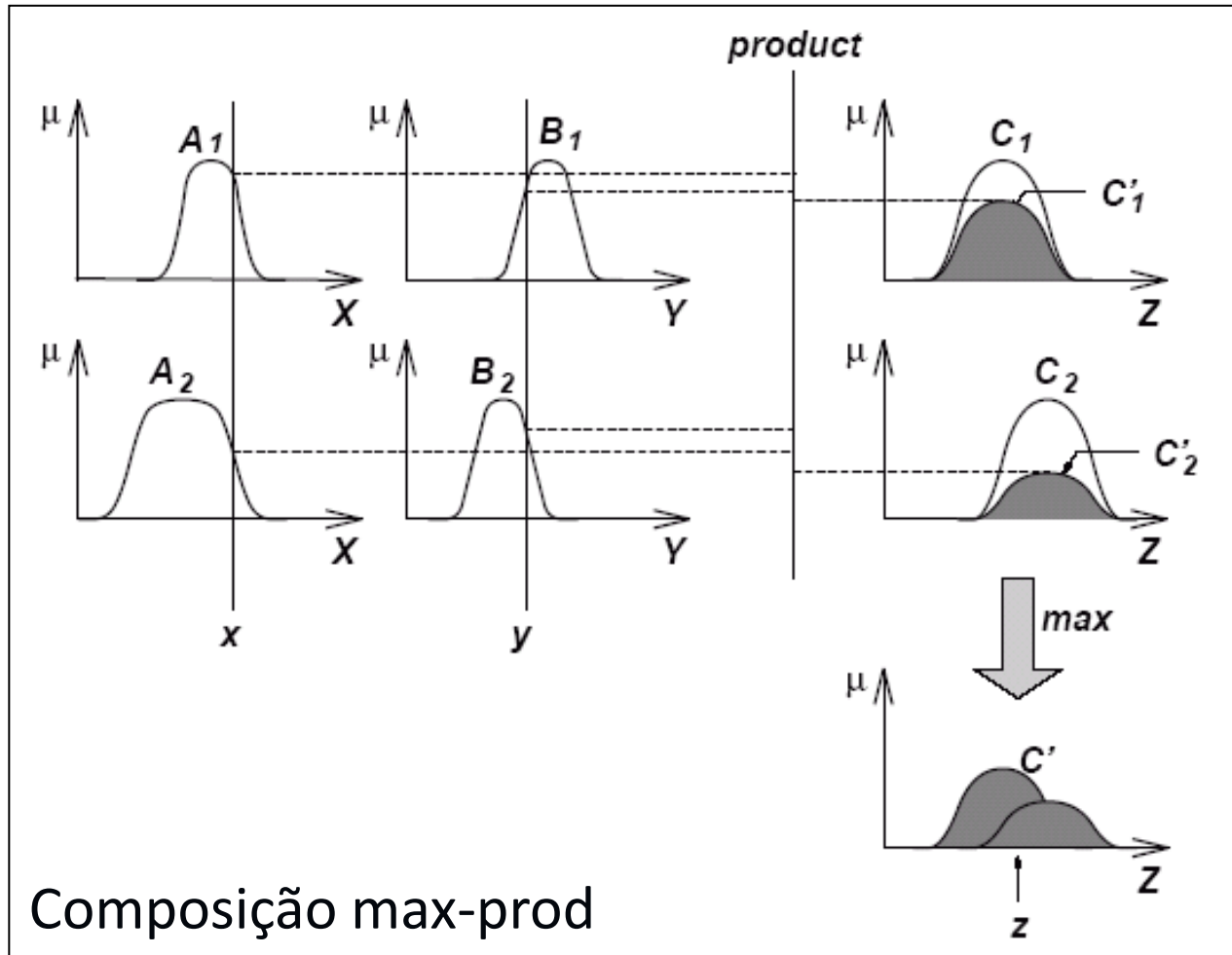
Etapas

Para calcular a saída deste FIS dadas as entradas, seis passos devem ser seguidos

1. Determinar um conjunto de regras fuzzy
2. Fuzzificar as entradas usando as funções de pertinência de entrada;
3. Combinar as entradas fuzzificadas de acordo com as regras fuzzy para estabelecer a “força da regra” (operações difusas);
4. Encontrado o resultado da regra, combinar a “força da regra” com a função de pertinência de saída (implicação);
5. Combinar as consequências para obter uma saída (agregação);
6. Defuzzificar a saída (apenas se uma saída crisp é necessária).

Método de Inferência Difusa Mamdani

Esquema de raciocínio



Método de Inferência Difusa Mamdani

Exemplo

Examinamos um problema de uma saída simples e duas entradas que inclui 3 regras:

Regra: 1 **SE** \underline{X} é A_{3-} **OU** \underline{y} é B_{1-} **ENTÃO** \underline{z} é C_{1-}

Regra: 2 **SE** \underline{x} é A_{2-} **E** \underline{y} é B_{2-} **ENTÃO** \underline{z} é C_{2-}

Regra: 3 **SE** \underline{x} é A_{1-} **ENTÃO** \underline{Z} é C_{3-}

Exemplo da vida real para esses tipos de regras:

Regra: 1 **SE** project_funding é adequado **OU** project_staffing é pequena, **ENTÃO** o risco é baixo.

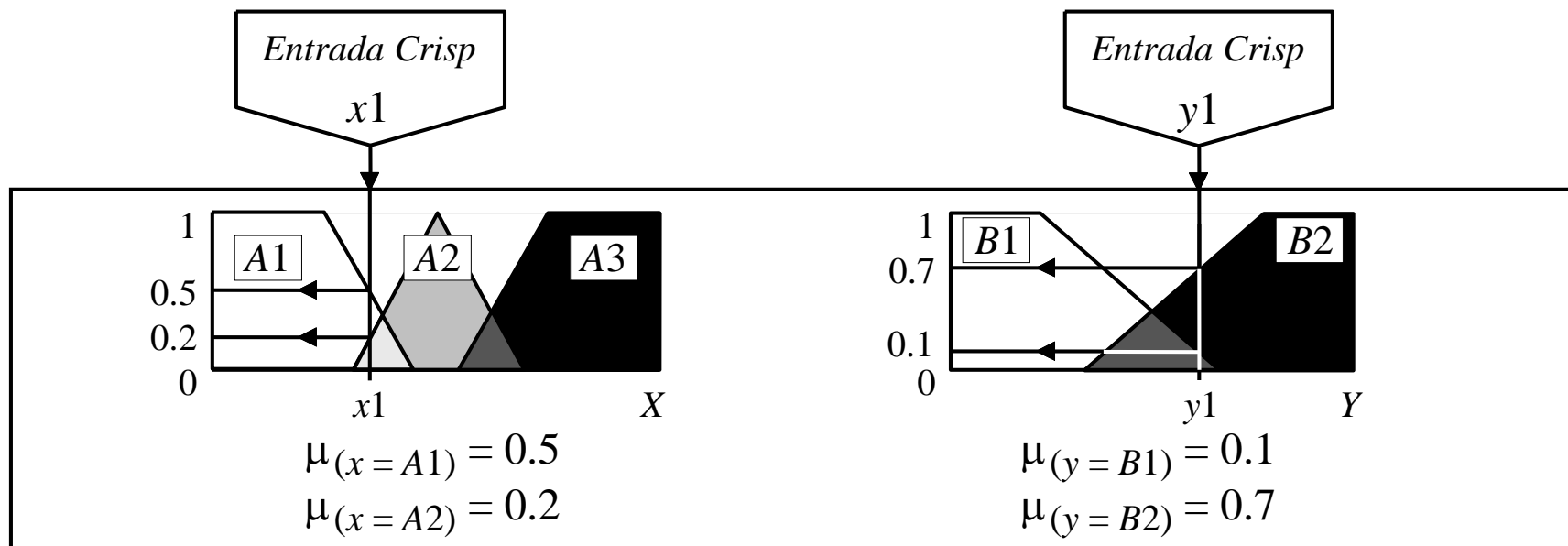
Regra: 2 **SE** project_funding é marginal **E** project_staffing é grande, **ENTÃO** o risco é normal.

Regra: 3 **SE** project_funding é inadequado **ENTÃO** risco é alto.

Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 1: Fuzzificação

O primeiro passo é tomar as entradas crisp, x_1 e y_1 (financiamento do projeto e de pessoal do projeto), e determinar o grau com que essas entradas pertencem a cada um dos conjuntos fuzzy.



Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 2: Avaliação das regras

O passo seguinte é tomar as entradas fuzzificadas

$$\mu_{(x=A1)} = 0,5, \mu_{(x=A2)} = 0,2, \mu_{(y=B1)} = 0,1 \text{ e } \mu_{(y=B2)} = 0,7,$$

e aplicá-los aos antecedentes das regras difusas.

Se uma dada regra difusa tem múltiplos antecedentes, o operador difuso (**E** e **OU**) é utilizado para obter um único número que representa o resultado da avaliação do antecedente.

RELEMBRANDO: Avaliar a disjunção dos antecedentes da regra, usa-se o operador **OU**. Normalmente, os sistemas especialistas difusos geralmente fazem uso da operação clássica de união difusa:

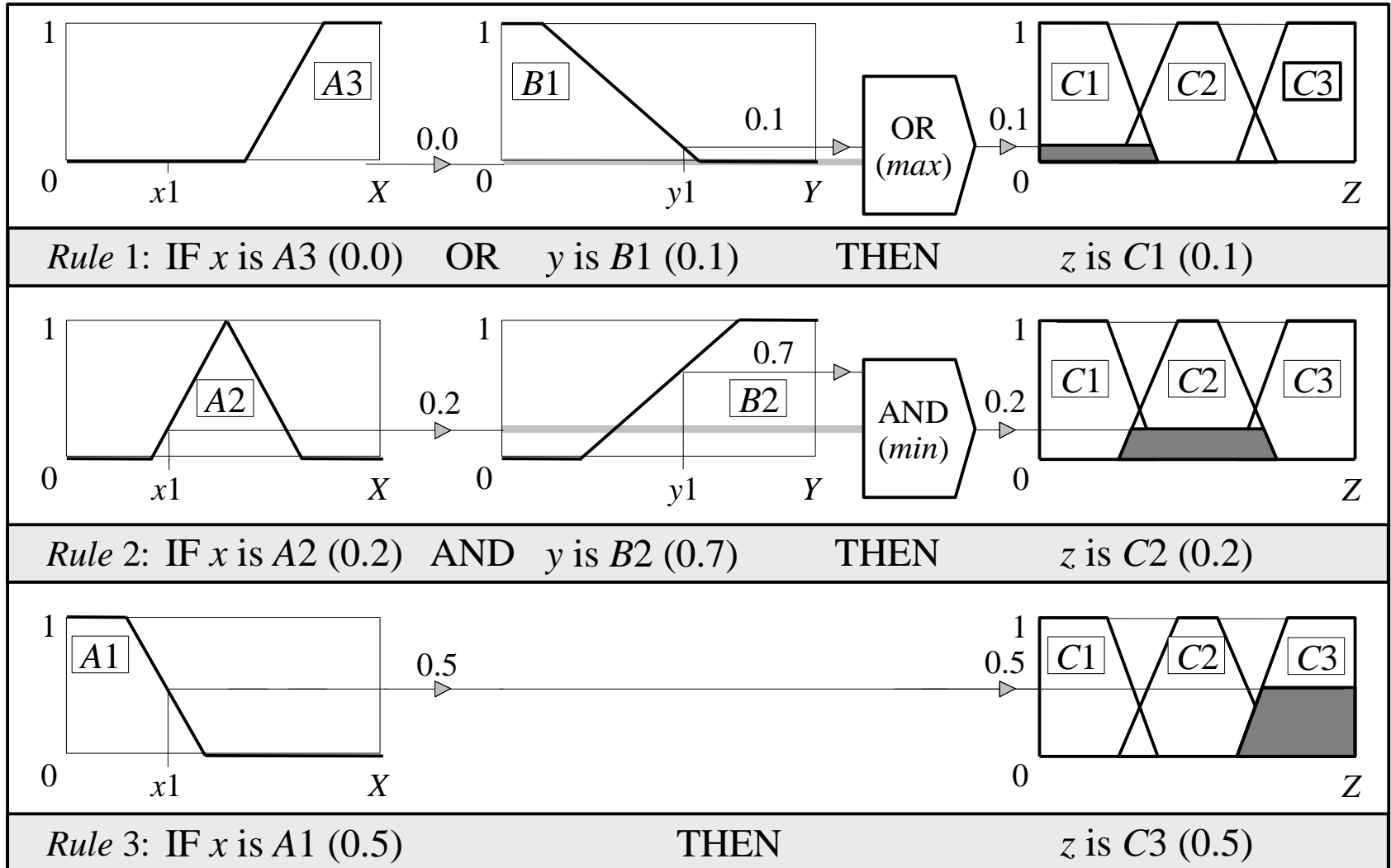
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Da mesma forma, a fim de avaliar o conjunto dos antecedentes da regra usando **E**, geralmente aplica-se o operador de interseção difuso:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 2: Avaliação das regras



Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 2: Avaliação das regras

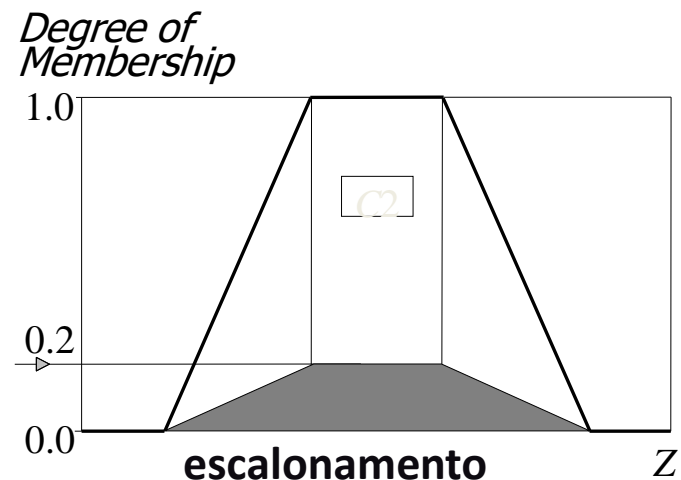
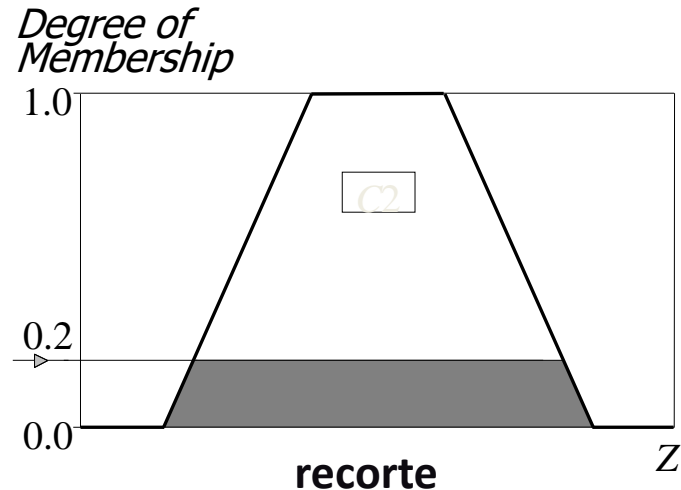
Agora, o resultado da avaliação do antecedente pode ser aplicado para a função de pertinência do consequente.

O método mais comum é cortar a função de pertinência do consequente ao nível da “verdade” do antecedente. Este método é chamado de **recorte** (corte-alfa).

- Como o topo da função de pertinência é cortado, o conjunto difuso fatiado/cortado perde algumas informações.
- No entanto, o corte-alfa ainda é muitas vezes preferido porque envolve matemática menos complexa e mais rápida, e gera uma figura de saída agregada mais fácil de defuzzificar.

Enquanto corte-alfa é um método frequentemente utilizado, o **escalonamento** oferece uma melhor abordagem para a preservação da forma original do conjunto difuso.

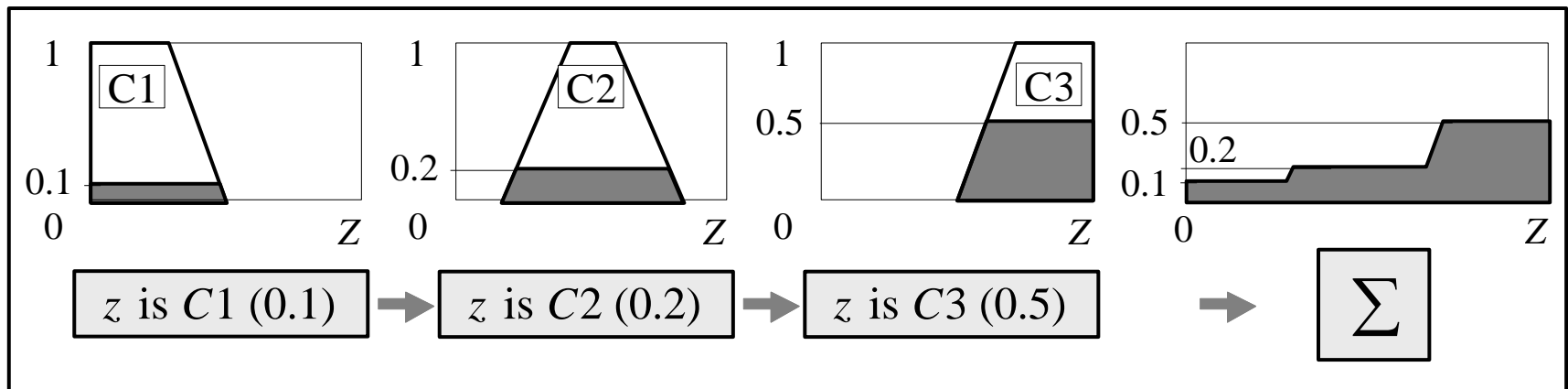
- A função de pertinência original do consequente da regra é ajustada multiplicando todos os seus graus de pertinência pelo grau de “verdade” do antecedente da regra.
- Este método, que geralmente perde menos informação, pode ser muito útil em sistemas especialistas difusos.



Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 3: Agregação das saídas das regras

- A agregação é o processo de unificação das saídas de todas as regras.
- Tomamos as funções de pertinência de todos os consequentes das regras previamente cortadas ou escalonadas e combinamos num único conjunto difuso.
- A entrada do processo de agregação é a lista das funções de pertinência consequentes cortadas ou escalonadas, e a saída é um conjunto difuso para cada variável de saída.



Método de Inferência Difusa Mamdani

Passo 4: Defuzzificação

- O último passo no processo de inferência difuso é a defuzzificação.
- *Fuzziness* ajuda-nos a avaliar as regras, mas o resultado final de um sistema difuso tem que ser um número crisp.
- A entrada para o processo de defuzzificação é o conjunto difuso de saída agregado e a saída é um número crisp (*singelton*).

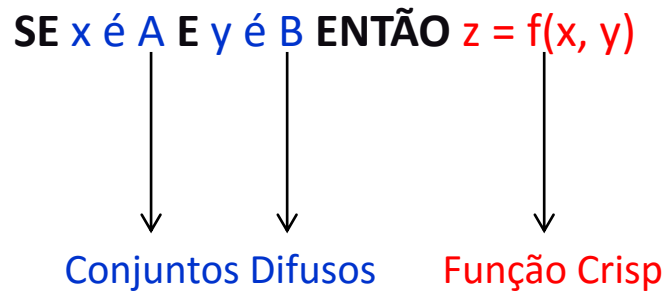
Método de inferência difusa Sugeno

Método de Inferência Difusa Sugeno

- A técnica de Inferência Mamdani, como acabamos de ver, obriga-nos a encontrar o centroide de uma forma bidimensional através da integração de uma função contínua. Em geral, este processo não é computacionalmente eficiente.
- **Michio Sugeno** sugeriu o uso de um único ponto, um *singleton*, como função de pertinência do consequente da regra.
- Um *singleton*, ou mais precisamente um *singleton* difuso, é um conjunto fuzzy com uma função de pertinência que é a unidade em um único ponto do universo de discurso e de zero em qualquer outro lugar.
- Também conhecido como **modelo difuso TSK (Takagi, Sugeno & Kang)**

Método de Inferência Difusa Sugeno

Regras difusas do modelo Sugeno



$f(x, y)$ muitas vezes é uma função polinomial

Método de Inferência Difusa Sugeno

Exemplos de Regras do modelo Sugeno

R1: SE X é pequeno E Y é grande ENTÃO $z = -x + y + 1$

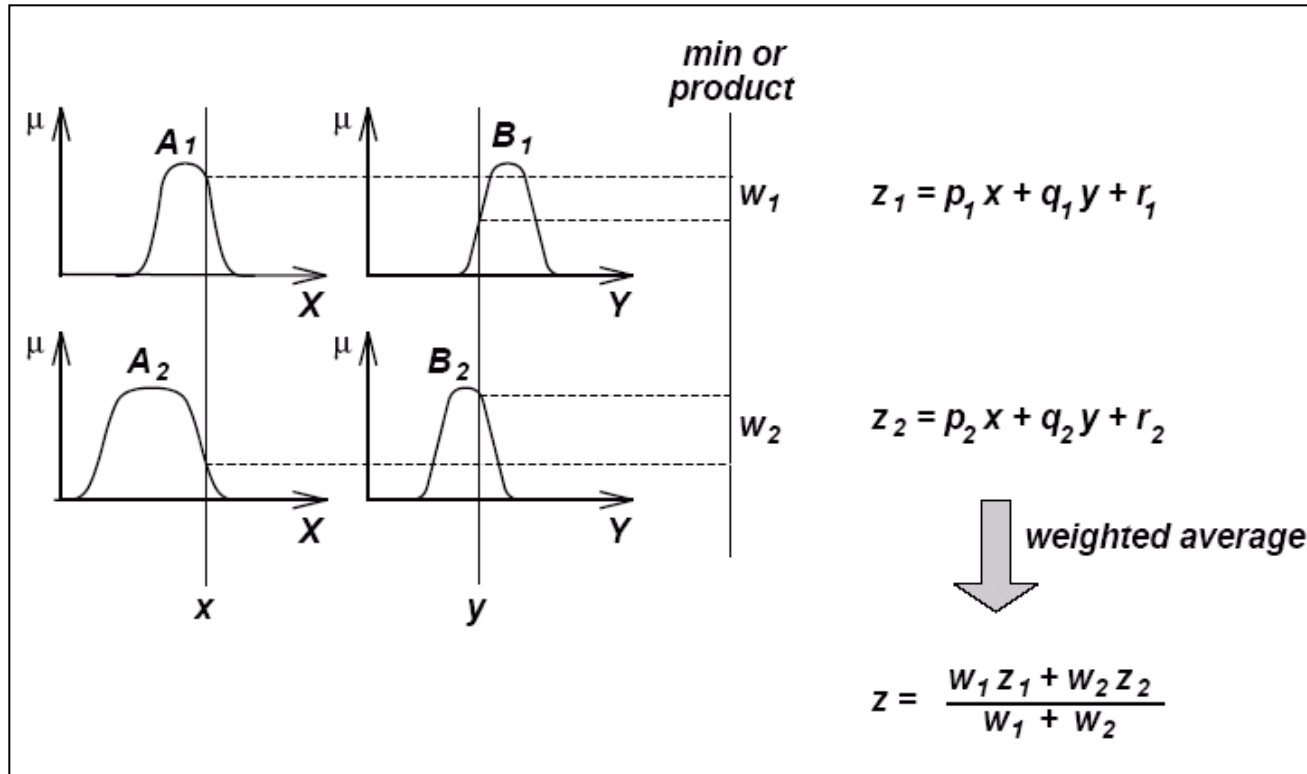
R2: SE X é pequeno E Y é grande ENTÃO $z = -y + 3$

R3: SE X é pequeno E Y é grande ENTÃO $z = -x + 3$

R4: SE X é pequeno E Y é grande ENTÃO $z = x + y + 2$

Método de Inferência Difusa Sugeno

Esquema de Raciocínio



Método de Inferência Difusa Sugeno

Regras difusas do modelo Sugeno

O estilo de inferência sugeno é muito semelhante ao método Mamdani.

Sugeno alterou apenas o consequente da regra: em vez de um conjunto difuso, ele usou uma função matemática dada em função das entradas.

O formato da regra difusa estilo Sugeno é

SE x é A **E** Y é B **ENTÃO** z é $f(x, y)$

onde:

x , y e z são termos linguísticos;

A e B são conjuntos difusos (variáveis linguísticas) nos universos de discursos X e Y , respectivamente;

$f(x, y)$ é uma função matemática crisp.

O formato mais comum das regras é :

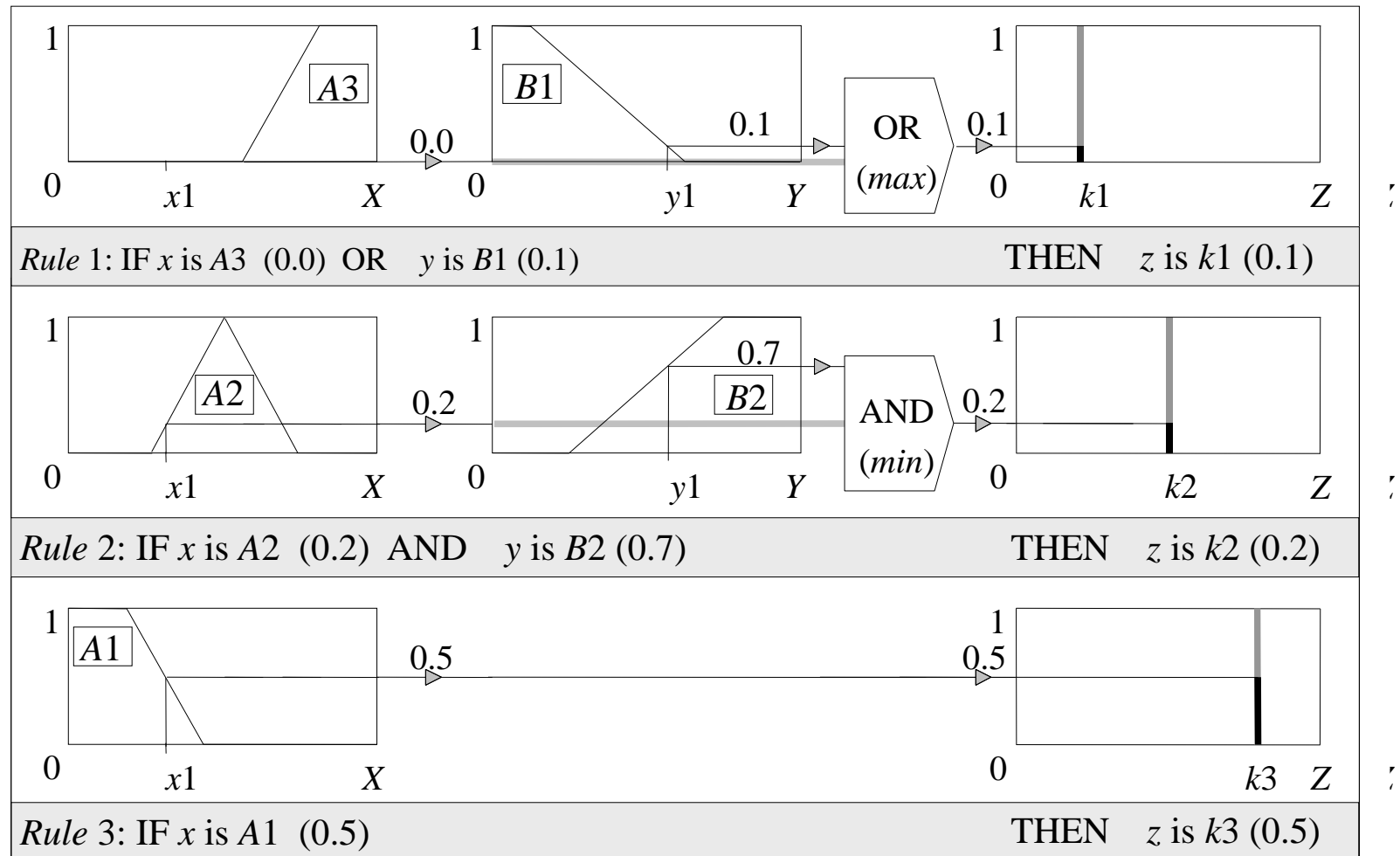
SE x é A **E** Y é B **ENTÃO** z é k

onde k é uma constante.

Neste caso, a saída de cada regra difusa é uma constante e todas as funções de pertinência consequentes são representados por pontos únicos (*singletons*).

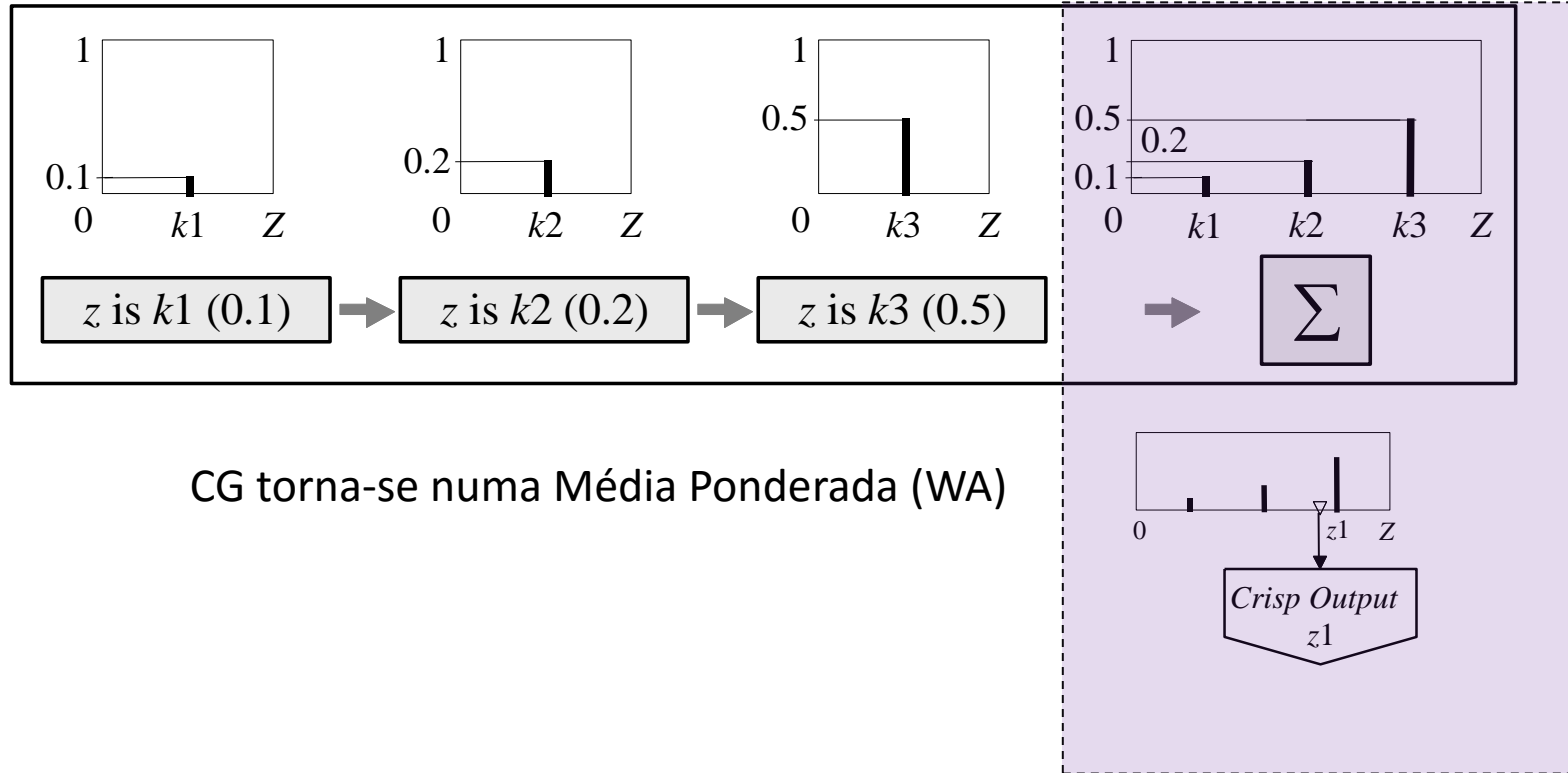
Método de Inferência Difusa Sugeno

Exemplo – Fuzzificação



Método de Inferência Difusa Sugeno

Exemplo – Agregação das regras e defuzzificação



CG torna-se numa Média Ponderada (WA)

$$WA = \frac{\mu(k1) \times k1 + \mu(k2) \times k2 + \mu(k3) \times k3}{\mu(k1) + \mu(k2) + \mu(k3)} = \frac{0.1 \times 20 + 0.2 \times 50 + 0.5 \times 80}{0.1 + 0.2 + 0.5} = 65$$

Mamdani ou Sugeno?

- Método de Mamdani é amplamente aceito para a captura de conhecimento especializado. Ele nos permite descrever a experiência de forma mais intuitiva, mais semelhante à humana. No entanto, o tipo de inferência Mamdani implica numa carga computacional considerável.
- Por outro lado, o método de Sugeno é computacionalmente eficiente e funciona bem com otimização e técnicas adaptativas, o que torna muito atraente em problemas de controle, especialmente para sistemas dinâmicos não-lineares.

Mamdani ou Sugeno?

Advantages of the Sugeno Method

Advantages of the Sugeno Method

It is computationally efficient.

It can be used to model any inference system in which the output membership functions are either linear or constant.

It works well with linear techniques (e.g., PID control).

It works well with optimization and adaptive techniques.

It has guaranteed continuity of the output surface.

It is well suited to mathematical analysis.

Advantages of the Mamdani Method

It is intuitive.

It has widespread acceptance.

It is well suited to human input.

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação: FITA e FATI

O processo de inferência Mamdani opera no nível de regras individuais. Assim, a aplicação da inferência baseado na composição de regras à entrada atual usando m regras na base de conhecimento gera m conjuntos de saída difusos B_i' . A interface de defuzzificação necessita agregar a informação propiciada por m conjuntos difusos de saída para obter um valor de saída crisp deles. Esta tarefa pode ser feita de dois modos:

FATI – First Aggregate, then infer

FITA – First infer, then aggregate

Mamdani originalmente propôs o modo FATI. Nos últimos anos o modo FITA está se tornando mais popular em aplicações reais que demandam resposta rápida

Modos de Inferência Difusa

Modo de defuzzificação FATI

Neste caso, a interface de defuzzificação ocorre da seguinte forma:

- i. Agregar os conjuntos difusos individuais B_i' num único conjunto B' por meio de um operador de agregação G

$$\mu_{B'}(y) = G\{\mu_{B_1'}(y), \mu_{B_2'}(y), \dots, \mu_{B_n'}(y)\}$$

- ii. Empregar um método de defuzzificação, D , que transforma o conjunto difuso B' numa saída crisp y_0 :

$$y_0 = D(\mu_{B'}(y))$$

Geralmente o operador de agregação G é o “máximo” e o defuzzificador D é o “centro de gravidade” – CG ou a “média do máximo” – MOM.

$$\text{CG: } y_0 = \frac{\int_Y y \mu_{B'}(y) dy}{\int_Y \mu_{B'}(y) dy}$$

$$\begin{aligned} \text{MOM: } y_{\text{inf}} &= \inf \{z \mid \mu_{B'}(y) = \sup \mu_{B'}(y)\} \\ y_{\text{sup}} &= \sup \{z \mid \mu_{B'}(y) = \sup \mu_{B'}(y)\} \\ y_0 &= \frac{y_{\text{inf}} + y_{\text{sup}}}{2} \end{aligned}$$

Modos de Inferência Difusa

Modo de defuzzificação FITA

A contribuição de cada conjunto difuso é considerada separadamente e o valor crisp final é obtido por meio de uma média ou uma operação de seleção executada no conjunto dos valores crisp derivados de cada conjunto difuso individual B_i' .

A escolha mais comum é o CG ou o “valor máximo”- MV ponderado pelos graus de pertinência cuja expressão é

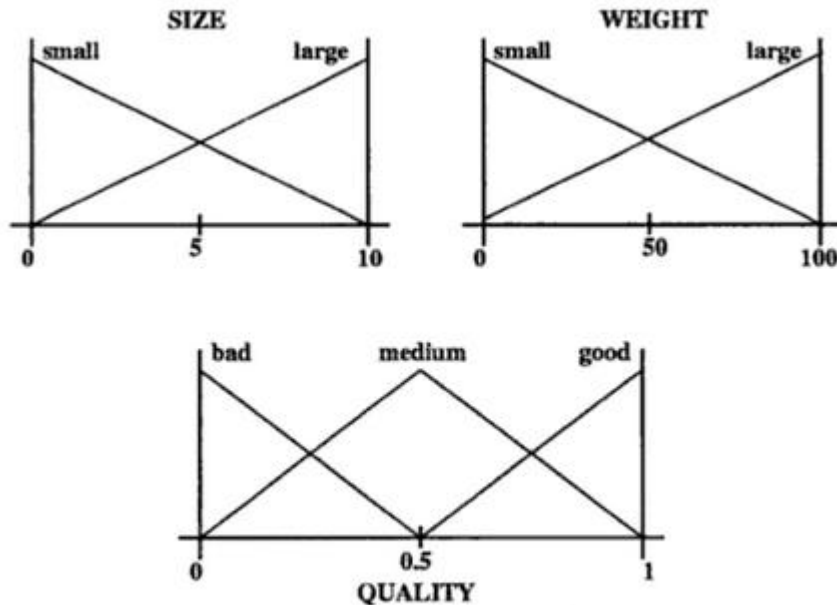
$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^m h_i y_i}{\sum_{i=1}^m h_i}$$

onde y_i é o CG ou o MV do conjunto difuso inferido da regra R_i , B_i' , e $h_i = \mu_A(x_0)$ o grau correspondente entre x_0 e o antecedente da regra R_i .

Portanto, esta abordagem evita agregação as saídas das regras a um conjunto difuso B' , que reduz o tempo e complexidade computacional se comprado com o modo FATI.

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação FITA x FATI – Exemplo



rules:

R_1 : IF size is small and weight is small THEN quality is bad,

also

R_2 : IF size is small and weight is large THEN quality is medium,

also

R_3 : IF size is large and weight is small THEN quality is medium,

also

R_4 : IF size is large and weight is large THEN quality is good

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação FITA x FATI – Exemplo

Let us consider that the current system output is $x_0 = (2, 25)$. This output is matched against the rule antecedents in order to determine the firing strength h_i of each rule R_i in the RB. The following results are obtained:

$$R_1 : h_1 = \min(\mu_{small}(2), \mu_{small}(25)) = \min(0.8, 0.75) = 0.75$$

$$R_2 : h_2 = \min(\mu_{small}(2), \mu_{large}(25)) = \min(0.8, 0.25) = 0.25$$

$$R_3 : h_3 = \min(\mu_{large}(2), \mu_{small}(25)) = \min(0.2, 0.75) = 0.2$$

$$R_4 : h_4 = \min(\mu_{large}(2), \mu_{large}(25)) = \min(0.2, 0.25) = 0.2$$

Then, the inference system applies the compositional rule of inference on each individual linguistic rule to obtain the inferred fuzzy sets B'_i as follows:

$$R_1 : \mu_{B'_1}(y) = \min(h_1, \mu_{B_1}(y)) = \min(0.75, \mu_{bad}(y))$$

$$R_2 : \mu_{B'_2}(y) = \min(h_2, \mu_{B_2}(y)) = \min(0.25, \mu_{medium}(y))$$

$$R_3 : \mu_{B'_3}(y) = \min(h_3, \mu_{B_3}(y)) = \min(0.2, \mu_{medium}(y))$$

$$R_4 : \mu_{B'_4}(y) = \min(h_4, \mu_{B_4}(y)) = \min(0.2, \mu_{good}(y))$$

The operation of the inference engine is graphically illustrated in Fig. 1.5 which depicts the membership functions $\mu_{B'_i}$ resulting from the inference step.

Finally, the defuzzification interface aggregates the four individual output fuzzy sets by means of the maximum t-conorm:

$$\mu_{B'}(y) = \max \{ \mu_{B'_1}(y), \mu_{B'_2}(y), \mu_{B'_3}(y), \mu_{B'_4}(y) \}$$

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação FITA x FATI – Exemplo

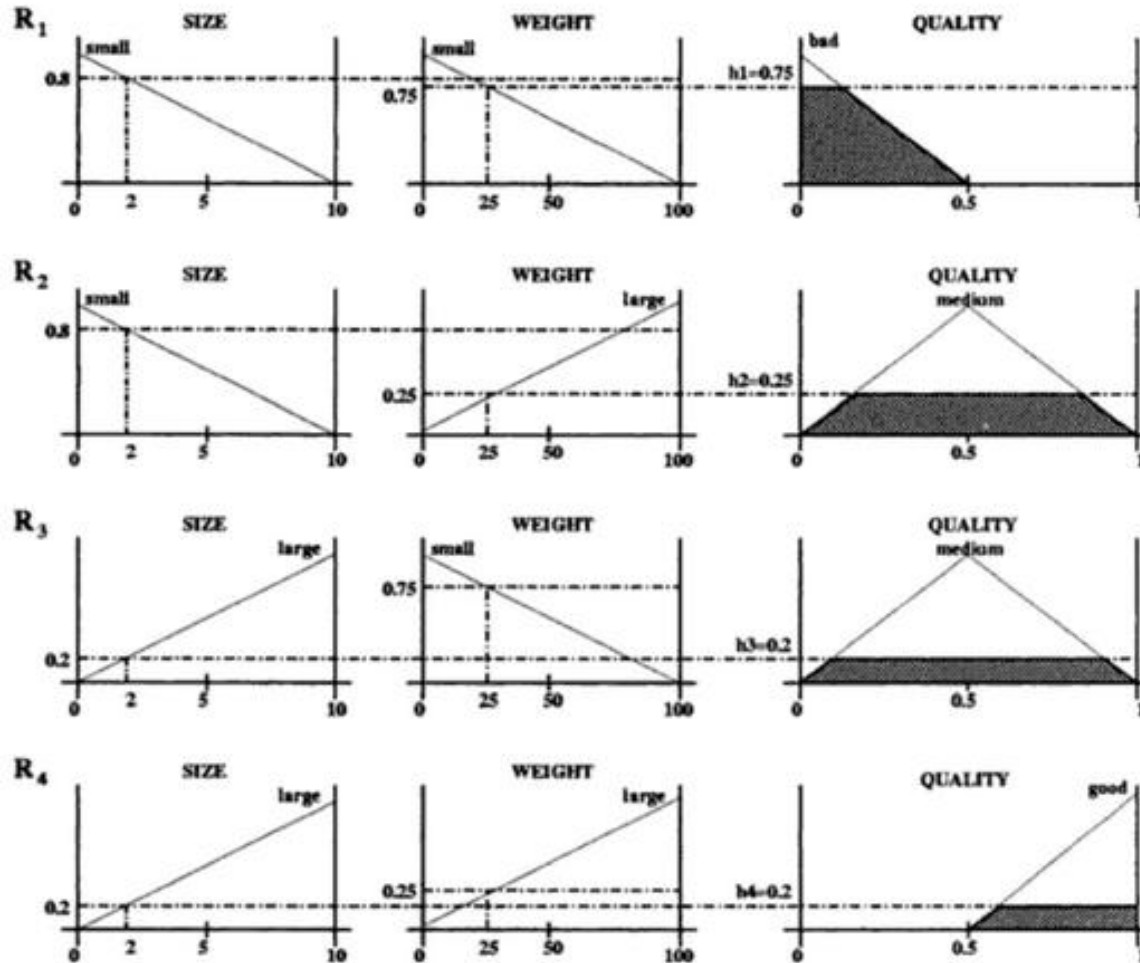


Fig. 1.5 Operation mode of the inference system

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação FITA x FATI – Exemplo

and defuzzifies the resulting aggregated fuzzy set by means of the CG strategy:

$$y_0 = \frac{\int_Y y \cdot \mu_{B'}(y) dy}{\int_Y \mu_{B'}(y) dy}$$

thus obtaining the final value $y_0 = 0.3698$. This process is graphically represented in Fig. 1.6.



Fig. 1.6 Mode A-FATI defuzzification with the max-centre of gravity strategy

Modos de Inferência Difusa

Modos de defuzzificação FITA x FATI – Exemplo

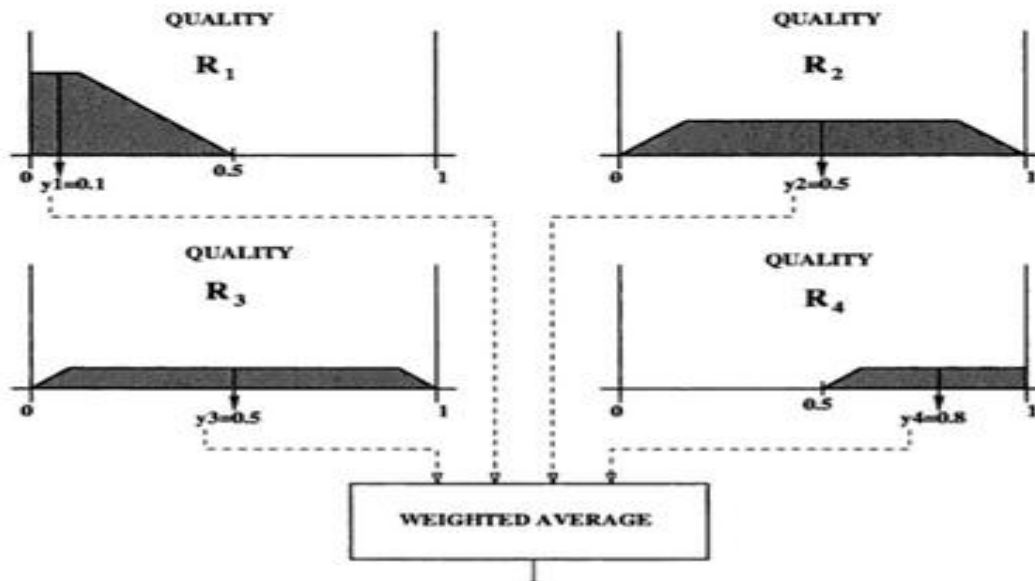
On the other hand, if a mode **B-FITA** defuzzification interface based on the “MV weighted by the matching” defuzzifier is selected, the final crisp output y_0 is generated by means of the expression:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^m h_i \cdot MV_i}{\sum_{i=1}^m h_i}$$

i.e.,

$$y_0 = \frac{0.75 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.8}{1.4} = \frac{0.46}{1.4} = 0.3286$$

as shown in Fig. 1.7.



Fuzzy Logic

Objections

"Fuzzy theory is wrong, wrong, and pernicious. What we need is more logical thinking, not less. The danger of fuzzy logic is that it will encourage the sort of imprecise thinking that has brought us so much trouble. Fuzzy logic is the cocaine of science."

-Professor William Kahan UC Berkeley

"'Fuzzification' is a kind of scientific permissiveness. It tends to result in socially appealing slogans unaccompanied by the discipline of hard scientific work and patient observation."

-Professor Rudolf Kalman Uflorida

Fuzziness is probability in disguise. I can design a controller with probability that could do the same thing that you could do with fuzzy logic.

-Professor Myron Tribus, on hearing of the fuzzy-logic control of the Sendai subway system IEEE Institute, may 1988.

Most objections to fuzzy logic have since faded due to the success of fuzzy applications.

<http://www.calvin.edu/~priebeiro/othrlnks/Fuzzy/home.htm>

Aplicação 1

<http://users.aber.ac.uk/jqh/csm6320/csm6320-ebook-fuzzy.pdf>

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Problema

- Um centro de serviço mantém peças de reposição e conserta as que falharam.
- Um cliente traz uma peça que falhou e recebe um item de reposição do mesmo tipo.
- Partes avariadas são reparadas, colocadas na prateleira, e assim torna-se peças de reposição.

O objetivo é aconselhar um gerente do centro de serviços em políticas de decisão de manter os clientes satisfeitos.

Método de Inferência Difusa

Etapas

1. Especificar o problema e definir variáveis linguísticas.
2. Determinar os conjuntos difusos.
3. Extrair e construir regras difusas.
4. Codificar os conjuntos fuzzy, regras difusas e procedimentos para realizar a inferência fuzzy no sistema especialista.
5. Avaliar e ajustar o sistema (tuning).

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 1: Definição das variáveis linguísticas

Há quatro principais variáveis linguísticas

1. Tempo médio de espera (média de demora) m
2. Número de servidores ρ
3. Fator de utilização do centro de serviços de reparação r
4. Número inicial de peças de reposição n

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 1: Variáveis linguísticas, termos linguísticos e domínio

Linguistic Variable: <i>Mean Delay, m</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Very Short	VS	[0, 0.3]
Short	S	[0.1, 0.5]
Medium	M	[0.4, 0.7]
Linguistic Variable: <i>Number of Servers, s</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Small	S	[0, 0.35]
Medium	M	[0.30, 0.70]
Large	L	[0.60, 1]
Linguistic Variable: <i>Repair Utilisation Factor, ρ</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range
Low	L	[0, 0.6]
Medium	M	[0.4, 0.8]
High	H	[0.6, 1]
Linguistic Variable: <i>Number of Spares, n</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Very Small	VS	[0, 0.30]
Small	S	[0, 0.40]
Rather Small	RS	[0.25, 0.45]
Medium	M	[0.30, 0.70]
Rather Large	RL	[0.55, 0.75]
Large	L	[0.60, 1]
Very Large	VL	[0.70, 1]

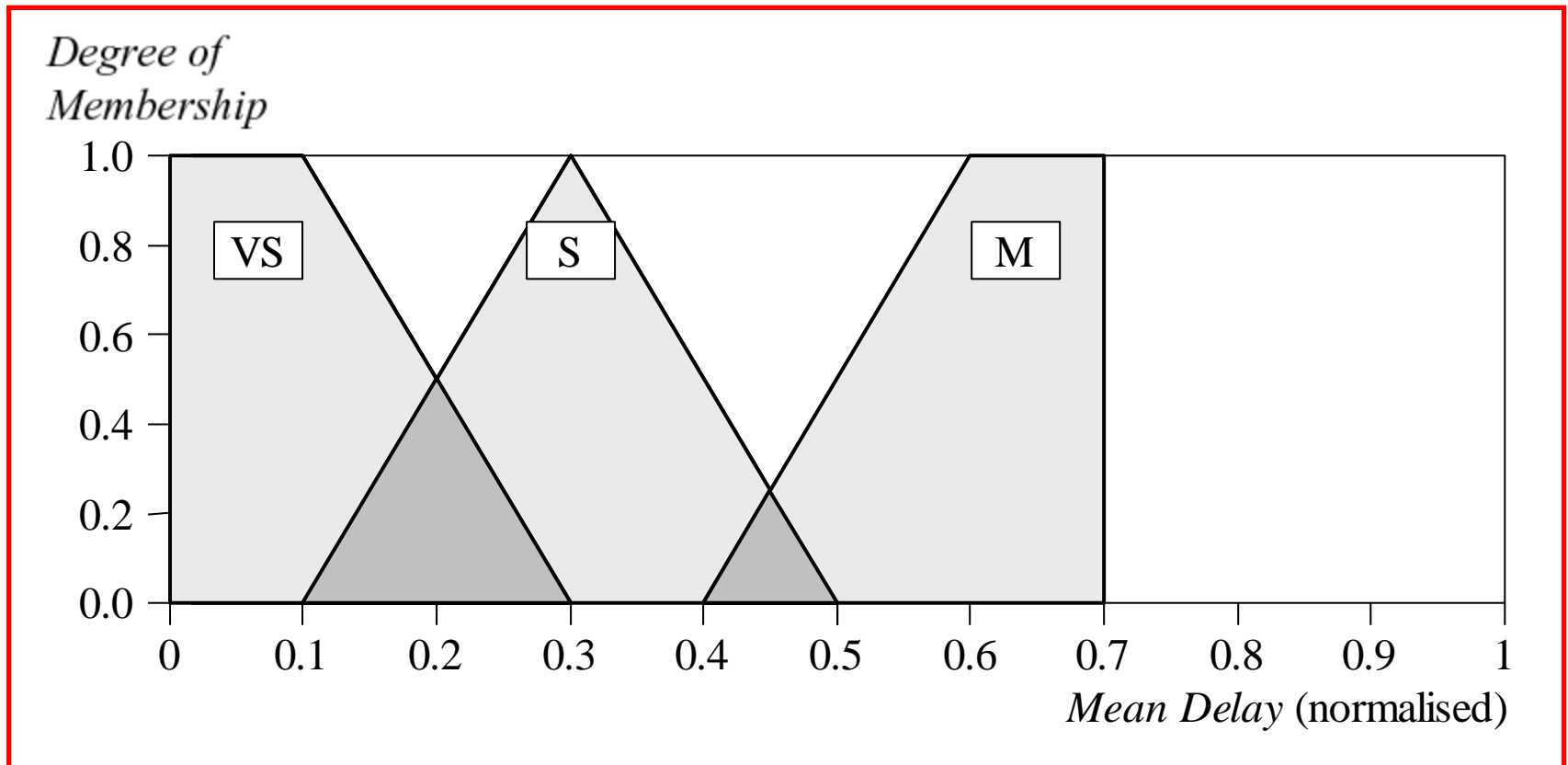
Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 2: Determinação dos conjuntos difusos

Conjuntos fuzzy pode ter uma variedade de formas. No entanto, um triângulo ou um trapézio pode muitas vezes fornecer uma representação adequada do conhecimento especializado, e, ao mesmo tempo, simplifica significativamente o processo computacional.

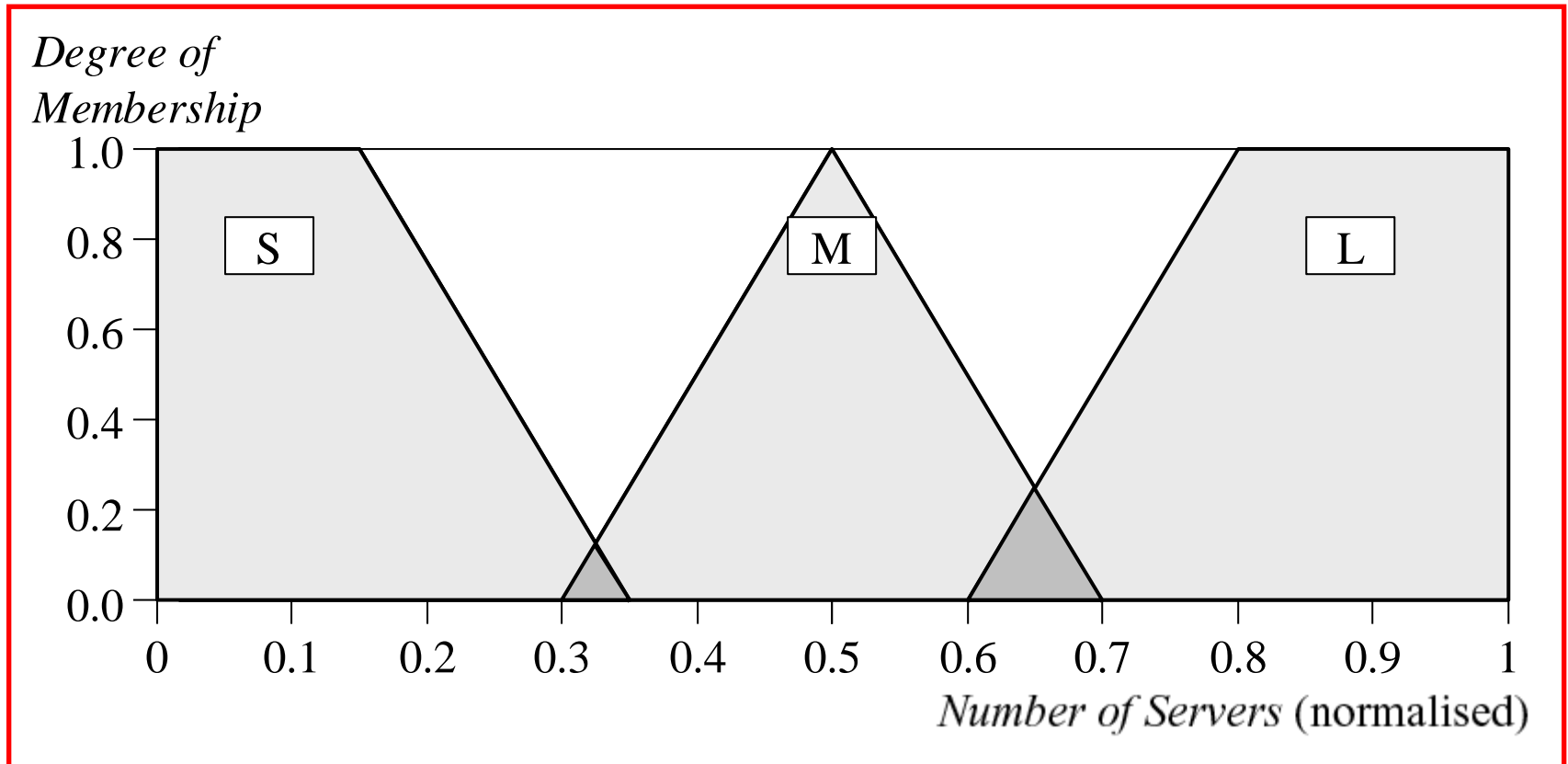
Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 2: Conjunto difuso MÉDIA DE ESPERA m



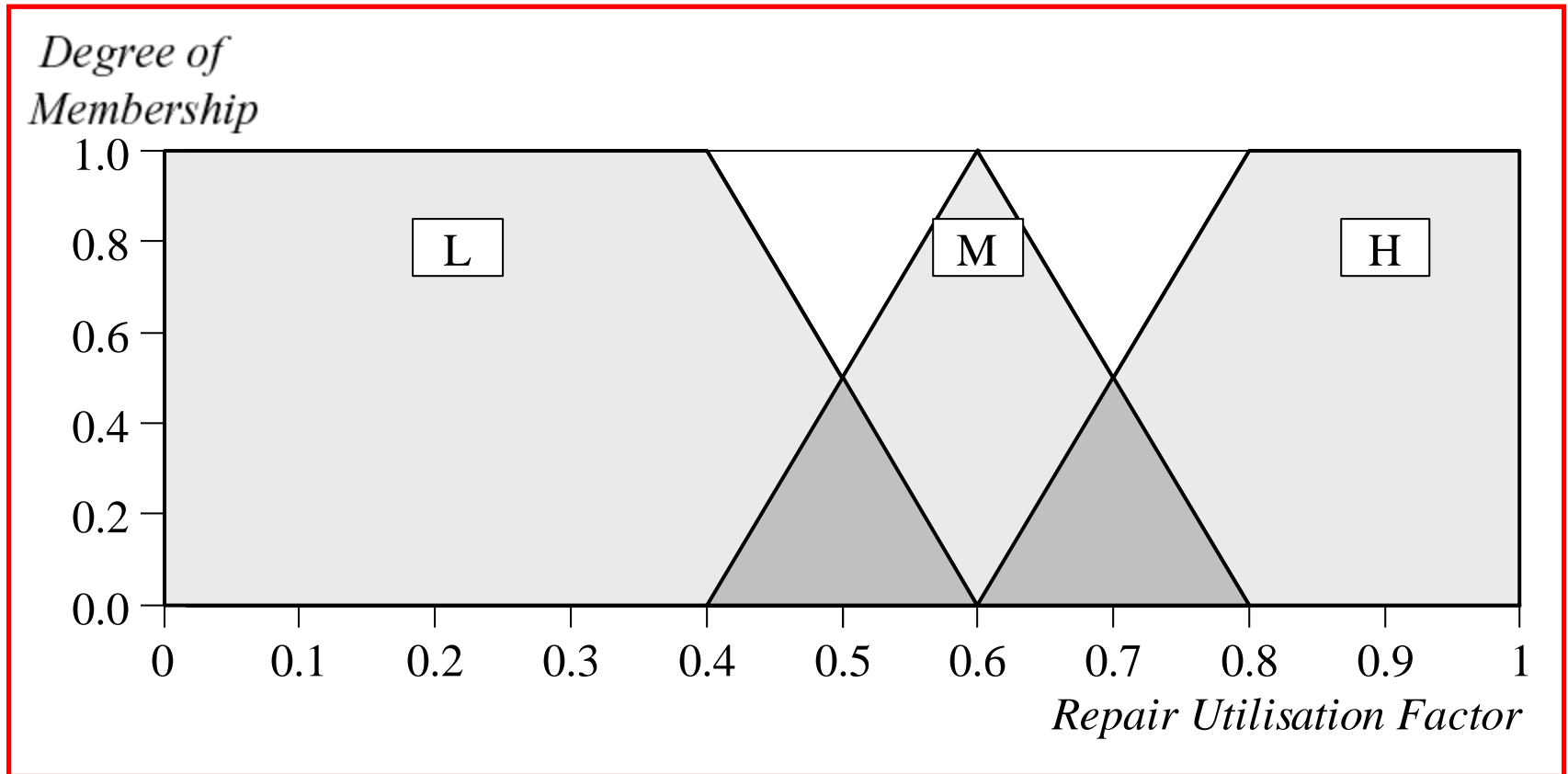
Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 2: Conjunto difuso NÚMERO DE SERVIDORES s



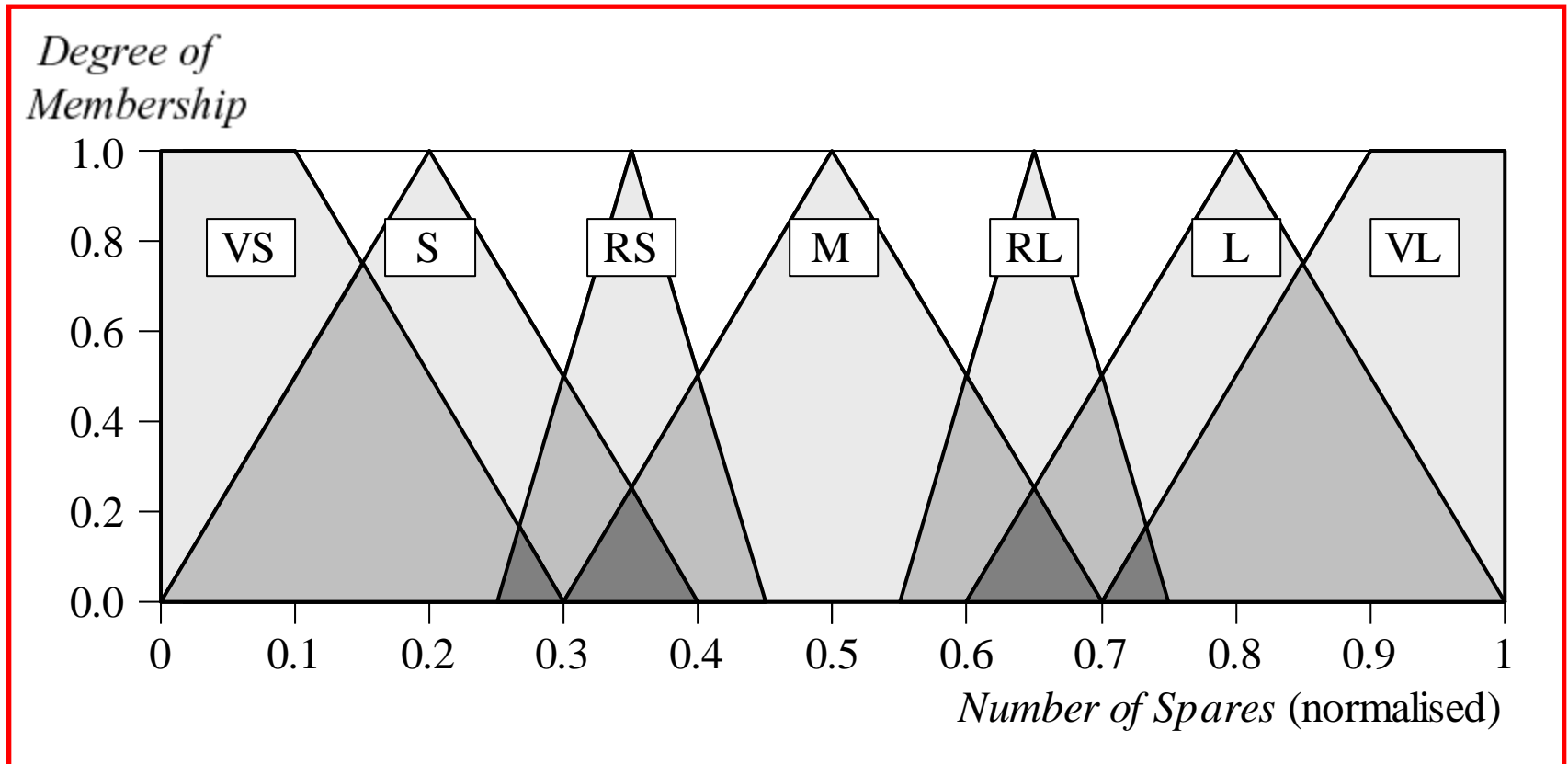
Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 2: Conjunto difuso FATOR DE UTILIZAÇÃO DO CENTRO DE REPARAÇÃO ρ



Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 2: Conjunto difuso NÚMERO DE PEÇAS n



Método de Inferência Difusa

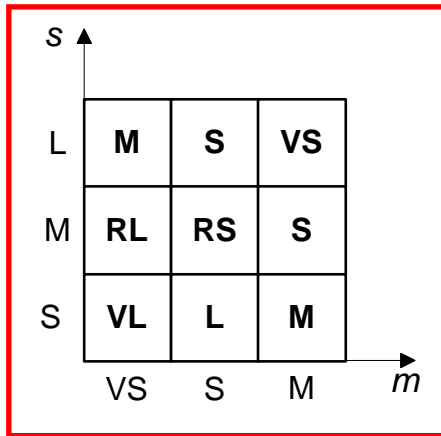
Extrair/deduzir e construir regras difusas

Para realizar essa tarefa, podemos perguntar a especialistas para descrever como o problema pode ser resolvido usando as variáveis linguísticas fuzzy definidas anteriormente.

Conhecimentos necessários também podem ser recolhidas a partir de outras fontes, tais como livros, bases de dados eletrônicas, diagramas de fluxo e comportamento humano observado.

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 3: Representação das regras em 2D – 9 possíveis regras



Linguistic Variable: <i>Mean Delay, m</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Very Short	VS	[0, 0.3]
Short	S	[0.1, 0.5]
Medium	M	[0.4, 0.7]
Linguistic Variable: <i>Number of Servers, s</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Small	S	[0, 0.35]
Medium	M	[0.30, 0.70]
Large	L	[0.60, 1]

Linguistic Variable: <i>Number of Spares, n</i>		
Linguistic Value	Notation	Numerical Range (normalised)
Very Small	VS	[0, 0.30]
Small	S	[0, 0.40]
Rather Small	RS	[0.25, 0.45]
Medium	M	[0.30, 0.70]
Rather Large	RL	[0.55, 0.75]
Large	L	[0.60, 1]
Very Large	VL	[0.70, 1]

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 3: Representação das regras na forma TABULAR – 27 possíveis regras

Rule	m	s	ρ	n	Rule	m	s	ρ	n	Rule	m	s	ρ	n
1	VS	S	L	VS	10	VS	S	M	S	19	VS	S	H	VL
2	S	S	L	VS	11	S	S	M	VS	20	S	S	H	L
3	M	S	L	VS	12	M	S	M	VS	21	M	S	H	M
4	VS	M	L	VS	13	VS	M	M	RS	22	VS	M	H	M
5	S	M	L	VS	14	S	M	M	S	23	S	M	H	M
6	M	M	L	VS	15	M	M	M	VS	24	M	M	H	S
7	VS	L	L	S	16	VS	L	M	M	25	VS	L	H	RL
8	S	L	L	S	17	S	L	M	RS	26	S	L	H	M
9	M	L	L	VS	18	M	L	M	S	27	M	L	H	RS

1. Tempo médio de espera (média de demora) m
2. Número de servidores ρ
3. Fator de utilização do centro de serviços de reparação r
4. Número inicial de peças de reposição n

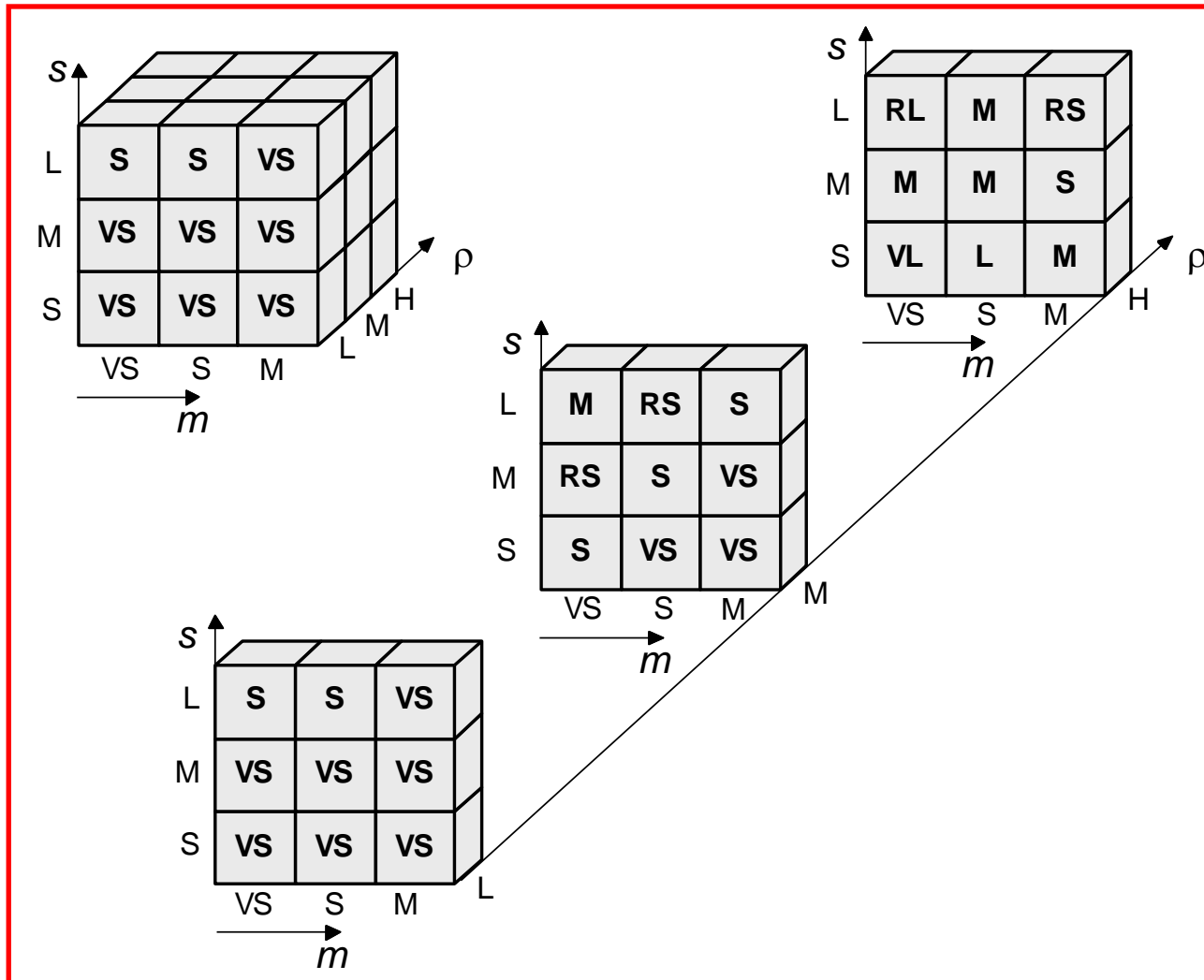
Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 3: Representação expandida das regras (3 + 3×3)

1. If (utilisation_factor is L) then (number_of_spare is S)
2. If (utilisation_factor is M) then (number_of_spare is M)
3. If (utilisation_factor is H) then (number_of_spare is L)
4. If (mean_delay is VS) and (number_of_servers is S) then (number_of_spare is VL)
5. If (mean_delay is S) and (number_of_servers is S) then (number_of_spare is L)
6. If (mean_delay is M) and (number_of_servers is S) then (number_of_spare is M)
7. If (mean_delay is VS) and (number_of_servers is M) then (number_of_spare is RL)
8. If (mean_delay is S) and (number_of_servers is M) then (number_of_spare is RS)
9. If (mean_delay is M) and (number_of_servers is M) then (number_of_spare is S)
10. If (mean_delay is VS) and (number_of_servers is L) then (number_of_spare is M)
11. If (mean_delay is S) and (number_of_servers is L) then (number_of_spare is S)
12. If (mean_delay is M) and (number_of_servers is L) then (number_of_spare is VS)

Aplicação 1 – Concerto e Reposição de Peças

Passo 3: Representação das regras em 3D – 27 regras



Método de Inferência Difusa

Codificar os conjuntos difusos, regras e os procedimentos para executar a inferência fuzzy no sistema especialista.

Para realizar essa tarefa, podemos escolher uma das seguintes opções: construir nosso sistema usando uma linguagem de programação como C / C ++ ou Pascal, ou para aplicar uma ferramenta de lógica fuzzy tais como [MATLAB Toolbox Fuzzy Logic](#).

Método de Inferência Difusa

Avaliação e ajuste/tuning do sistema fuzzy

A última e a mais trabalhosa, é a tarefa de avaliar e ajustar o sistema. Queremos ver se o nosso sistema fuzzy atende aos requisitos especificados no início.

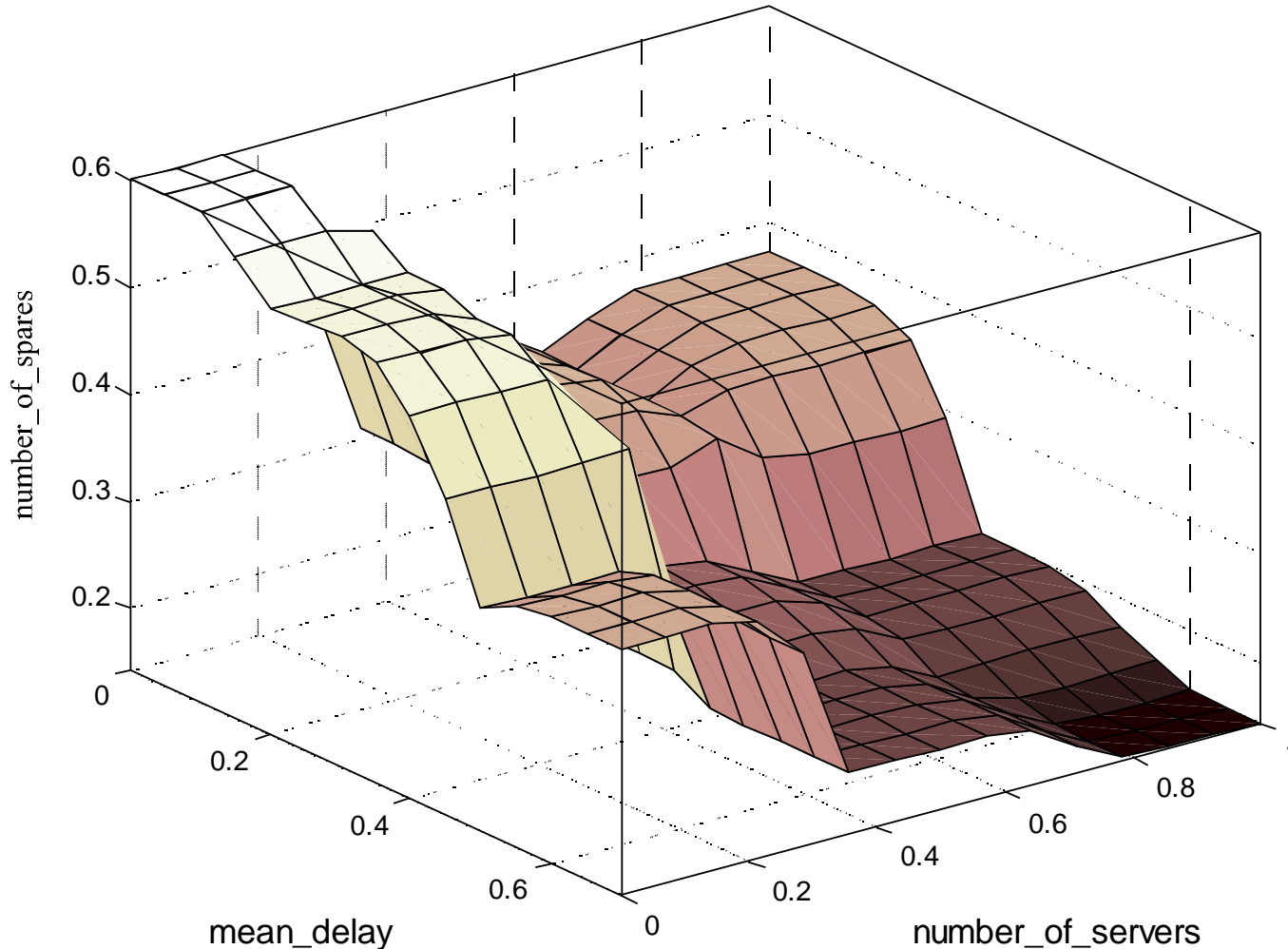
Várias situações de teste dependem do atraso médio, número de servidores e fator de utilização de reparo.

Fuzzy Logic Toolbox pode gerar superfície para nos ajudar a analisar o desempenho do sistema.

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 5: Representação em 3D da regra 4

4. If (mean_delay is VS) and (number_of_servers is S) then (number_of_spare is VL)



Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

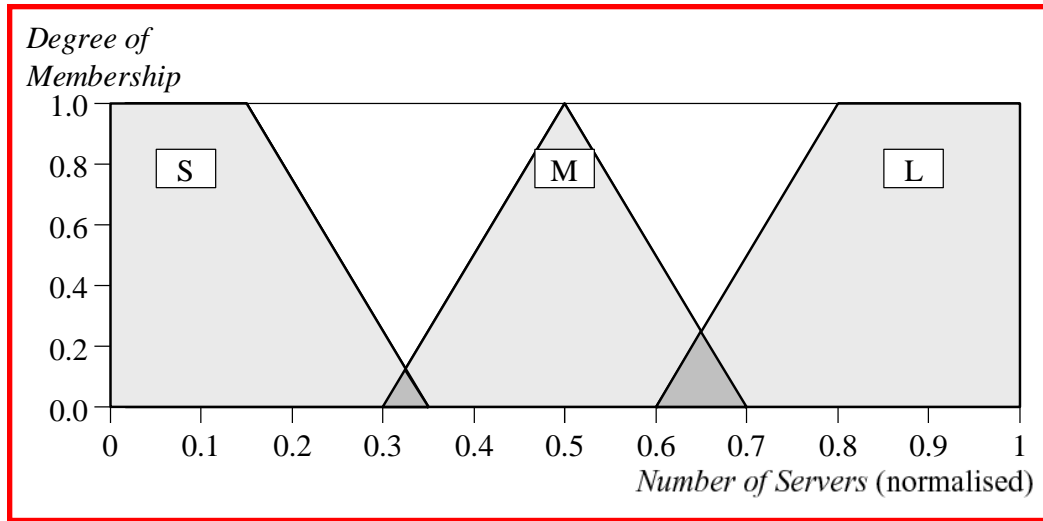
Passo 5: Ajuste/tuning do sistema fuzzy

No entanto o especialista pode não estar satisfeito com o desempenho do sistema.

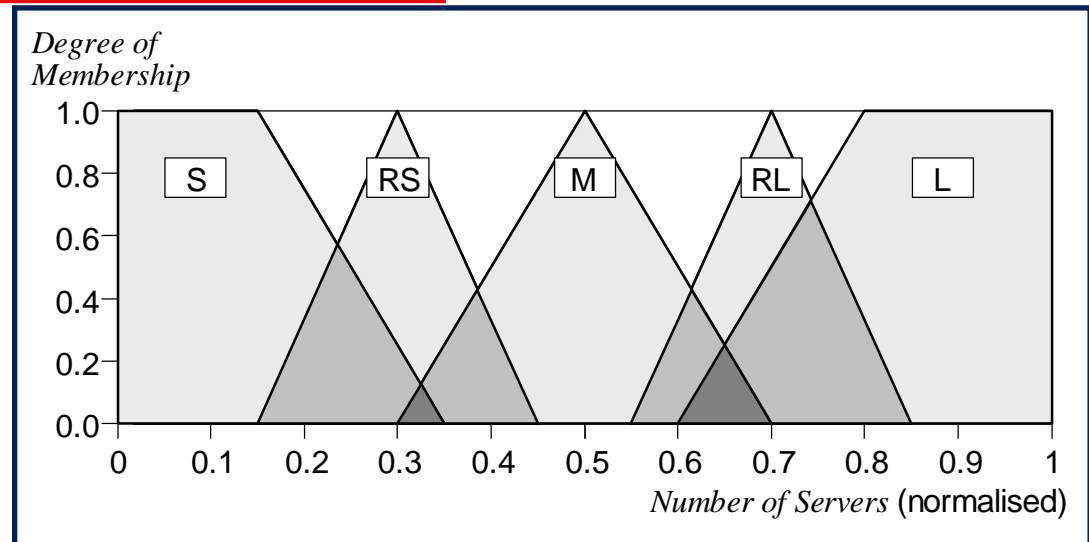
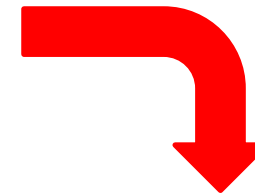
Para melhorar o desempenho do sistema, podemos usar conjuntos adicionais - Rather Small and Rather Large - sobre o universo do discurso Número de servidores e, em seguida, estender a base de regra.

Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Passo 5: Tuning - por exemplo, alterando a número de servidores

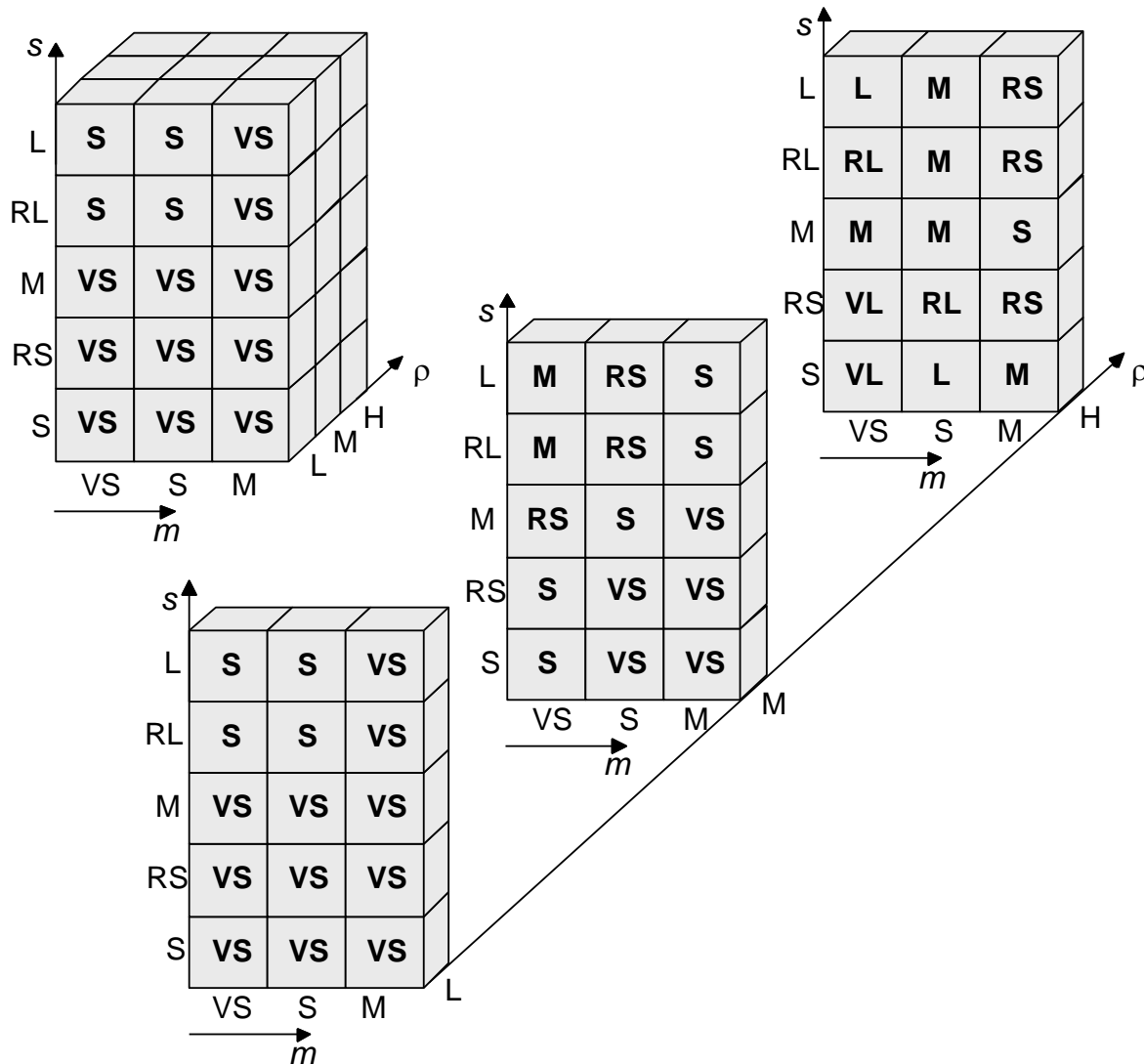


Novos termos para a variável linguística “número de servidores”



Aplicação 1 – Conserto e Reposição de Peças

Novo conjunto de regras após tuning



Método de Inferência Difusa

Sugestões de tuning/ajuste

1. Reveja as variáveis de entrada e de saída e, se necessário redefinir suas faixas.
2. Reveja os conjuntos fuzzy e, se necessário definir conjuntos adicionais sobre o universo de discurso. O uso de muitos conjuntos fuzzy pode fazer com que o sistema fuzzy tenha baixa performance.
3. Proporcionar sobreposição suficiente entre conjuntos vizinhos. Sugere-se que o triângulo-a-triângulo e trapezoidal-a-triângulo conjuntos fuzzy tenham sobreposição entre 25% a 50% das suas bases.
4. Rever as regras existentes e, se necessário adicionar novas regras para a base de regra.
5. Examinar a base de regras e verificar oportunidades de escrever regras com hedges/modificadores para capturar o comportamento do sistema.
6. Ajustar os pesos de execução das regras. A maioria das ferramentas de lógica fuzzy permite o controle da importância das regras alterando um multiplicador de peso.
7. Rever as formas dos conjuntos difusos. Na maioria dos casos, sistemas fuzzy são altamente tolerante a uma determinada forma aproximada.

Aplicação 2

Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Problema

Seja um sistema difuso para prever o número de turistas visitando um resort.

- Variáveis de entrada:
 - Temperatura (em graus Celsius)
 - Luz do sol (expressa em uma porcentagem do máximo esperado de luz do sol)

- Saída:
 - Quantidade estimada de turistas (expressa em porcentagem da capacidade do resort).

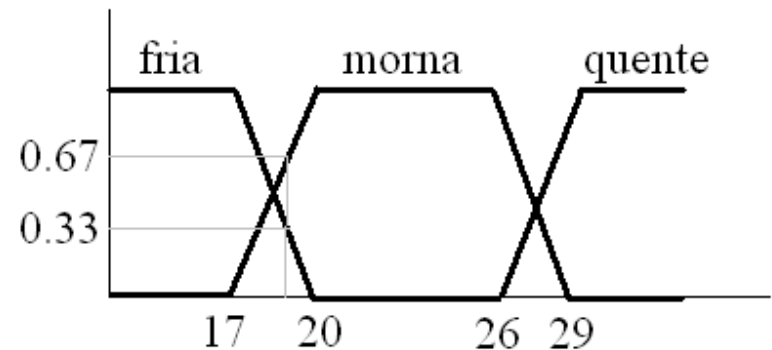
Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 1 e 2: Variáveis linguísticas e conjuntos difusos

Base de conhecimento/variáveis linguísticas

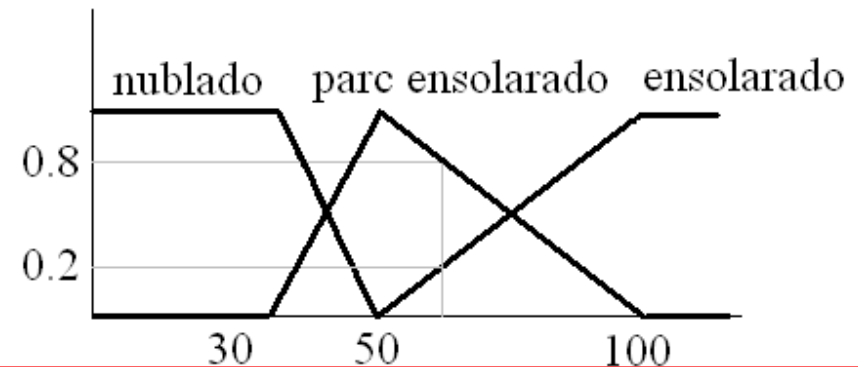
○ Entrada:

- Temperatura {fria, morna, quente} →



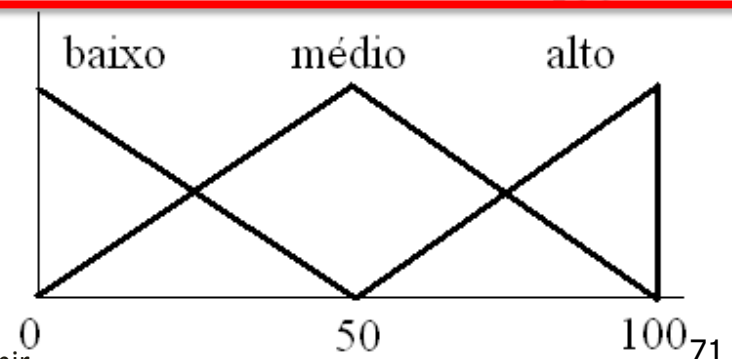
○ Entrada:

- Luz do sol {nublado, parcialmente ensolarado, ensolarado} →



○ Saída:

- Turistas {baixo, médio, alto} →



Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 3: Construção das regras difusas

- Base de conhecimento – regras (devem ser definidas por um especialista)
 1. Se temperatura é quente ou luz do sol é ensolarado então turistas é alto.
 2. Se temperatura é morna e luz do sol é parcialmente ensolarado então turistas é médio.
 3. Se temperatura é fria ou luz do sol é nublado então turistas é baixo.
- Operadores de união e interseção: max e min.

Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência

Raciocínio Aproximado

- Escolha da estratégia de implicação
 - Mínimo

- Escolha da estratégia de agregação
 - Máximo

- Escolha do método de defuzzificação
 - Centroide

Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência – Uso

Suponha a situação que foi observado:

- Temperatura de 19 graus Celsius.
- Luz do sol de 60%.

Raciocínio - Fuzzificação

Temperatura

$$\mu_{\text{fria}}(19) = 0.33$$

$$\mu_{\text{morna}}(19) = 0.67$$

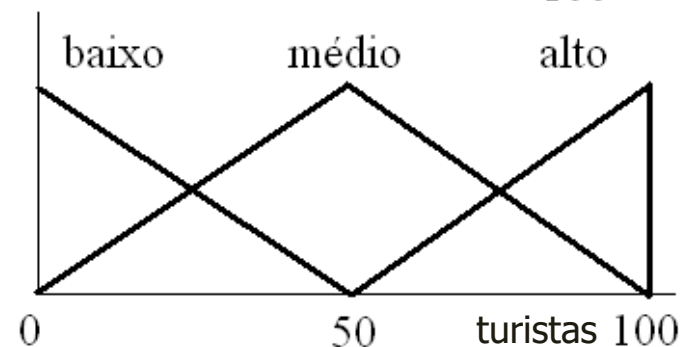
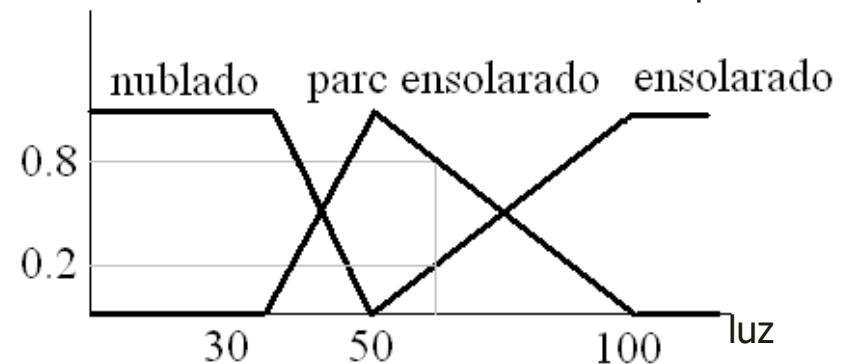
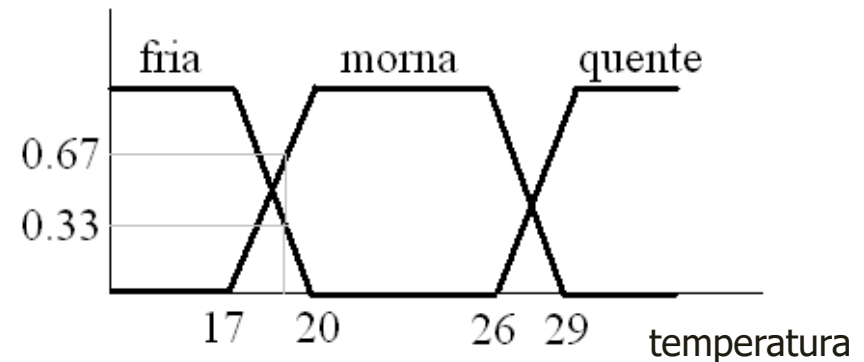
$$\mu_{\text{quente}}(19) = 0$$

Luz do sol

$$\mu_{\text{nublado}}(60) = 0$$

$$\mu_{\text{parc ensolarado}}(60) = 0.8$$

$$\mu_{\text{ensolarado}}(60) = 0.2$$



Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência – Uso

Raciocínio – Agregação dos antecedentes

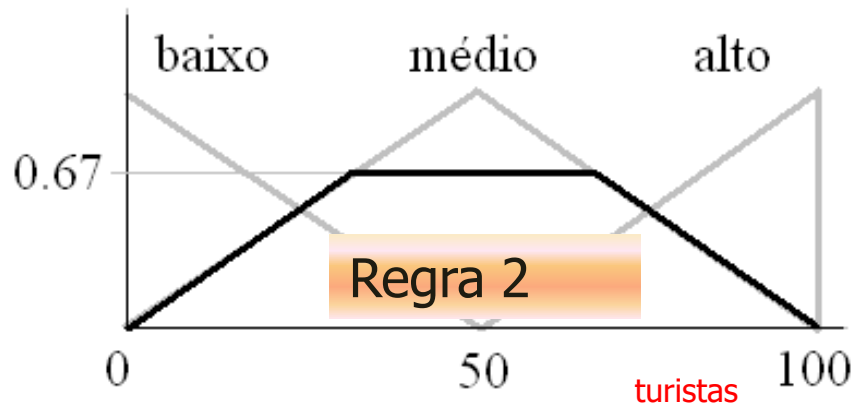
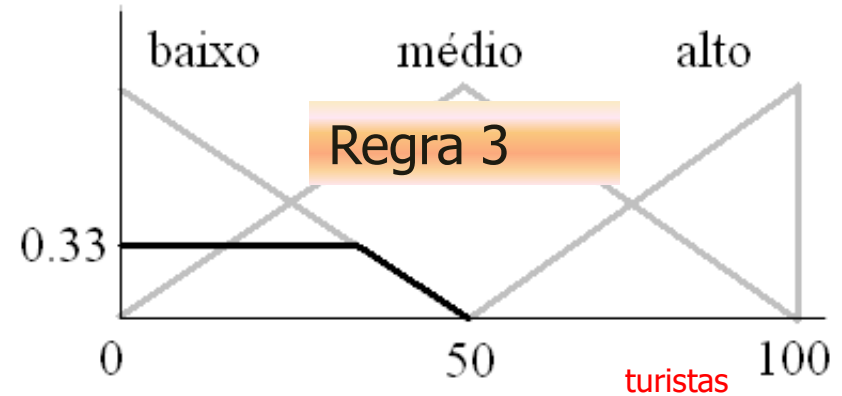
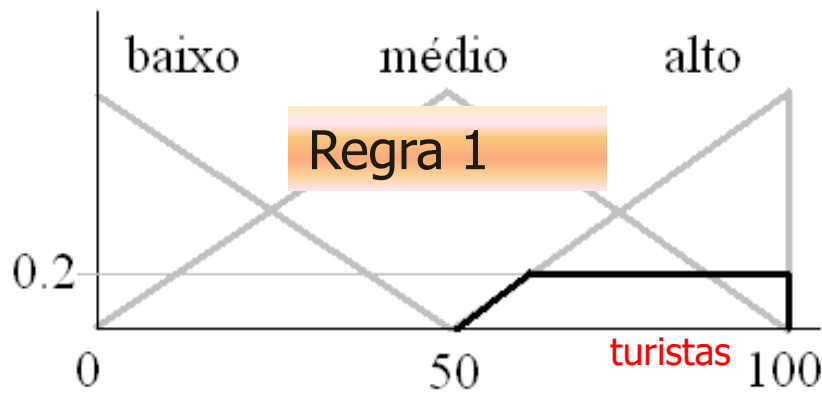
Agregação e Ativação do antecedente

1. Se temperatura é quente ou luz do sol é ensolarado
 $\mu_{\text{quente}}(19) \vee \mu_{\text{ensolarado}}(60)$
 $= \max(0, 0,2) = 0,2$
2. Se temperatura é morna e luz do sol é parcialmente ensolarado
 $\mu_{\text{morna}}(19) \wedge \mu_{\text{parc ensolarado}}(60)$
 $= \min(0,67,0,8) = 0,67$
3. Se temperatura é fria ou luz do sol é nublado
 $\mu_{\text{quente}}(19) \vee \mu_{\text{ensolarado}}(60)$
 $= \max(0,33,0) = 0,33$

Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência – Uso

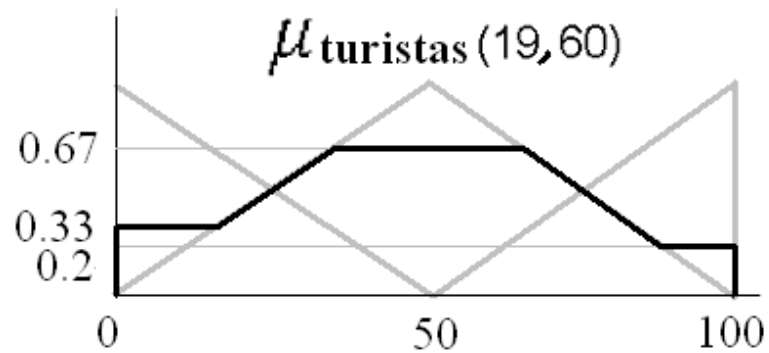
Raciocínio – Implicação



Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência – Uso

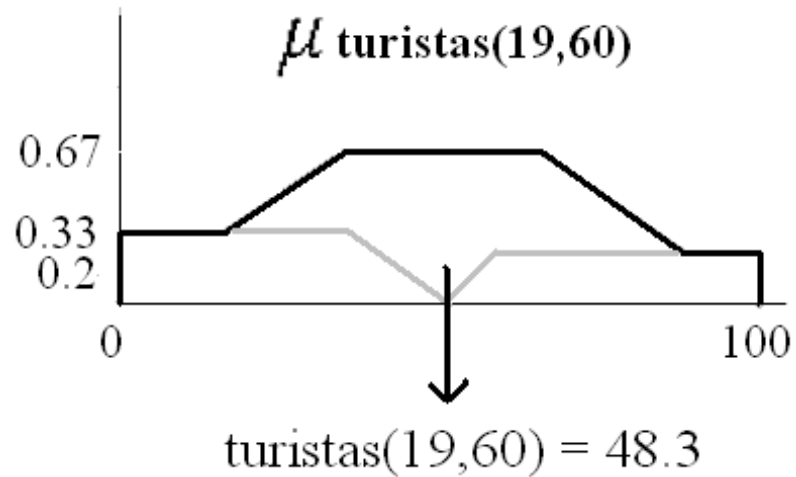
Raciocínio – Agregação dos resultados das regras



Aplicação 2 – Taxa de Ocupação de Resort

Passo 4: Máquina de inferência – Uso

Raciocínio – Defuzzificação



Exercícios

- **Dienes-Rescher Implication:** If we replace the logic operators $\bar{}$ and \vee in (5.21) by the basic fuzzy complement (3.1) and the basic fuzzy union (3.2), respectively, then we obtain the so-called *Dienes-Rescher implication*. Specifically, the fuzzy IF-THEN rule $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ is interpreted as a fuzzy relation Q_D in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \max[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \quad (5.23)$$

- **Lukasiewicz Implication:** If we use the Yager s-norm (3.10) with $w = 1$ for the \vee and basic fuzzy complement (3.1) for the $\bar{}$ in (5.21), we obtain the *Lukasiewicz implication*. Specifically, the fuzzy IF-THEN rule $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ is interpreted as a fuzzy relation Q_L in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_L}(x, y) = \min[1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)] \quad (5.24)$$

- **Zadeh Implication:** Here the fuzzy IF-THEN rule $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ is interpreted as a fuzzy relation Q_Z in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_Z}(x, y) = \max[\min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)] \quad (5.25)$$

Clearly, (5.25) is obtained from (5.22) by using basic fuzzy complement (3.1), basic fuzzy union (3.2), and basic fuzzy intersection (3.3) for $\bar{}$ and \wedge , respectively.

- **Mamdani Implications:** The fuzzy IF-THEN rule (5.28) is interpreted as a fuzzy relation Q_{MM} or Q_{MP} in $U \times V$ with the membership function

$$\mu_{Q_{MM}}(x, y) = \min[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \quad (5.31)$$

or

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y) \quad (5.32)$$

Exercícios

Exercise 6.2. Let $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ and $V = \{y_1, y_2\}$, and assume that a fuzzy IF-THEN rule “IF x is A , THEN y is B ” is given, where $A = .5/x_1 + 1/x_2 + .6/x_3$ and $B = 1/y_1 + .4/y_2$. Then, given a fact “ x is A' ,” where $A' = .6/x_1 + .9/x_2 + .7/x_3$, use the generalized modus ponens (6.10) to derive a conclusion in the form “ y is B' ,” where the fuzzy relation $A \rightarrow B$ is interpreted using:

- (a) Dienes-Rescher implication (5.23),
- (b) Lukasiewicz implication (5.24),
- (c) Zadeh implication (5.25), and
- (d) Mamdani Product implication (5.32).

} página anterior

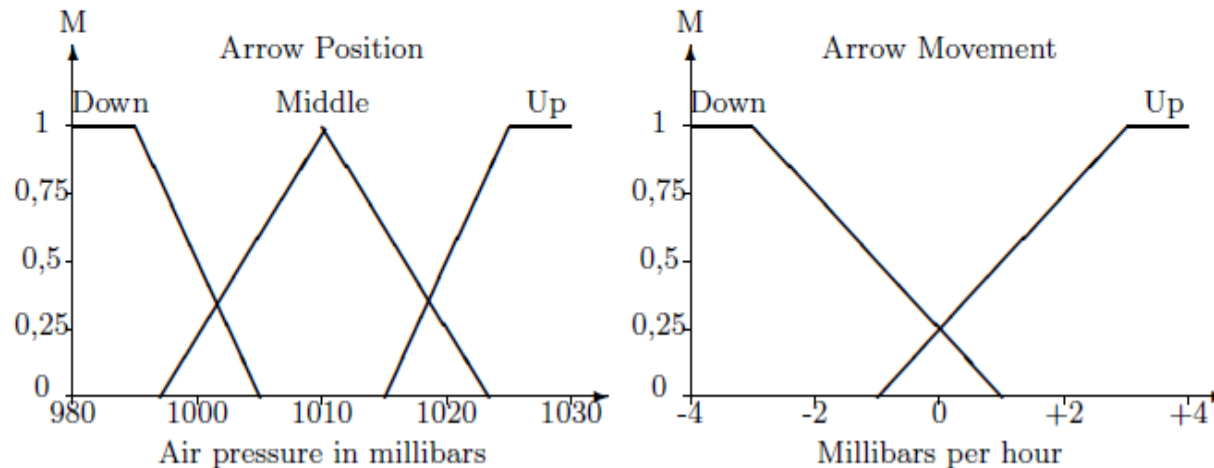
Exercise 6.3. Repeat Exercise 6.2 with $A = .6/x_1 + 1/x_2 + .9/x_3$, $B = .6/y_1 + 1/y_2$, and $A' = .5/x_1 + .9/x_2 + 1/x_3$.

Exercícios

Consider the following fuzzy expert system for weather forecast:

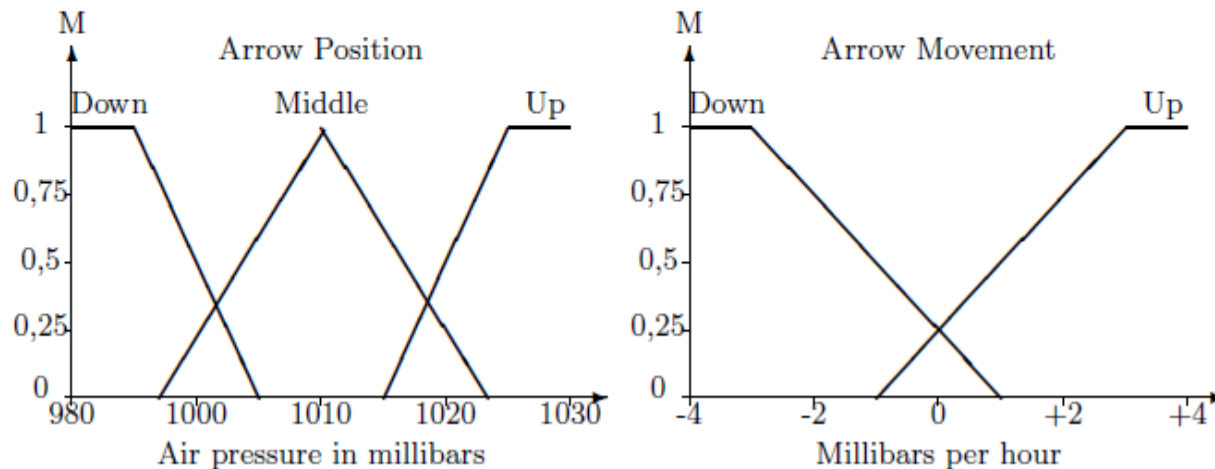
Rule	Condition	Action	Confidence
R1:	IF <i>arrow is down</i>	THEN <i>clouds</i>	$M = 0.8$
R2:	IF <i>arrow is in the middle</i> AND <i>moving down</i>	THEN <i>clouds</i>	$M = 0.6$
R3:	IF <i>arrow is in the middle</i> AND <i>moving up</i>	THEN <i>sunny</i>	$M = 0.6$
R4:	IF <i>arrow is up</i>	THEN <i>sunny</i>	$M = 0.8$

The following two plots represent the membership functions of two fuzzy variables describing the position of the arrow of barometer (left) and the direction of its movement (right):



Exercícios

The following two plots represent the membership functions of two fuzzy variables describing the position of the arrow of barometer (left) and the direction of its movement (right):



The air pressure is measured in millibars, and the speed of its change in millibars per hour. Answer the following questions:

PROBLEMA: Formule questões usando os dados do enunciado

Exercícios

Consider the following situation, which can be described by two rules:

R1: If FLOW is large then LEVEL is large

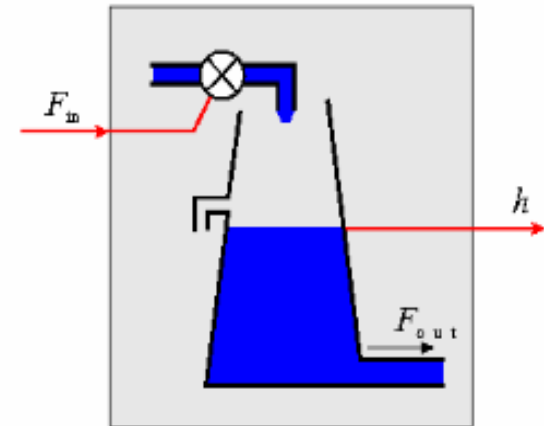
R2: If FLOW is small then LEVEL is small.

Assume $\mu_{\text{large}}(x) = x/10$ for $x \in [0, 10]$ and

$\mu_{\text{small}}(y) = 1-y/10$ for $y \in [0, 10]$

What fuzzy set can be derived for the LEVEL if the

FLOW is assumed to be in the interval $[0,2]$ (a crisp set) ?



Exercícios

Seja um sistema que controla a segurança de uma caldeira. As entradas são a temperatura (t) e a pressão (p) no interior da caldeira. As saídas são o ângulo da válvula de escape (a) e o fluxo do jato de água que banha a caldeira (f).

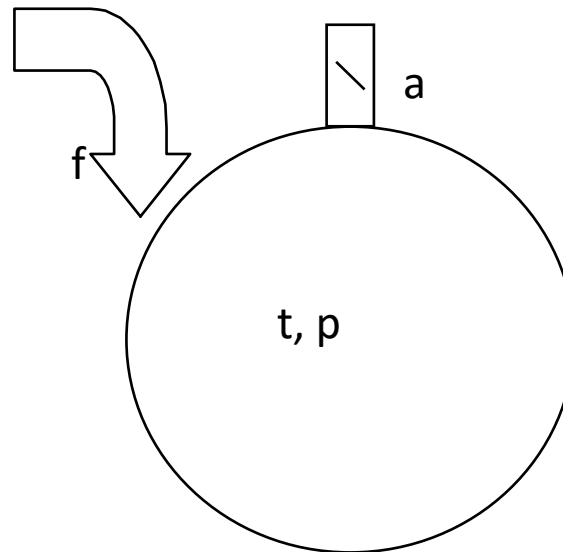
Definir o sistema difuso completo como no estudo de caso anterior.

t : temperatura

p : pressão

a : ângulo

f : fluxo



Exercícios

Let $X = \{x_1, \dots, x_4\}$ and $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. We have three fuzzy rules “if $x = \bar{A}_i$, then $y = \bar{B}_i$ ”, $1 \leq i \leq 3$, where the membership values of these fuzzy sets are:

a. \bar{A}_1 : 1, 0.7, 0.4, 0.2;

b. \bar{A}_2 : 0.2, 0.4, 1, 0.7;

c. \bar{A}_3 : 0.2, 0.4, 0.7, 1;

d. \bar{B}_1 : 0.3, 0.8, 1;

e. \bar{B}_2 : 0.3, 1, 0.8; and

f. \bar{B}_3 : 1, 0.8, 0.3.

Example 14.2.3 $\bar{R}(x, y) = \min(\bar{A}(x), \bar{B}(y))$.

$$\bar{B}'(y) = \sup_x \{\min\{\bar{A}'(x), \bar{R}(x, y)\}\}, \quad (14.5)$$

Use the \bar{A}' given below to find \bar{B}^* for I being the Lukasiewicz implication operator, for I being the Gödel implication and \bar{R} equal min from Example 14.2.3. Also use the t -norm min in equation 14.5 and use the t -conorm max for union. Do both FATI and FITA and compare the results.

i. $\bar{A}' = (0.2, 0.4, 1, 0.7)$;

ii. $\bar{A}' = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$; and

iii. $\bar{A}' = (1, 1, 1, 1)$.

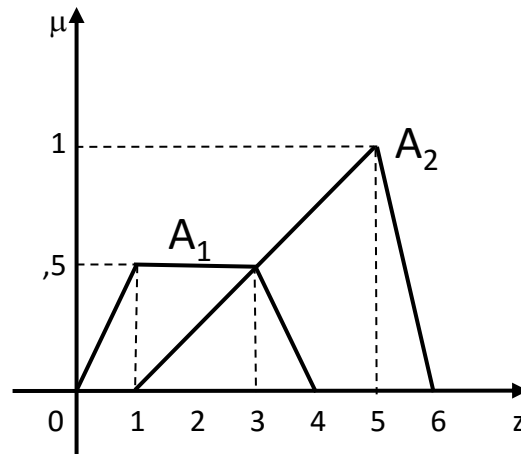
Exercícios

1. Define defuzzification process.
2. What is the necessity to convert the fuzzy quantities into crisp quantities?
3. State the method lambda cuts employed for the conversion of the fuzzy set into crisp.
4. How does the maximum method convert the fuzzy quantity to crisp quantity?
5. In what way does the Centroid method perform the defuzzification process?
6. Compare the methods employed for defuzzification process on the basis of accuracy and time consumption.

<http://gc.nuaa.edu.cn/cse/fmc/download/Lecture05-Defuzzification.pdf>

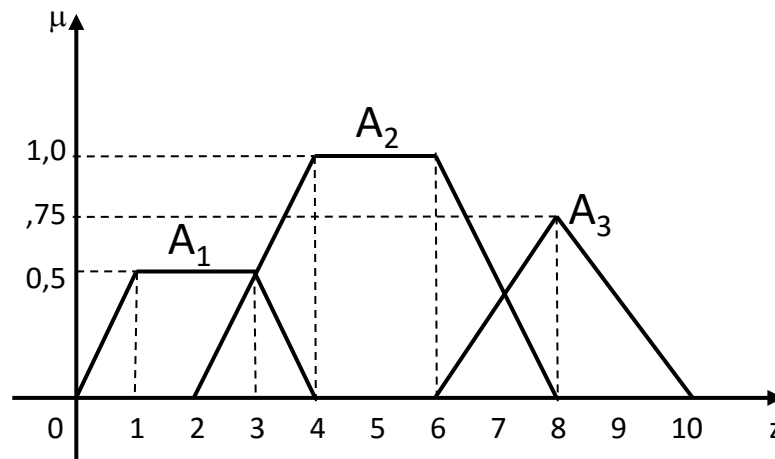
Exercícios

Usando os métodos Centro de Gravidade-CG e Máxima Pertinência, converter a saída difusa num valor crisp z^* para o seguinte gráfico



Exercícios

Converter o valor difuso z para um valor preciso z^* para o seguinte gráfico usando os métodos da média ponderada e o método MOM-*middle-of-maxima method*



Sites e Software livre

<http://www.massey.ac.nz/~nhreyes/MASSEY/159741/Lectures/Lec2012-3-159741-FuzzyLogic-v.2.pdf>

<https://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro35inline.pdf>

http://www.pel.uerj.br/bancodissertacoes/Dissertacao_Leandro_Leite.pdf