

TP034-Tópicos Especiais de Pesquisa Operacional I

(Teoria dos Jogos)

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Teoria dos Jogos

Tomada de decisão estratégica.

Teoria dos Jogos

Motivação

"**O melhor jogador do mundo**"

Ronaldinho não fez gol na copa de 2006
Mas jogou todos os jogos
Porque?
Muito marcado
Porque mantê-lo?
Libera outros jogadores

Na final da copa de 1986 jogaram Argentina e Alemanha
Maradona não fez um gol sequer
mas deu passes para dois gols

Moral: O "score" individual pode ser menos importante que o apoio ao grupo

Teoria dos Jogos

Motivação

"**Quem é o seguidor**?"

1983, Finais America's Cup (vela)
132 anos ininterruptos de vitória dos EUA
Finais: Sete provas; Liberty 3-1 Australia II
Quinta prova:

Liberty: 37 segundos de vantagem logo na saída
Australia: desviou para a esquerda, na esperança de uma mudança na direção do vento
Liberty: o que fazer?

- que fez: continuou à frente na mesma direção
- que aconteceu:
- vento mudou, favorecendo o Austrália
- Austrália venceu

Depois venceu as duas provas seguintes se tornando o primeiro campeão não americano

Teoria dos Jogos

Motivação

"**Quem é o seguidor**?"

Problema estratégico:

O objetivo do Liberty não era chegar o mais rapidamente possível
Era chegar na frente do Austrália

Portanto devia ter seguido cada passo do Austrália após ter conseguido a vantagem inicial

Moral: *Follow the follower rather than Follow the leader: "Monkey see, monkey do"*

Teoria dos Jogos

O que é

O que é a Teoria dos Jogos?

- “The art of outdoing your adversary, knowing that the adversary is trying to do the same as you” Dixit & Nalebuff
- “Understanding situations in which decision-makers interact” Osborne
- “The study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision makers” Myerson
- “Behavior of decision makers (players) whose decisions affect each other” Aumann
- “The study of multiperson decision problems” Gibbons
- “The art of finding ways to cooperate, even when others are motivated by selfinterest, not benevolence. [...] The art of putting yourself in others’ shoes so as to predict and influence what they will do.” Dixit & Nalebuff

Teoria dos Jogos

O que é

Teoria dos Jogos é uma ferramenta analítica para ciências sociais que é usada para modelar interações estratégicas ou situações de conflito.

Interação estratégica: Quando as ações de um jogador influenciam retornos/*payoffs* de outros jogadores

Teoria dos jogos é a ciência do comportamento racional em situações interativas.

Bons estrategistas misturam a ciência da Teoria dos Jogos com sua própria experiência.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

O que é

- Encontrar estratégias aceitáveis, se não ideal, em situações de conflito.
- Abstração da situação complexa reais.
- A teoria dos jogos é altamente matemática.
- A teoria dos jogos assume que todas as interações humanas podem ser compreendidas.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

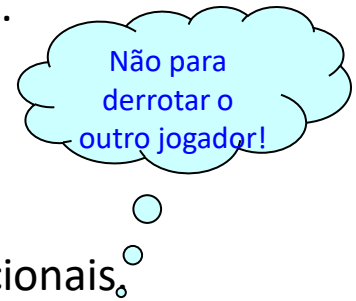
Porque teoria dos Jogos é Importante?

- **Facilita o pensamento estratégico**.
- Fornece uma taxonomia padrão que é necessária para uma abordagem científica na análise de interações estratégicas.
- Fornece novos *insights*.
- "Para ser alfabetizado na idade moderna, você precisa ter uma compreensão geral de Teoria dos Jogos." P.Samuelson

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

- **De conhecimento**
  - ✓ Jogadores (quem são os envolvidos?)
  - ✓ Regras (quem move quando? O que se sabe quando for sua vez de jogar? etc.)
  - ✓ Resultados/recompensa/payoff (para cada conjunto de ações dos jogadores, quais são os resultados?)
  - ✓ Estratégias
- **Os jogos estão em todos os lugares.**
  - ✓ sistemas econômicos: monopólio, oligarquia, mercado, comércio, ...
  - ✓ políticos: votação, eleição presidencial, relações internacionais, ...
  - ✓ sistemas militares: guerra, negociação, ...
- **Teoria do jogo**: o estudo das interações estratégicas entre agentes racionais.
- **Racionalidade**: implica que cada jogador tenta maximizar a sua / seu *payoff*.



Teoria dos Jogos

Onde Teoria dos Jogos pode ser usada?

Qualquer situação que nos obriga a antecipar a resposta de nosso rival para a nossa ação é um contexto potencial para uso de Teoria dos Jogos.

- Jogos: damas, poker, xadrez, tênis, futebol etc.
- Economia: organização industrial, micro/macro economia e finanças públicas
- Ciência política: a guerra/paz
- Direito: criando leis que funcionam
- Biologia: comportamento animal, evolução
- Sistemas de informação: sistema competição/evolução
- Bussiness:
  - ✓ Jogos contra as empresas rivais: Preços, publicidade, marketing, leilões, R & D, joint ventures, investimentos, localização, qualidade, assumir etc.
  - ✓ Jogos contra outros jogadores: empregado/empregador, gestores/acionistas, cliente/fornecedor, o produtor/distribuidor, empresa/governo

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Terminologia

- Estratégia
- *Payoffs*
- Equilíbrio

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Classificação

- Quanto à cooperação: Jogos cooperativos & jogos não cooperativos
- Quanto à dinâmica: Jogos estáticos & jogos dinâmicos
- Quanto à informação: completa & incompleta - Um jogo é de informação completa se todos os jogadores conhecem as estratégias disponíveis para outros jogadores
- Quanto à informação: perfeita & imperfeita - Um jogo é de informação perfeita se todos os jogadores conhecem os movimentos prévios feitos por todos os outros jogadores (jogos dinâmicos).
- Quanto ao horizonte temporal: finitos & infinitos
- Quanto à dimensão: discretos & contínuos

Terminologia

- Estratégia
- *Payoffs*
- Equilíbrio

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal

Um jogo na forma normal consiste de

- Jogadores: lista de jogadores,
- Estratégias: todas as ações disponíveis para todos os jogadores
- *Payoffs*: uma recompensa atribuída a todas as contingências (cada perfil de estratégia possível como o resultado do jogo)

Jogos na forma normal também são denominados de Jogos Estáticos.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal – Exemplo

Dilema do prisioneiro

- Dois suspeitos são capturados e colocados em salas diferentes (sem comunicação).
- A eles é oferecidos o seguinte acordo:
  - ✓ Se ambos confessarem, ambos ficarão por 5 anos na prisão (*payoff*: -5)
  - ✓ Se um confessar enquanto que o outro não confessar, o primeiro (que cofessou) não será preso (*payyoff*: 0) e o outro permanecerá preso por 10 (*payoff*: -10)
  - ✓ Se nenhum dos dois confessar, ambos permanecerão na cadeia por 2 anos (*payoff*: -2)

Quais as estratégias que ambos deverão adotar?

Variações: – Carreira armamentista; – Gastos de campanha – Protecionismo

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal – Exemplo

Dilema do prisioneiro

		Suspeito 2	
		Confessar	Não confessar
Suspeito 1	Confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	Não confessar	(-10,0)	(-2,-2)

Pedra-Papel-Tesoura

		Coluna		
		Pedra	Papel	Tesoura
Linha	Pedra	(0, 0)	(-1,1)	(1,-1)
	Papel	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	Tesoura	(-1,1)	(1,-1)	(0, 0)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal – Exemplo

Jogo de Coordenação

		Empresário 2	
		Churrascão	Badida
Empresário 1	Churrascão	(1,1)	(0,0)
	Badida	(0,0)	(1,1)

Oligopólio de Cournot - é um modelo econômico utilizado para descrever uma estrutura de indústria em que as empresas competem de acordo com a quantidade produzida pelos seus concorrentes, existindo uma grande interdependência nas decisões dos agentes

Oligopólio de Bertrant - O modelo descreve as interações entre as empresas, que definem os seus preços, e os compradores, que decidem quanto comprar ao preço dado.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal – Pressupostos

- Todos os jogadores são racionais.
- A racionalidade é de conhecimento comum.
- Os jogadores movem simultaneamente. (Eles não sabem o que o outro jogador escolheu).
- Os jogadores têm a informação completa, mas imperfeita.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Jogo na Forma Normal – Solução

- Equilíbrio em estratégias estritamente dominantes.
  - ✓ Uma estratégia estritamente dominante é a que produz o maior retorno em comparação com os retornos associados com todas as outras estratégias.
  - ✓ Jogadores racionais vão sempre jogar suas estratégias estritamente dominantes.
- Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.
  - ✓ Jogadores racionais nunca vão jogar suas estratégias dominadas.
  - ✓ Eliminando estratégias dominadas podem resolver o jogo.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo – Eliminação Iterada

	Jogador 2			
Jogador 1		Abaixo	Meio	Alto
	Abaixo	(1,0)	(1,3)	(3,0)
	Meio	(0,2)	(0,1)	(3,0)
	Alto	(0,2)	(2,4)	(5,3)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo – Eliminação Iterada

		Large Pig	
		Press lever	Wait at dispenser
Small Pig	Press lever	(1,5)	(-1,9)
	Wait at dispenser	(4,4)	(0,0)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo – Eliminação Iterada

		Coluna		
Linha		s_1	s_2	s_3
	s_1	(73, 25)	(57, 42)	(66, 32)
	s_2	(80, 26)	(35, 12)	(32, 54)
	s_3	(28, 27)	(63, 31)	(54, 29)

- Neste caso, o jogador Coluna sempre jogará s_2 (Equilíbrio de Nash).

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo – Eliminação Iterada

		Coluna			
		s_1	s_2	s_3	s_4
Linha	s_1	(3, 2)	(4, 1)	(2, 3)	(0, 4)
	s_2	(4, 4)	(2, 5)	(1, 2)	(0, 4)
	s_3	(1, 3)	(3, 1)	(3, 1)	(4, 2)
	s_4	(5, 1)	(3, 1)	(2, 3)	(1, 4)

- Neste jogo não uma solução estritamente dominante.
- Eliminamos 12 de 16 estratégias, mas para chegar mais longe, precisaremos de mais ferramentas. (Usar estratégias mistas!!!)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

		jogador 2	
		a	*b*
jogador 1	*A*	3, 4	4, 3
	B	5, 3	3, 5
	C	5, 3	4, 3

		jogador 2			
		e	f	g	h
jogador 1	a	2, 6	3, 3	5, 1	0, 0
	b	3, 1	6, 4	0, 2	0, 1
	c	8, 1	2, 2	0, 5	0, 4
	d	4, 1	1, 0	0, 1	5, −1

		jogador 2		
		D	E	F
jogador 1	A	2, 3	3, 1	3, 2
	B	4, 1	5, 4	0, 3
	C	1, 1	3, 5	6, 3

Exemplo- *Duopólio de Cournot com um número finito de estratégias*

		2		
		6	*8*	*11*
1	*6*	72, 72	60, 80	42, 77
	8	80, 60	64, 64	40, 55
	11	77, 42	55, 40	22, 22

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

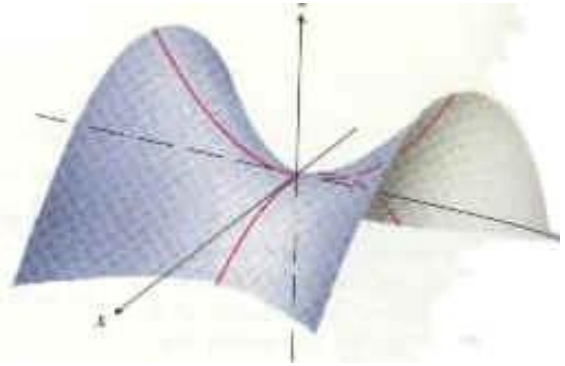
Jogos de Soma Zero e Teorema MiniMax

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax

- Em 1928, John Von Neumann propos o teorema Minimax que marca o início do que podemos chamar de teoria dos jogos modernos.
- Antes de apresentar o teorema, precisamos destacar a diferença entre estratégias puras e mistas.
- Estratégias puras são as estratégias reais que os jogadores têm disponíveis para escolher quando joga um jogo normal. Num jogo de movimento simultâneo (matriz), por vezes, os jogadores podem se beneficiar de escolher aleatoriamente uma ou a outra das suas estratégias puras. A estratégia mista é a decisão de jogar cada uma das estratégias puras com alguma probabilidade específica.
- Iremos lidar com jogos de **soma zero**. Iremos nos referir ao ponto de equilíbrio como ponto de sela (solução do jogo), pois são o mesmo em jogos de **soma zero**. Em jogos de soma variável, encontramos pontos de equilíbrio, mas esse ponto não é ponto de sela.



http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Representação de Jogo de Soma Zero

Lançamento de Moeda

		Coluna	
		Cara	Coroa
Linha	Cara	(1,-1)	(-1,1)
	Coroa	(-1,1)	(1,-1)



		Coluna	
		Cara	Coroa
Linha	Cara	1	-1
	Coroa	-1	1

- Somente os *payoffs* do Jogador **Linha** são mostrados na matriz.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo de Soma Zero

- Uma suposição importante, particularmente no contexto de jogos de soma zero, é que todo jogador deve ser pessimista: "**Toda vez que o meu adversário visar maximizar o pagamento dele, ele estará visando minimizar o meu pagamento**."
- Com isso, para cada estratégia passível de ser adotada pelo jogador Linha, ele deve se concentrar no menor *payoff* que ele poderia receber ao adotá-la. Assim, ele pode optar pela estratégia que produz o máximo desse menor *payoff*.
- Por buscar maximizar o menor *payoff*, esse critério recebe a denominação de critério maximin. Com esse critério, o jogador Linha terá a garantia de receber um *payoff* de, no mínimo:

$$p_{min} = \max_i \min_j \{p_{ij}\}$$

- O jogador Coluna, usando a matriz de *payoff* do jogador Linha, irá minimizar o máximo *payoff* do jogador Linha.
- Por buscar minimizar o maior *payoff*, esse critério recebe a denominação de critério minimax. Com esse critério, o jogador Coluna terá a garantia de que o jogador Linha não receberá um *payoff* maior que:

$$p_{max} = \min_j \max_i \{p_{ij}\}$$

- Quando $P = p_{min} = p_{max}$, o jogo tem solução estritamente determinada com *payoff* igual a P.

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo de Soma Zero – Teorema MiniMax

- O teorema Minimax afirma que existe um único ponto de equilíbrio para cada jogo de 2 jogadores com movimento simultâneo e de **soma zero**.
- Ou seja, o teorema Minimax garante a existência de exatamente um ponto de equilíbrio para qualquer jogo normal de 2 jogadores de **soma zero**. No entanto, o ponto de equilíbrio pode ser o resultado da utilização de estratégias puras ou mistas por qualquer um ou ambos os jogadores.
- Para encontrar pontos de equilíbrio para jogos de matriz 2x2 de soma zero:
  - ✓ Determinar se o ponto de equilíbrio está associada com estratégias puras: Para fazer isso, determinar se a estratégia maximin do jogador de linha e a estratégia minimax do jogador da coluna coincidem no mesmo resultado ($p_{min} = p_{max}$). Se isso for verdade, então as estratégias associadas são o ponto de equilíbrio do jogo. Esse resultado - escrito como o payoff para o jogador linha, porque é um jogo de soma zero - é o valor do jogo.
  - ✓ Se estratégias puras não produzem um ponto de equilíbrio, que proceda da seguinte forma: Definir variáveis que representam a probabilidade cada jogador jogar cada estratégia disponível. Para cada jogador encontramos as probabilidades que fornecerão o menor retorno esperado para o outro jogador.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Resolução de Jogo de Soma Zero usando critério MiniMax

	Coluna		
Linha		Cara	Coroa	min
	Cara	3	-6	-6
	Coroa	2	**1**	**1** ($=p_{min}$)
	max	3	**1** ($=p_{max}$)	**1** (solução)

- Solução do jogo encontrada pois $p_{max} = p_{min}$ (**Coluna** paga 1 para **Linha**)
- Par de estratégias (uma para cada jogador), para o qual o jogo vai evoluir se cada jogador jogar racionalmente
- Esta é a estratégia ideal para ambos os jogadores
- Maneira de encontrar ponto de sela: teorema Minimax e Maximin
  - ✓ **Maximin** - A estratégia do jogador **Linha**: i) Encontre a entrada mínima de **Linha** em cada linha; ii) Tomar o máximo destes.
  - ✓ **Minimax** - A estratégia do jogador **Coluna**: i) Encontre a entrada máxima de **Coluna** em cada coluna; ii) Tome o mínimo destes

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

MaxiMin e MiniMax – Estratégias Puras

Maximin

- O jogador Linha (que quer maximizar)
  - ✓ olha para o pior caso que pode acontecer (o *payoff* mínimo ou nível de segurança) quando ele joga cada uma de suas estratégias e;
  - ✓ escolhe a estratégia que dá o máximo destas recompensas mínimas (o mais elevado nível de segurança).
- Isso é chamado de *payoff* **maximin** (com respeito a "estratégias puras").
- Desta forma, o jogador Linha ganha pelo menos a recompensa **maximin**, independentemente do que o jogador Coluna faz.

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

MaxiMin e MiniMax – Estratégias Puras

Minimax

- O jogador Coluna (que quer minimizar)
  - ✓ olha para a pior coisa que pode acontecer (o *payoff* máximo), quando ele joga cada uma de suas estratégias e;
  - ✓ escolhe a estratégia que dá o mínimo destes *payoffs* máximos.
- Isso é chamado o *payoff* **minimax** (com respeito a "estratégias puras").
- Desta forma, o jogador Coluna detém baixo *payoff* de Linha, abaixo e não mais do que este *payoff* **minimax**, independentemente do que o jogador Linha faz.

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

MaxiMin e MiniMax – Estratégias Puras

- Sempre tem-se, em jogos de soma zero, que

  payoff **maximin** (para Linha) ≤ *payoff* **minimax** (para Coluna).

- Ou seja, o *payoff* de Coluna pode manter Linha para baixo e (independentemente do que Linha faz) não pode (por definição) ser inferior ao *payoff* que Linha pode garantir (independentemente do que Coluna faz).

- Agora suponha que temos o caso limite, onde

  payoff **maximin** (para Linha) = *payoff* **minimax** (para Coluna).

- Neste caso, o jogo de soma zero é estritamente determinado

  ✓ Os dois jogadores identificam suas estratégias maximin/minimax e reproduzem-as.

  ✓ Nenhum jogador pode mudar de ideia para tentar enganar o outro, tentando "descobrir" a estratégia de seu oponente ou enganá-lo sobre a sua própria.

  ✓ Além disso, nenhum jogador nunca vai se arrepender de sua escolha estratégica, porque o resultado é sempre uma “estratégia pura“ (Equilíbrio de Nash).

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Puras – Exemplo

		Mary		
Rose		Cara	Coroa	min
	Cara	3	-6	-6
	Coroa	2	**1**	**1** (max)
	max	3	**1** (min)	**1** (solução)

- Solução do jogo (ponto de sela) nulo(= 0) $\Rightarrow$ jogo justo
- Solução do jogo (ponto de sela) não nulo ($\neq 0$) $\Rightarrow$ jogo tendencioso
- Jogo inclinado para **Rose**.
- Este jogo tem um ponto de sela $\Rightarrow$ É um jogo de "determinado“.
- O ponto de sela indica que há um conjunto claro de estratégias que os jogadores devem usar para atingir o mais alto *payoff* no longo prazo.
- Quando não há nenhum ponto de sela o jogo é denominado de "indeterminado“.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Sem Ponto de Sela – Exemplo

	Coluna			
Linha		X	Y	min
	A	-1	2	-1
	B	4	-1	**-1** (max)
	max	4	**2** (min)	?????

- Este jogo não tem ponto de sela em estratégias puras

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas

- Temos que

  payoff **maximin** (para Linha) ≤ *payoff* **minimax** (para Coluna), ou seja $\mathbf{p_{min} \leq p_{max}}$

- Existe alguma maneira que o jogador Linha (ou Coluna) pode aumentar o seu *payoff* maximin (ou minimax), para que o "gap" entre os dois retornos possa ser reduzido ou zerado inteiramente?
- Sim, eles podem fazer isso através do emprego de "estratégias mistas“.
- A estratégia pura é um plano de ação completo para jogar um jogo.
- A estratégia mista é uma distribuição de probabilidade (ou loteria) sobre estratégias puras.

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

- Como lidar com o caso em que $p_{min} \neq p_{max}$?
- Von Neumann ofereceu resposta a esta questão propondo uma ampliação do conjunto de estratégias que podem ser adotadas, incluindo estratégias mistas.
- Uma estratégia mista consiste na escolha aleatória de uma dentre as estratégias puras, a cada lance do jogo.
- Seja A a matriz de *payoffs*. Dado que o jogador Linha tem n estratégias puras e que o jogador Coluna tem m estratégias puras, então uma estratégia mista é dada pelos vetores:

  $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$, onde

  $x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ e $y_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,m, \sum_{i=1}^{m} y_j = 1$

  O *payoff* final, valor do jogo é $X^T AY$.

Teorema Minimax: Se estratégias mistas são permitidas em jogos de **soma zero**, o par de estratégias mistas que é ótimo de acordo com o critério Minimax fornece uma solução estável com $V = p_{min} = p_{max}$, de tal maneira que nenhum jogador pode melhorar sua situação mudando sua estratégia.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

Teorema Minimax: O teorema fundamental da teoria dos jogos que estabelece que todo finito, de soma zero, jogo de duas pessoas tem estratégias mistas ótimas foi provado por John von Neumann em 1928.

Formalmente, sejam X e Y estratégias mistas para os jogadores A e B respectivamente. Seja A matriz de *payoff*. Então

$$\max_X \min_Y X^T A Y = \min_Y \max_X X^T A Y = \nu$$

em que ν é chamado o valor do jogo e X e Y são chamados as soluções. Nota-se também que, se houver mais do que uma estratégia mista ótima então existem infinitas.

Em jogos de soma zero a solução minimax é o mesmo que o equilíbrio de Nash.

http://mathworld.wolfram.com/MinimaxTheorem.html

Teoria dos Jogos

Estratégias Mistas – Exemplo

		C		q								
		C1	C2	0	0,20	0,40	0,50	0,60	0,75	0,80	1,00	Mínimo
S	S1	3,00	2,00	2,00	2,20	2,40	2,50	2,60	2,75	2,80	3,00	2,00
	S2	1,00	4,00	4,00	3,40	2,80	2,50	2,20	1,75	1,60	1,00	1,00
p	0,00	1,00	4,00	4,00	3,40	2,80	2,50	2,20	1,75	1,60	1,00	1,00
	0,20	1,40	3,60	3,60	3,16	2,72	2,50	2,28	1,95	1,84	1,40	1,40
	0,40	1,80	3,20	3,20	2,92	2,64	2,50	2,36	2,15	2,08	1,80	1,80
	0,60	2,20	2,80	2,80	2,68	2,56	2,50	2,44	2,35	2,32	2,20	2,20
	0,70	2,40	2,60	2,60	2,56	2,52	2,50	2,48	2,45	2,44	2,40	2,40
	0,75	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
	0,80	2,60	2,40	2,40	2,44	2,48	2,50	2,52	2,55	2,56	2,60	2,40
	1,00	3,00	2,00	2,00	2,20	2,40	2,50	2,60	2,75	2,80	3,00	2,00
Máximo		3,00	4,00	4,00	3,40	2,80	2,50	2,60	2,75	2,80	3,00	

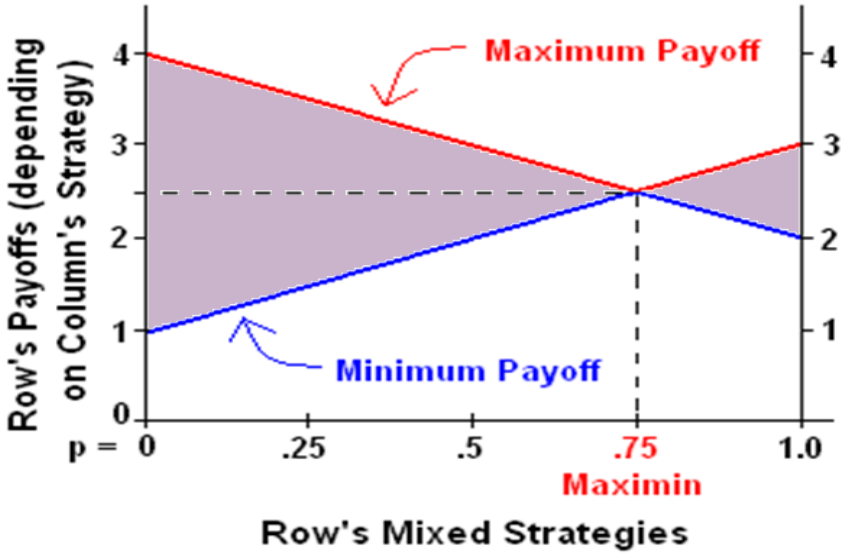
- Ciano: linhas e colunas
- Amarelo: matriz 2x2 de *payoffs* (para estratégias puras)
- Cinza: *payoffs* esperados para estratégias puras *versus* estratégias mistas
- Verde: *payoffs* esperados para estratégias mistas *versus* estratégias mistas

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

Estratégias Mistas – Exemplo

		Coluna	
		C1	C2
Linha	L1 p	3	2
	L2 1-p	1	4

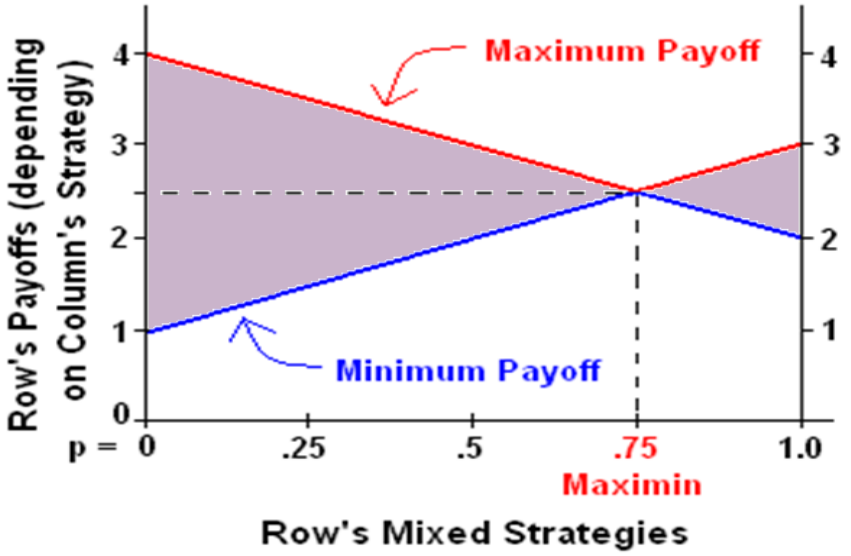


- Em um jogo de 2x2 como este, as estratégias mistas Maximin/Minimax e *payoffs* podem ser facilmente determinados graficamente.
  - ✓ A linha inclinada para cima é o *payoff* para Linha para todos as suas estratégias mistas de **p = 0** a **p = 1** quando Coluna escolhe a estratégia pura C1.
  - ✓ Da mesma forma a linha inclinada descendente é o *payoff* para Linha para suas estratégias mistas quando Coluna escolhe a estratégia pura C2.
  - ✓ A intersecção das duas linhas identifica:
    - A estratégia mista maximin de Linha (eixo horizontal) e;
    - O *payoff* maximim de Linha (eixo vertical).

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

		Coluna	
		C1	C2
Linha	L1 **p**	3	2
	L2 **1-p**	1	4

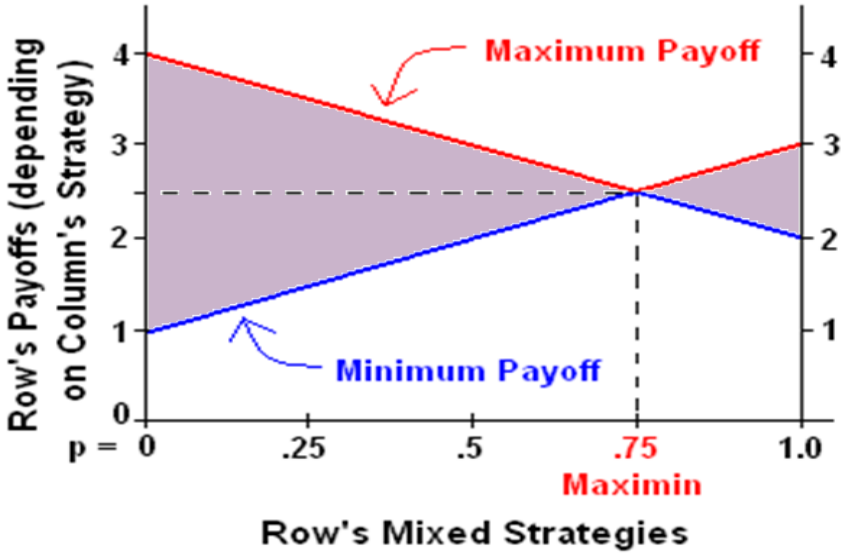


- Se Coluna escolhe uma estratégia mista, o *payoff* de Linha cai estará na área sombreada.
- Portanto:
  - ✓ a linha vermelha mostra o *payoff* máximo esperado para Linha para cada uma de suas estratégias mistas;
  - ✓ a linha azul mostra o *payoff* mínimo esperado para Linha para cada uma de suas estratégias mistas.
- Pode ser visto que a estratégia mista maximin de Linha é p = 0,75, e que esta estratégia mista garante-lhe um *payoff* mais elevado (esperado) (2,50) do que o nível de sua estratégia pura maximin (2,00) (estratégia de segurança).
- Também pode ser visto que, se Linha usa a estratégia mista maximim, recebe um retorno esperado de 2,50, independentemente da estratégia (pura ou mista) que Coluna escolhe.

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

		Coluna		
		C1	C2	min
Linha	L1	3	2	**2**
	L2	1	4	1
	max	**3**	4	???



- Observe que Linha pode aumentar o seu nível de recompensas esperadas acima de sua estratégia pura (de segurança) maximin de 2 usando estratégias mistas.
- Note-se que o nível de segurança das estratégias mistas é o *payoff* mínimo esperado em relação as estratégias puras e mistas.
- Da mesma forma, o jogador Coluna pode assegurar nível de *payoff* esperado abaixo da estratégia pura minimax de 3 de Linha usando estratégias mistas .

http://userpages.umbc.edu/~nmiller/POLI388/ZERO-SUM%20GAMES.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas

	Coluna				
Linha			X	Y	min
	p	A	-3	2	-3
	1 - p	B	4	-1	-1
		max	4	2	????

- Primeiro vamos determinar a estratégia mista ideal de Linha...
- Para fazer isso, vamos considerar os *payoffs* que Coluna receberia em estratégias puras correspondentes às estratégias mistas de Linha...

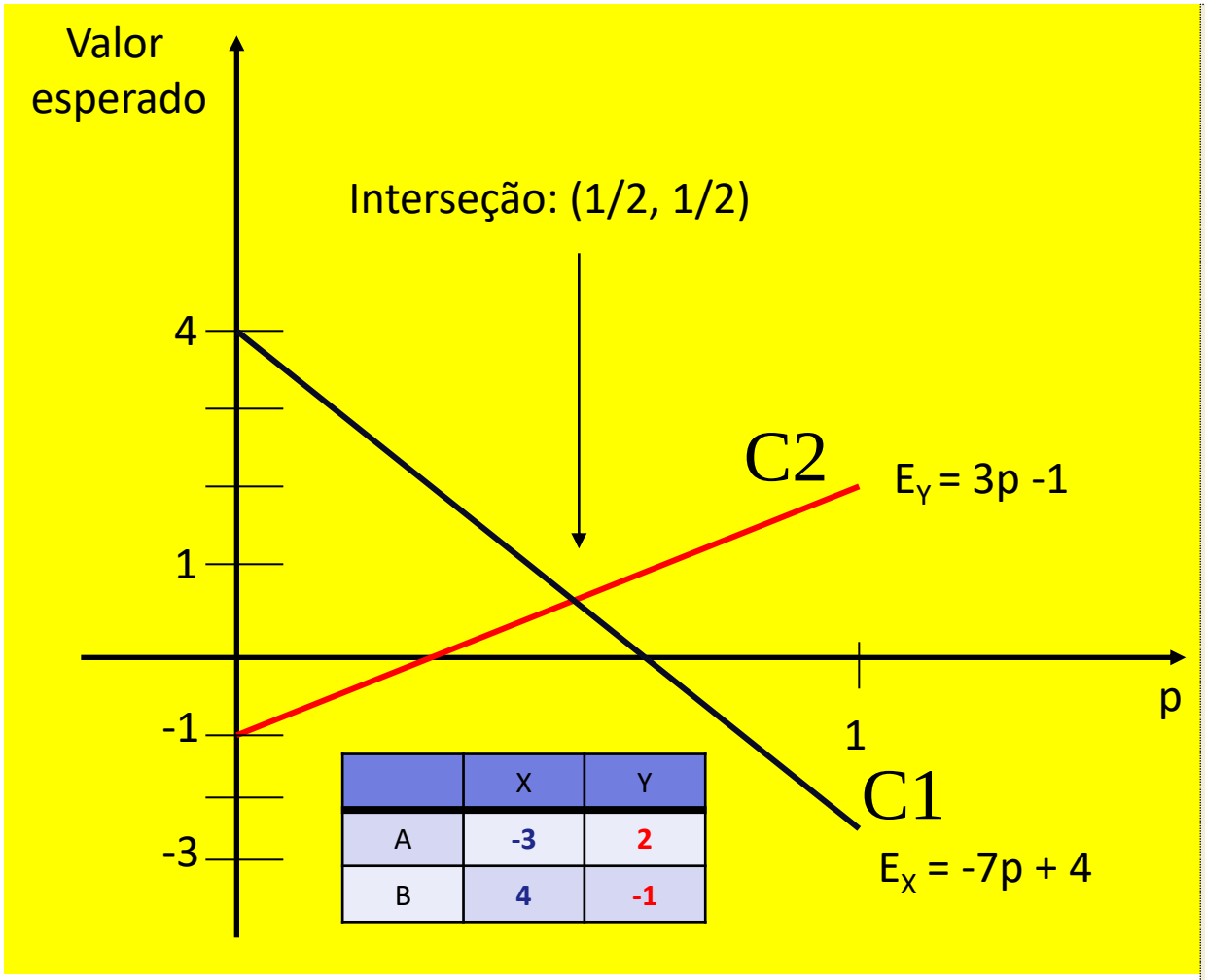
$E_X = -3p + 4(1 - p) = -3p + 4 - 4p = -7p + 4$

$E_Y = 2p - 1(1 - p) = 2p - 1 + p = 3p - 1$

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas – Solução Gráfica – Exemplo



Determinando a intereseção: $-7p+4=3p-1 \Rightarrow 10p = 5 \Rightarrow q = 1/2$

- Jogador Linha descobre que p = 1/2 é ideal porque o jogador Coluna não pode obter um *payoff* mais baixo neste ponto.
- A conclusão é que uma estratégia mista ótima para o jogador Linha é jogar a estratégia A com probabilidade 1/2 e estratégia B com probabilidade 1/2.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas – Exemplo

	Coluna		
Linha		q	1-q
		X	Y
	A	-3	2
	B	4	-1

- Agora vamos determinar a estratégia mista ideal de Coluna...
- Para fazer isso, vamos considerar os *payoffs* que Linha receberia em estratégias puras correspondentes às estratégias mistas de Coluna...

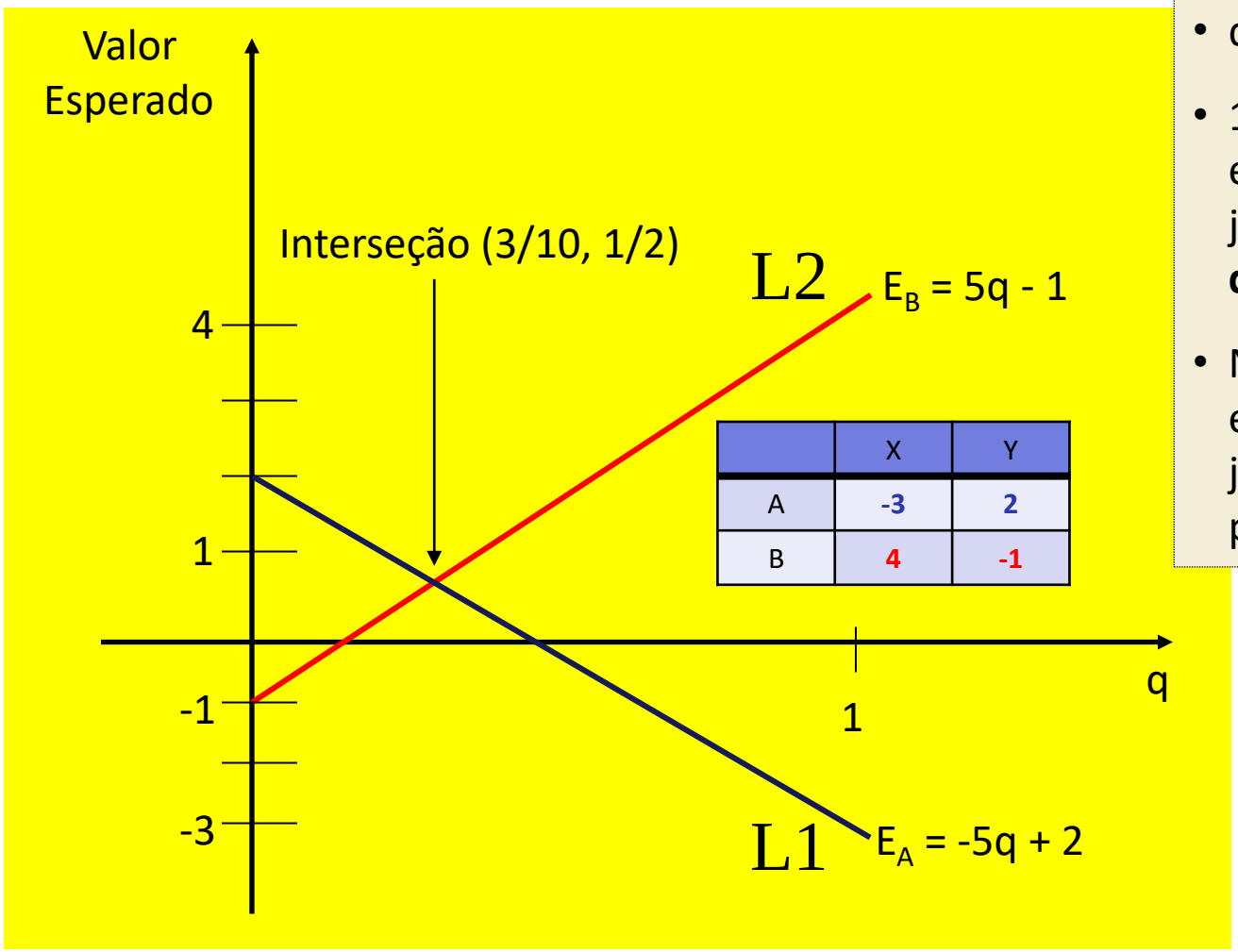
$E_A = -3q + 2(1 - q) = -3q + 2 - 2q = -5q + 2$

$E_B = 4q - 1(1 - q) = 4q - 1 + p = 5q - 1$

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas – Solução Gráfica – Exemplo



	X	Y
A	-3	2
B	4	-1

- q = 3/10
- 1/2 é o *payoff* esperado para o jogador Linha, (**valor do jogo**).
- Note-se que o *payoff* esperado para o jogador Coluna é, portanto, -1/2.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax – Estratégias Mistas – Solução Gráfica – Exemplo

	Coluna		
Linha		X	Y
	A	-1	2
	B	4	-1

Resposta

- Estratégias ótimas:
  - ✓ Jogador Coluna: (3/10, 7/10)
  - ✓ Jogador Linha: (1/2, 1/2)
- Valor do Jogo: 1/2
- Ao escrever desta forma, entende-se que a primeira coordenada é a probabilidade para jogar a primeira estratégia e a segunda coordenada é a probabilidade de jogar a outra estratégia ao ler as estratégias da tabela dada na ordem natural - da esquerda para a direita e de cima para baixo.

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

Determinação das probabilidades usando Programação Linear

Sendo $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$ o *payoff* esperado do jogador **Linha** utilizar as suas m estratégias quando o jogador **Coluna** utiliza a sua estratégia j, as probabilidades ótimas ou planos (p_1, p_2, ..., p_m) do jogador **Linha** podem ser determinadas resolvendo o seguinte problema maximin:

$$\arg\max\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i, \ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}p_i,\right)\right\}$$

sujeito a

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \\ p_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

No entanto

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i, \ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}p_i,\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq v, j = 1,2,\ldots,n$$

Com isso, o problema para o jogador **Linha** pode ser escrito como o pl:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = v \\ \text{s.a} \quad & v - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \leq 0, j = 1,2,\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ & p_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \\ & v \text{ livre} \end{aligned}$$

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

Determinação das probabilidades usando Programação Linear

As probabilidades ótimas ou planos (q_1, q_2,..., q_n) do jogador **Coluna** podem ser determinadas resolvendo o seguinte problema Minimax:

$$\arg\min\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i1}q_i, \sum_{j=1}^{m} a_{i2}q_i, \ldots \sum_{j=1}^{m} a_{in}q_i,\right)\right\}$$

sujeito a

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1 \\ q_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = v \\ \text{s.a} \quad & v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ & q_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \\ & v \text{ livre} \end{aligned}$$

Comparando os PL's para ambos os jogadores, percebe-se que o pl do jogador **Coluna** é o dual do pl do jogador **Linha**.

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

<u>Exemplo</u> de Determinação das probabilidades usando Programação Linear

		Coluna				
A=	Linha	3	-5	0	9	-6
		-2	6	8	-1	2
		1	7	-4	9	3

No nosso exemplo, como não há um par de estratégias dominante (solução do jogo), então os jogadores escolherão as estratégias baseado em um vetor de probabilidades. Isto é, **Linha** escolhe linha 1, 2 ou 3, com probabilidades de $p=\{p_1, p_2, p_3\}$. Jogador **Coluna** escolhe as colunas com probabilidades $q=\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$.

<u>Sob o ponto de vista do **Linha**</u>**:** Considerando que **Linha** adotou as probabilidades $\{p_1, p_2, p_3\}$, os possíveis *payoffs* do jogador **Coluna** são

$$E(s_1) = 3p_1 - 2p_2 + p_3 \quad E(s_2) = -5p_1 + 6p_2 + 7p_3 \qquad E(s_3) = 0p_1 + 8p_2 - 4p_3$$

$$E(s_4) = 9p_1 - 1p_2 + 9p_3 \quad E(s_5) = -6p_1 + 2p_2 + 3p_3$$

continua ...

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

<u>Exemplo</u> de Determinação das probabilidades usando Programação Linear

Assim, a melhor resposta a ser dada pelo **Jogador 2** é aquela que minimiza o desembolso, ou seja, o **Jogador 2** escolherá a estratégia segundo o critério

$$\min\left(3p_1 - 2p_2 + p_3, -5p_1 + 6p_2 + 7p_3, 0p_1 + 8p_2 - 4p_3, 9p_1 - 1p_2 + 9p_3, -6p_1 + 2p_2 + 3p_3\right)$$

Visto que **Coluna** fará sua escolha baseado no critério acima, a melhor estratégia para o **Linha** é aquela que garante um desembolso máximo por parte do **Coluna**. Ou seja, enquanto que o **Coluna** procura minimizar o desembolso, o **Linha** procura que esse desembolso (mínimo) seja o maior possível. Isso pode ser expressado por

$\{p_1, p_2, p_3\} \in \arg\max \min\left(3p_1 - 2p_2 + p_3, -5p_1 + 6p_2 + 7p_3, 0p_1 + 8p_2 - 4p_3, 9p_1 - 1p_2 + 9p_3, -6p_1 + 2p_2 + 3p_3\right)$
sujeito a $p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_1, p_2, p_3 \geq 0$

Seja $v = \min\left(3p_1 - 2p_2 + p_3, -5p_1 + 6p_2 + 7p_3, 0p_1 + 8p_2 - 4p_3, 9p_1 - 1p_2 + 9p_3, -6p_1 + 2p_2 + 3p_3\right)$

tem-se $3p_1 - 2p_2 + p_3 \geq v, -5p_1 + 6p_2 + 7p_3 \geq v, 0p_1 + 8p_2 - 4p_3 \geq v, 9p_1 - 1p_2 + 9p_3 \geq v, -6p_1 + 2p_2 + 3p_3 \geq v$

continua ...

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

<u>Exemplo</u> de Determinação das probabilidades usando Programação Linear

Portanto, a resolução do seguinte pl dá o vetor de probabilidades $\{p_1, p_2, p_3\}$. segundo as quais o jogador **Linha** deve jogar para maximizar seu *payoff*.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = v \\
\text{s.a} \quad & 3p_1 - 2p_2 + p_3 \geq v \\
& -5p_1 + 6p_2 + 7p_3 \geq v \\
& 0p_1 + 8p_2 + 4p_3 \geq v \\
& 9p_1 - 1p_2 + 9p_3 \geq v \\
& -6p_1 + 2p_2 + 3p_3 \geq v \\
& p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0, \ v \ \text{livre}
\end{aligned}
$$

Solução ótima:

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{40}{169}, \frac{51}{169}, \frac{78}{169}\right), \ v = \frac{96}{169}$$

Se o jogo for repetido várias vezes, e se o **Linha** escolher as estratégias conforme as probabilidades $\{p_1, p_2, p_3\}$, o *payoff* esperado é de 96/169, ou seja, o *payoff* esperado é de aproximadamente 0,568.

continua ...

Teoria dos Jogos

Teorema MiniMax de Von Neumann

Exemplo de Determinação das probabilidades usando Programação Linear
Sob o ponto de vista do jogador **Coluna**.

$$\begin{aligned} \min D = \quad & w \\ \text{s.a.} \quad & 3q_1 - 5q_2 + 0q_3 + 9q_4 - 6q_5 - w \le 0 \\ & -2q_1 + 6q_2 + 8q_3 - 1q_4 + 2q_5 - w \le 0 \\ & q_1 + 7q_2 - 4q_3 + 9q_4 + 3q_5 - w \le 0 \\ & q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \ge 0, \ v \ \text{livre} \end{aligned}$$

Solução ótima:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = \left(\frac{104}{169}, 0, \frac{29}{169}, 0, \frac{36}{169}\right), \ w = \frac{96}{169}$$

Fazendo uma análise prévia da matriz de *payoffs*, e considerando que o **Coluna** é racional, em momento algum pode escolher as estratégias 2 e 4 visto que são dominadas por outras estratégias. Ou seja, há outra(s) estratégia(s) com *payoff*(*s*) melhor. Pode-se verificar que a estratégia 2 é dominada pela estratégia 5 e que a estratégia 4 é dominada pela estratégia 1. Dado que ambos os jogadores são racionais, ambos não poderiam considerar estratégias.

Teoria dos Jogos

Jogos de Soma Não Nula – Equilíbrio de Nash

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

- Em jogos de soma não-nula, as principais diferenças frente ao que se viu no caso de jogos de soma nula são:
  - ✓ Os jogadores não são mais necessariamente adversários;
  - ✓ Um par maximin não é necessariamente um par de equilíbrio e vice-versa;
  - ✓ Pares de equilíbrio distintos não necessariamente apresentam o mesmo valor do jogo;
- Não há um conceito óbvio de solução para o jogo de soma não-nula.

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

- Dada a matriz de pagamentos, no caso de jogos de soma nula envolvendo dois jogadores, a determinação das melhores estratégias puras se dava pela aplicação dos operadores maximin e minimax.
- Em jogos de soma não-nula, será necessário generalizar este conceito, visto que o pagamento para cada jogador pode ser distinto.
- A generalização se dá de forma simples: ambos os jogadores aplicam o operador maximin, pensando apenas em maximizar o seu próprio pagamento, deixando de lado a minimização do pagamento do seu adversário.

Em jogos de soma zero a solução minimax é o mesmo que o equilíbrio de Nash.

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

- NASH (1951) apresentou uma generalização do teorema de von Neumann para jogos de soma não-nula, como segue:
- **Teorema**: Em um jogo de dois jogadores, com soma nula ou soma não-nula, com o jogador I tendo n estratégias puras e o jogador II tendo m estratégias puras, sendo n e m finitos, então, ao admitir estratégias mistas, sempre existe ao menos um par de equilíbrio.
- O alcance desse teorema, no entanto, é menor que aquele associado a jogos de soma nula, pois lá foi provada a equivalência entre pares de equilíbrio e soluções ótimas do jogo.
- Para jogos de soma não-nula, sempre existem pares maximin-minimax e sempre existem pares de equilíbrio, mas eles não precisam ser os mesmos e nem em igual número.
- Nash comprovou que, se permitirmos estratégias mistas, então cada jogo com um número finito de jogadores em que cada jogador pode escolher entre um número finito de estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio de Nash.

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

- Equilíbrio de Nash é um conceito importante na teoria dos jogos. Um equilíbrio de Nash ocorre quando cada jogador está a perseguir a melhor estratégia possível no pleno conhecimento das estratégias dos outros jogadores. Um equilíbrio de Nash é alcançado quando ninguém tem incentivo para mudar sua estratégia. (John Nash)
- "Se há um conjunto de estratégias com a propriedade que nenhum jogador pode se beneficiar por mudar sua estratégia, enquanto os outros jogadores mantém suas estratégias inalteradas, então esse conjunto de estratégias e os *payoffs* correspondentes constituem o Equilíbrio de Nash. “
- Escolha de B é ótima, dada a escolha de A, e a escolha de A ótima, dada a escolha de B. “Estou fazendo o melhor que posso, dado o que você está fazendo”. “Você está fazendo o melhor que pode, dado o que eu estou fazendo.”
- Mais precisamente: – Suponha que o Jogador 1 escolhe uma estratégia S e o Jogador 2 escolhe uma estratégia T – Dizemos que o par de estratégias (S, T) está em equilíbrio de Nash se S é a melhor resposta para T, e T é a melhor resposta para S.

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

Seja (S, f) um jogo com n jogadores, onde $S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{im_i}\}$ é o conjunto de estratégias puras para o jogador i, $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de perfis de estratégia e $f(x) = (f_1(x) , ..., f_n(x))$ é a função de *payoffs* avaliada em $x \in S$. Seja x_i um perfil de estratégias do jogador i e x_{-i} um perfil de estratégias de todos os jogadores, exceto para o jogador i. Quando cada jogador $i \in \{1, ..., n\}$ escolhe a estratégia x_i resultando em perfil de estratégia $x = (x_1, ..., x_n)$, então jogador i obtém *payoff* $f_i(x)$.

Note-se que o *payoff* depende do perfil de estratégia escolhida, isto é, sobre a estratégia escolhida pelo jogador i, bem como as estratégias escolhidas por todos os outros jogadores. Um perfil de estratégia $x^* \in S$ é um equilíbrio de Nash (NE) se nenhum desvio unilateral na estratégia por um único jogador é rentável para esse jogador, que é

$$\forall i, x_i \in S_i: f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*)$$

“Uma vez que o adversário não muda de estratégia, o jogador i também não muda.”

continua ...

https://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash

... continuação

$$\forall i,\ x_i \in S_i:\ f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*)$$

Quando a desigualdade acima se mantém estrita (com > em vez de ≥) para todos os jogadores e todas as estratégias alternativas viáveis, então o equilíbrio é classificado como um Equilíbrio de Nash estrito. Se em vez disso, por algum jogador, há igualdade exata entre x_i^* e qualquer outra estratégia no conjunto S, então o equilíbrio é classificado como um equilíbrio de Nash fraco.

Um jogo pode ter uma Equailíbrio de Nash em estratégias puras ou estratégias mistas. (Neste último uma estratégia pura é escolhida aleatoriamente com uma probabilidade fixa).

https://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Solução

- Os pares de equilíbrio são considerados os mais aceitáveis conceitos de solução, mas a dificuldade com eles é que podem existir muitos pares de equilíbrio em um jogo.
- Além disso, embora existam técnicas gráficas para obter os pares de equilíbrio para o caso de n = m = 2, para outros valores de n e m a tarefa se torna bem mais desafiadora (WINKELS, 1979).
- A sugestão mais aceita é tomar um subconjunto dos pares de equilíbrio como solução, tomando como critério alguma propriedade específica.

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Solução

Há duas maneiras de encontrar equilíbrios de Nash:

1. Verificar todos os pares de estratégias, e testar para cada um deles se as estratégias individuais são melhores respostas para o outro.
2. Computar a melhor resposta de cada jogador para cada estratégia do outro jogador, e então encontrar estratégias que são melhores respostas entre si.

www.inf.ufpr.br/vignatti/courses/ci305/06b.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Exemplo

		Coluna	
		S_1	S_2
Linha	S_1	(1,2)	(0,1)
	S_2	(2,1)	(1,0)

- (S_2,S_1) é um equilíbrio de Nash.
- Para provar isso:
  - ✓ Dado que o jogador coluna joga S_1, a melhor resposta do jogador linha é S_2;
  - ✓ Dado que o jogdor linha jogará S_2, a melhor resposta do jogdor coluna é S_1.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Determinação do Equilíbrio de Nash

- O que fazer quando o equilíbrio não é óbvio?
- Em alguns casos, podemos eliminar estratégias dominadas.
- Estas são estratégias que são inferiores (dominadas) para cada ação adversária.
- No exemplo anterior, a linha S_1 é dominada pela linha S_2.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Determinação do Equilíbrio de Nash – Exemplo dos Prisioneiros

Dilema do prisioneiro

		Suspeito 2	
		Confessar	Não confessar
Suspeito 1	Confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	Não confessar	(-10,0)	(-2,-2)

- O perfil de estratégia {confessar, confessar} é o único Equilíbrio de Nash em pura estratégias puras do jogo.
- Em equilíbrio ambos os jogadores recebem uma recompensa de -5.
- Equilíbrio ineficiente: {não confessar, não confessar} produz *payoffs* mais elevados para ambos.

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Determinação do Equilíbrio de Nash – Exemplo de Precificação

		Empresa 2	
		Mudar	Não mudar
Empresa 1	Mudar	(100,100)	(-10,140)
	Não mudar	(140,-10)	(0,0)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Estretégias Puras

Batalha das sexos

		Marido	
		Opera	Cinema
Mulher	Opera	(2,1)	(0,0)
	Cinema	(0,0)	(1,2)

Batalha das sexos após 30 anos de casamento

		Marido	
		Opera	Cinema
Mulher	Opera	(3,2)	(0,0)
	Cinema	(0,0)	(1,2)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Estratégias Mistas

- Infelizmente, nem todo jogo tem um equilíbrio de estratégia pura.
  - ✓ P.ex, “Pedra Papel Tesoura”.
- No entanto, cada jogo tem uma estratégia mista equilíbrio de Nash.
- A cada ação é atribuída uma probabilidade de jogo.
- Jogador é indiferente entre as ações, tendo em conta estas probabilidades.
- Em muitos jogos um jogador pode não ter uma estratégia pura. Em vez disso, otimizando o *payoff* pode exigir uma estratégia aleatória (também chamado de estratégia mista)

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Equilíbrio de Nash – Estretégias Mistas – Jogo da Moeda

Lançamento de Moeda

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	(1,-1)	(-1,1)
	Coroa	(-1,1)	(1,-1)

- Não tem Equilíbrio de Nash em estratégias puras.

If it's not a zero-sum game, computing the Nash Equilibrium, is in general hard!

http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/49858/27316/week-12-13-gt-game_theory.pdf

Teoria dos Jogos

Aplicação de Estratégias Mistas

- Basebol: lançador versus rebatedor
- Arrecadação: inspetor versus sonegador
- Policia: horário do patrulhamento
- Testes sem aviso prévio
- Fiscalização de exames/provas
- Inspeção de armas para fazer cumprir acordos de controle de armas (ou sanções)

http://faculty.mc3.edu/cvaughen/mgf1107/game_theory/part3b.ppt

Teoria dos Jogos

Exemplo de estratégias para jogos repetidos

- **Tit For Tat** - cooperating on the first time, then repeat opponent's last choice.
- **Tit For Tat and Random** - Repeat opponent's last choice skewed by random setting.*
- **Tit For Two Tats and Random** - Like Tit For Tat except that opponent must make the same choice twice in a row before it is reciprocated. Choice is skewed by random setting.*
- **Tit For Two Tats** - Like Tit For Tat except that opponent must make the same choice twice in row before it is reciprocated.
- **Naive Prober** (Tit For Tat with Random Defection) - Repeat opponent's last choice (ie Tit For Tat), but sometimes probe by defecting in lieu of cooperating.*
- **Remorseful Prober** (Tit For Tat with Random Defection) - Repeat opponent's last choice (ie Tit For Tat), but sometimes probe by defecting in lieu of cooperating. If the opponent defects in response to probing, show remorse by cooperating once.*
- **Naive Peace Maker** (Tit For Tat with Random Co-operation) - Repeat opponent's last choice (ie Tit For Tat), but sometimes make peace by co-operating in lieu of defecting.*
- **True Peace Maker** (hybrid of Tit For Tat and Tit For Two Tats with Random Cooperation) - Cooperate unless opponent defects twice in a row, then defect once, but sometimes make peace by cooperating in lieu of defecting.*
- **Random** - always set at 50% probability.

Teoria dos Jogos

Exemplo de estratégias para jogos repetidos

- **Always Defect**
- **Always Cooperate**
- **Grudger** (Co-operate, but only be a sucker once) - Cooperate until the opponent defects. Then always defect unforgivingly.
- **Pavlov** (repeat last choice if good outcome) - If 5 or 3 points scored in the last round then repeat last choice.
- **Pavlov / Random** (repeat last choice if good outcome and Random) - If 5 or 3 points scored in the last round then repeat last choice, but sometimes make random choices.*
- **Adaptive** - Starts with c,c,c,c,c,c,d,d,d,d,d and then takes choices which have given the best average score re-calculated after every move.
- **Gradual** - Cooperates until the opponent defects, in such case defects the total number of times the opponent has defected during the game. Followed up by two co-operations.
- **Suspicious Tit For Tat** - As for Tit For Tat except begins by defecting.
- **Soft Grudger** - Cooperates until the opponent defects, in such case opponent is punished with d,d,d,d,c,c.
- **Customised strategy 1** - default setting is T=1, P=1, R=1, S=0, B=1, always co-operate unless sucker (ie 0 points scored).
- **Customised strategy 2** - default setting is T=1, P=1, R=0, S=0, B=0, always play alternating defect/cooperate.

Classifications of Games

- **Cooperative and non-cooperative games**

  ***Cooperative* game**: players are able to form binding commitments.

  ***Non cooperative* games**: the players make decisions independently

- **Zero sum and non-zero sum games**

  ***Zero sum* game**: the total payoff to all players is zero. E.g., poker, go,…

  ***Non-zero sum* game**: e.g., prisoner's dilemma

- **Finite game and infinite game**

  Finite game: the players and the actions are finite.

- **Simultaneous and sequential (dynamic) games**

  ***Simultaneous* game**: players move simultaneously, or if they do not move simultaneously, the later players are unaware of the earlier players' actions

  ***Sequential* game**: later players have some knowledge about earlier actions.

- **Perfect information and imperfect information games**

  ***Perfect information* game:** all players know the moves previously made by all other players. E.g., chess, go,…

  Perfect information ≠ Complete information

Every player know the strategies and payoffs of the other players but not necessarily the actions.