UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DISCIPLINA OPTATIVA DE TEORIA DOS JOGOS

Teoria dos Jogos - rascunho

Autor do Texto Base:
Christopher GRIFFIN

Tradução/Adaptação:
Volmir Eugênio WILHELM

Curitiba, 2013

Game theory is a systematic study of strategic interaction among rational individuals [Levent, [9]].

Prefácio

Este texto está INCOMPLETO. Este texto é um RASCUNHO INICIAL.

Estas notas foram feitas para sintetizar o conteúdo da bibliografia referenciada bibliográficas tendo em vista o conteúdo programático de uma disciplina introdutória de Teoria dos Jogos. Sugere-se a sua aquisição. O único objetivo destas notas é facilitar as atividades dos alunos em sala de aula, de forma que o aluno tem um maior conforto em sala de aula. De nenhuma maneira a leitura ou consulta da bibliografia está descartada, isto é dever do aluno.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1

Introdução à Teoria da Probabilidade

Exemplo 1.1 *Parabéns!!!! Você chegou na última rodada do game "Jogar ou não Jogar". Duas malas com dinheiro permanecem no jogo, uma contem R$ 0,01 enquanto que a outra contem R$ 1.000.000,00. Um banqueiro lhe oferece um payoff (pagamento) de R$ 499.999,00. Você aceita o dinheiro certo do banqueiro ou irá arriscar tudo por R$ 1.000.000,00. Suponha que o banqueiro lhe ofereceu R$ 100.000,00, e o que você faria se oferecesse R$ 500.000,00 ou R$ 10.000,00?*

O exemplo 1.1 pode parecer bastante artificial, mas possui implicações no mundo real e apresenta a maioria dos componentes necessários para uma discussão séria a respeito de tomada de decisão sob risco. A fim de estudar estes conceitos formalmente, precisamos de uma fundamentação (uma teoria básica a respeito) de probabilidade. Infelizmente, um estudo formal de probabilidade requer uma dose pesada de teoria da medida. Entretanto, as seguintes definições são mais intuitivas do que matematicamente rigorosas.

1.1 Probabilidade

Um *experimento aleatório* é todo aquele cujos resultados não podem ser previstos (com certeza) antes da execução do mesmo. Os experimentos aleatórios constituem situações onde os acontecimentos possuem variabilidade de ocorrência, isto é, o mesmo experimento pode ter vários resultados diferentes, por exemplo, no lançamento de um dado podemos obter seis resultados aleatórios. Já a *probabilidade* de um acontecimento é a chance de que tal acontecimento ocorra.

Diretamente ligado aos experimentos aleatórios temos o espaço amostral, que consiste nos possíveis resultados do experimento. Uma das condições da definição de experimento aleatório é que, antecipadamente, sejam conhecidos os possíveis resultados. Assim, a definição que segue é importante. Seja Ω um conjunto finito de elementos que são os resultados (as saídas) de um experimento aleatório. Iremos denominar Ω de *Espaço Amostral*. Cada elemento de Ω é denominado de resultado.

A palavra "espaço" tem na matemática o significado usual de totalidade ou a coleção de todos e a palavra "amostral" tem a ver com a incerteza do resultado da realização do experimento aleatório. Como o espaço amostral é um conjunto então a conceituação, as propriedades e a notação pertinentes ao espaço amostral e resultados de experimento aleatório são totalmente análogas àquelas referentes a conjunto. Cada resultado de um espaço amostral Ω é um elemento de Ω, ou um ponto desse espaço, e é simbolizado por ω, de modo que se ω é um elemento do espaço amostral Ω então $\omega \in \Omega$. Eventualmente, distinguem-se diferentes elementos ou pontos do espaço amostral através de subscritos, como, por exemplo, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$

Definição 1.1 ([4]) *Espaço amostral, Ω, de um experimento realizado sob condições fixas, é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, entendendo-se por resultado possível todo resultado elementar e indivisível do experimento.*

Exemplo 1.2 *No caso do exemplo 1.1, o mundo do qual tratamos se reduz à posição das malas com R$ 0,01 e R$ 1.000.000,00. Neste caso, Ω consiste em dois possíveis resultados: R$ 1.000.000,00 está na mala 1 (enquanto que 0,01 está na mala 2) ou R$ 1.000.000,00 está na mala 2 (enquanto que R$ 0,01 está na mala 1).*

Formalmente, vamos nos referir ao primeiro resultado de ω_1 e ao segundo de ω_2. Então $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. [1]

Há, geralmente, muito mais interesse em conjuntos de elementos do que nos elementos individuais do espaço amostral. Ou seja, geralmente em um experimento aleatório, o interesse fundamental se relaciona com acontecimentos particulares do espaço amostral me não somente a um único acontecimento. Isto leva a definição de evento.

Definição 1.2 (Evento) *Se Ω é o espaço amostral, então um evento é qualquer subconjunto de Ω.*

Ou seja, evento é todo resultado de um experimento formado por 1 ou mais de um resultado elementar e indivisível.

1. Observa-se no experimento de jogar um dado equilibrado, que o resultado "número par" não é elementar e indivisível, pois é composto por três resultados deste tipo $\{2, 4, 6\}$; logo "número par" é um resultado composto.

[1] Dependendo da natureza do experimento, o espaço amostral poderá não ser único.

2. Cada resultado pode ser associado ao espaço amostral como um subconjunto dele. O resultado "número par" é o subconjunto $E = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$. Assim, todo resultado do experimento é subconjunto do espaço amostral.

Exemplo 1.3 *Claramente, o espaço amostral do exemplo 1.1, consiste precisamente de 4 eventos:* $\emptyset$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$ *e* $\{\omega_1, \omega_2\} = \Omega$. *Estes quatro conjuntos representam todos os possíveis subconjuntos de* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Definição 1.3 (União) *Se* $E, F \subseteq \Omega$ *são ambos eventos, então* $E \cup F$ *é a união dos conjuntos* E *e* F *e consiste de todos os elementos de* E *ou de* F. *Evento* $E \cup F$ *ocorre se ocorre o evento* E *ou o evento* F.

Exemplo 1.4 *Considere o lançamento de um dado equilibrado de 6 lados. Os possíveis resultados são* $1, 2, ..., 6$. *Se* $E = \{1, 3\}$ *e* $F = \{2, 4\}$, *então* $E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}$ *deixará de ocorrer quando for exibido 5 ou 6 na face superior.*

Definição 1.4 (Interseção) *Se* $E, F \subseteq \Omega$ *são ambos eventos, então* $E \cap F$ *é a interseção dos conjuntos* E *e* F *e consiste de todas as saídas de* E *e de* F. *O evento* $A \cap B$ *ocorre se ambos os eventos* E *e* F *ocorrem simultaneamente.*

Exemplo 1.5 *Considere o lançamento do dado. Se* $E = \{1, 2\}$ *e* $F = \{2, 4\}$, *então* $E \cap F = \{2\}$ *ocorrerá somente quando for lançado 2.*

Definição 1.5 (Mutuamente Exclusivos) *Dois eventos* $E, F \subseteq \Omega$ *são ditos mutuamente exclusivos se e somente se* $E \cap F = \emptyset$.

Dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos se os mesmos não podem ocorrer simultaneamente. Isto é, a ocorrência de um evento impede a ocorrência do outro evento (ou eventos). Por exemplo, suponhamos os eventos "cara" e "coroa" com relação ao lançamento de uma moeda não viciada. Estes dois eventos são mutuamente exclusivos porque o lançamento de qualquer moeda não viciada não pode resultar em "cara" e "coroa" ao mesmo tempo.

A primeira definição matemática formal da probabilidade de um evento foi baseada em simetria, sendo expressa como a razão entre o número de casos favoráveis a tal evento ($\#E$) e o número total de casos possíveis ($\#\Omega$). O modo tradicional de se expressar isso é através da definição.

Definição 1.6 (Definição Clássica de Probabilidade) *Seja E um subconjunto do espaço amostral Ω ($E \in \Omega$). Então, se todos os resultados elementares de Ω são equiprováveis, a medida da probabilidade de ocorrência do evento E é*

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} \tag{1.1}$$

Tendo em vista que a quantidade de eventos favoráveis ($\#E$) pode variar apenas entre "nenhum evento" e "todos os eventos", a probabilidade de um evento é sempre um número entre 0 e 1, ou seja, pode variar somente entre 0 e 100%.

Definição 1.7 *Seja E um evento do espaço amostral Ω, então se atribuirmos uma probabilidade ao evento E ele é chamado de evento aleatório.*

Definição 1.8 (Definição Axiomática de Probabilidade (Kolmogorov)) *Dado um espaço amostral discreto Ω, seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os eventos de Ω. A probabilidade é uma função que é um mapeamento $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ com as seguintes propriedades:*

1. $P(E) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. *Se* $E, F \in \mathcal{F}$ *e* $E \cap F = \emptyset$*, então* $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Observações 1.1 *É melhor pensar na função da definição 1.8 como sendo uma função de probabilidade QUE atribui um número a um resultado (ou evento) que dá as chances deste ocorrer. Em termos mais simples, suponha que poderia executar um experimento gerando um resultado em Ω. A função P simplesmente dá a proporção de quantas vezes vamos observar o evento $E \subset \Omega$ se esse experimento for executado um número muito grande de vezes.*

Exemplo 1.6 *Suponha que poderíamos participar do jogo "Jogar ou Não Jogar" seguidas vezes e observar em qual mala o dinheiro está. Uma jogada "inteligente" seria alojar este dinheiro nas malas de modo que cerca de metade do tempo que observamos R$ 1.000.000,00 está na mala 1 (evento E) e na outra metade do tempo nós observamos este dinheiro em mala 2 (evento F).*

A distribuição de probabilidade formaliza essa noção e pode atribuir $\frac{1}{2}$ para evento $\{E\}$ e $\frac{1}{2}$ para o evento $\{F\}$. No entanto, para obter uma distribuição de probabilidade de verdade, devemos também atribuir probabilidades a $\emptyset$ e $\{E, F\}$. No primeiro caso, sabemos que algo deve acontecer, ou seja, ou ocorre E ou ocorre F. Portanto, podemos atribuir 0 para o evento $\emptyset$. Neste último caso, sabemos que a certeza de que qualquer resultado, E ou F, deve ocorrer e, portanto, neste caso, atribuir um valor de 1 (100%).

Exemplo 1.7 *Em um dado equilibrado de seis faces, a probabilidade de lançar qualquer valor é $\frac{1}{6}$. Formalmente, $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ e quaisquer lançamento gera um evento com apenas um único elemento ω onde $\omega \in \Omega$. Se considerarmos o caso $E = \{1, 2, 3\}$ então $P(E)$ dá a probabilidade de que a face superior será ou 1, ou 2, ou 3 Como $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$ são conjuntos disjuntos e $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, sabemos que:*

$$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

Definição 1.9 (Espaço de Probabilidade Discreto) *A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ é denominada de espaço de probabilidade discreto sobre Ω*

Lema 1.10 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade discreto. Então $P(\emptyset) = 0$*

Lema 1.11 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade discreto e sejam $E, F \in \mathcal{F}$. Então $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$*

1.2 Probabilidade Condicional

Quando discorremos sobre alguns conceitos da probabilidade e também sobre a união de dois eventos, nos exemplos apresentados calculava-se a probabilidade de um evento ocorrer diretamente em função do espaço amostral.

Suponha que temos um espaço de probabilidade discreto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e somos informados de que um evento E ocorreu. Agora queremos calcular a probabilidade de que algum outro evento F ocorra (sabendo que E ocorreu). Este valor é chamado de "probabilidade condicional do evento F dado E". Ela é denotada por $P(F|E)$.

Ou seja, probabilidade condicional envolve um segundo evento de um espaço amostral que ocorre depois que já tenha ocorrido o primeiro. Muitas vezes quando realizamos um experimento temos informação extra sobre a ocorrência de um evento. Neste caso, gostaríamos de utilizar esta informação extra para realocar probabilidades aos outros eventos.

Exemplo 1.8 *Suponha que dois dados equilibrados (um vermelho e o outro azul) são lançados. Neste caso, o espaço amostral é* $\Omega = \{(x, y)|x = 1, ..., 6, y = 1, ..., 6\}$*. Suponha que a face superior do dado vermelho mostra o número 3. Desejamos saber qual a probabilidade da soma ser 8 dado que sabemos que já saiu 3 no dado vermelho.*

Uma vez que os dados são equilibrados (não viciados), a probabilidade de lançar qualquer par de valores $(x, y) \in \Omega$ é igual. Existem 36 elementos e assim a cada um é atribuído a probabilidade $P(x, y) = \frac{1}{36}$. Isto é, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ é definido de forma que $P(x, y) = \frac{1}{36}$ para cada $(x, y) \in \Omega$

Seja E o evento "foi lançado 3 no dado vermelho". Queremos atribuir um novo conjunto de probabilidades para os elementos de Ω que reflita essa informação. Sabemos que o nosso resultado final deve ter a forma $(3, y)$, onde $y \in \{1, ..., 6\}$. Em essência, E torna-se o nosso **novo espaço amostral**. Além disso, sabemos que cada um desses resultados é igualmente provável, porque o dado é não viciado. Assim, podemos atribuir $P((3, y)|E) = \frac{1}{6}$ para cada $y \in \{1, ..., 6\}$ e $P((x, y)|E) = 0$ no caso $x \neq 3$ quando $(x, y) \notin E$. Esta última definição ocorre porque sabemos que já se observou 3 (do dado vermelho), por isso é impossível ver outro número na primeira coordenada diferente de 3.

Visto que o dado vermelho teve como resultado 3, temos agora somente 6 resultados possíveis: $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} = E$.

Finalmente, podemos responder a pergunta originalmente colocada. A única maneira de obter uma soma igual a 8 é lançar 5 com o azul. Assim, a probabilidade de um valor combinado de lançamento, de 8 visto que já ocorreu 3 no dado vermelho, é de

$$P(F|E) = \frac{\#G}{\#E} = \frac{1}{6}, \text{ com } F\{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\},\ G = (E \cap F) = \{(5, 3)\}.$$

Exemplo 1.9 *Em uma urna há um total de 10 bolas, sendo 3 amarelas, 4 azuis e 3 verdes. É retirada uma bola dessa urna, ao acaso, e verifica-se que ela é verde. Qual a probabilidade de se retirar uma bola azul sabendo que a bola verde retirada inicialmente não foi reposta?*

O primeiro passo é identificar os eventos em questão: evento F - sair uma bola azul; evento E - sair uma bola verde.

Resolver o problema consiste em determinar a probabilidade de se retirar uma bola azul da urna sabendo que já foi retirada uma bola verde. Observe que a ocorrência do evento F está condicionada à ocorrência do evento E. Esse é o caso mais simples de problemas envolvendo probabilidade condicional. Veja: Após a retirada da bola verde, restaram na urna 9 das 10 bolas. Dessas 9 bolas, 4 são azuis. Assim, temos que:

$$P(F|E) = \frac{4}{9} \tag{1.3}$$

Definição 1.12 (Probabilidade Condicional) *Dados o espaço de probabilidade discreto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e um evento $E \in \mathcal{F}$. A probabilidade condicional de ocorrer o evento $F \in \mathcal{F}$ dado o evento E é:*

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \tag{1.4}$$

Exemplo 1.10 *Usando a definição 1.12, vamos calcular a a probabilidade condicional da soma ser 8 dado que sabemos que já saiu 3 no dado vermelho do exemplo 1.8.*

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 1.11 *(O Paradoxo de Monty Hall). Parabéns! Você é um competidor no jogo "Vamos fazer um trato?" e está na "grande jogada do dia"! Você deve escolher entre as portas de número 1, 2 e 3. Atrás de uma destas portas há um prêmio fabuloso! Atrás das outras duas portas há bodes. Uma vez que você escolheu uma das 3 portas, será aberta uma outra porta onde não está o prêmio. Neste momento, você pode decidir se deseja manter a porta que escolheu ou trocar pela outra porta que ainda permanece fechada. Quando chegar a hora, o que você fará?*

É tentador supor (de primeira) que não importa trocar de porta ou não. Você tem $\frac{1}{3}$ de chance de escolher a porta correta em sua primeira tentativa, então por que as chances de ganhar mudariam depois que é dada a informação de uma porta incorreta (onde há um bode)?

Para resolver este problema, é preciso conhecer o conjunto dos potenciais resultados. Há três informação que determinam um resultado:

1. Qual porta o produtor escolhe para esconder o grande premio;
2. Qual porta você escolhe primeiro; e
3. Se você troca de porta ou não.

Para a primeira decisão, existem três possibilidades (três portas). Para a segunda decisão, existem três possibilidades de novo (mais uma vez três portas). Para a terceira decisão há duas possibilidades (ou você muda (Y) , ou não (N)). Assim, existem $3 \times 3 \times 2 = 18$ resultados possíveis. Estes resultados podem ser visualizados na ordem em que são tomadas as decisões e isto é mostrado na figura 1.1. O primeiro passo (onde os produtores escolhem uma porta para ocultar o prêmio) não é observável pelo competidor, de modo que circundamos esta parte do diagrama com uma caixa com lados tracejados[2].

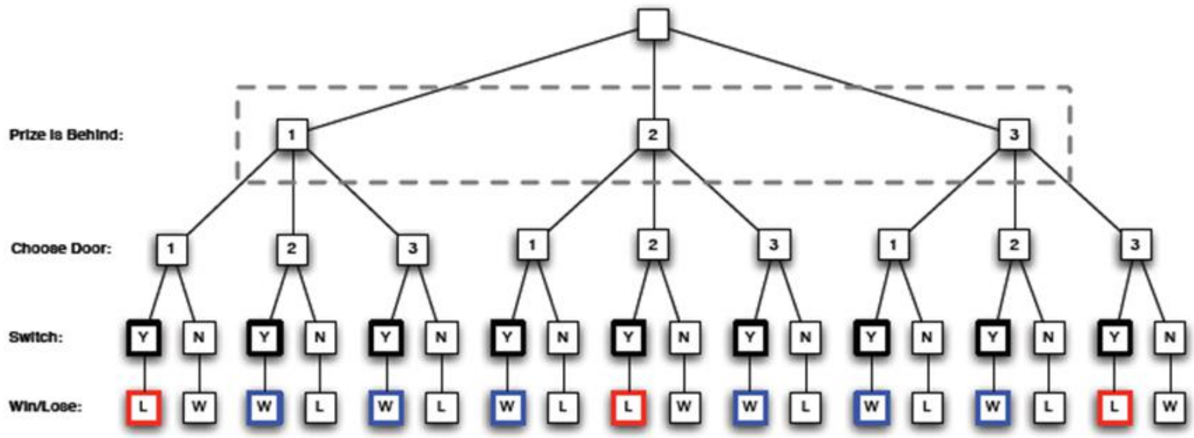

Figura 1.1: Árvore do Jogo

O "Paradoxo de Monty Hall" é um problema de decisão multi-estágio, cuja solução depende do conceito de probabilidade condicional. As etapas de tomada de decisão são mostrados no diagrama acima. Assume-se que os prêmios são escondidos aleatoriamente para as portas. Este passo não pode ser visto. O competidor (o jogador), deve escolher primeiro uma porta. Por último, ele deve decidir se quer ou não mudar de porta tendo sido mostrada uma porta incorreta (com um bode escondido atras dela).

A penúltima linha (identificada por "Switch") da figura 1.1 ilustra os 18 elementos do espaço de probabilidade. Poderíamos supor que todos são igualmente prováveis (isto é, que você escolhe aleatoriamente uma porta e que você, por acaso decide mudar e que os produtores do programa escolhem aleatoriamente uma porta para ocultar o prêmio). Neste caso, a probabilidade de um resultado é de $\frac{1}{18}$.

Atendo-se exclusivamente nos resultados provenientes da mudança de porta ou não. Na figura, estas aparecem em negrito, com bordas coloridas. Este é o evento definido por E. Suponha que o evento F consiste dos resultados em que o competidor ganha. (Isso é mostrado na linha inferior do diagrama com um **W**.) Estamos interessados em $P(F|E)$. Ou seja, quais são as chances de ganhar, visto que optamos em trocar de porta?

[2]Vamos estudar o significado desta caixa quando discutirmos árvores de jogo.

Em E, há precisamente seis resultados nos quais o jogador irá ganhar. Se cada um desses resultados, mutuamente exclusivos, tem probabilidade $\frac{1}{18}$, então:

$$P(E \cap F) = 6\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{3} \tag{1.5}$$

Quando há troca em 9 das 18 possibilidades, então

$$P(E) = 9\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

Então

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \tag{1.7}$$

Assim, se trocar há uma chance de $\frac{2}{3}$ de ganhar o prêmio. Se não trocar de porta, há apenas $\frac{1}{3}$ de chance de ganhar o prêmio. Portanto, trocar de porta é melhor.

Se este raciocínio não convencer, há outra maneira de ver que a chance de ganhar trocando de porta é 2/3. No caso da mudança o jogador está tomando uma decisão consciente. Considere apenas os resultados quando ocorrer troca. Observe que há 9 resultados quando há troca da porta original para a outra. Em 6 dessas 9 trocas, o jogador ganha o prêmio, enquanto que em 3 não ganha. Assim, as chances de ganhar o prêmio quando há troca de porta é 6/9 ou 2/3.

Outro conceito importante da teoria de probabilidade é a independência entre dois eventos. Em várias situações, a probabilidade da ocorrência de um evento E não é influenciado pela ocorrência do evento F. Como exemplo, temos o lançamento simultâneo de dois dados; o resultado do primeiro não tem influência sobre o resultado do segundo e vice-versa.

Definição 1.13 (Independência) *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *um espaço de probabilidade discreto. Dois eventos aleatórios* $E, F \in \mathcal{F}$ *são independentes se* $P(E \cap F) = P(E) \times P(F), ouseja$ $P(E|F) = P(E)$ *e* $P(F|E) = P(F)$

Exemplo 1.12 *Uma moeda é lançada duas vezes. Qual a probabilidade de obter cara no segundo lançamento?*

Primeiro vamos calcular a probabilidade de obter cara no segundo lançamento, independente do resultado do primeiro lançamento.

Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente. O espaço amostral é $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, K), (K, C)\}$.

O evento pretendido é $F = \{(C, C), (K, C)\}$. Logo

$$P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

Calculando a probabilidade de obter cara no segundo lançamento sabendo que obtive-se cara no primeiro lançamento. Há dois eventos a considerar: cara no primeiro lançamento, $E = \{(C, C), (C, K)\}$, e cara no segundo lançamento, $F = \{(C, C), (K, C)\}$. Como é conhecido que ocorreu o evento E, então sabe-se que o evento F só pode ter ocorrido na intersecção de E e F:

$$P(F|E) = \frac{P(F \cup E)}{P(E)} = \frac{1}{2} \tag{1.9}$$

De 1.8 e 1.9 tem-se $P(F) = P(F|E) = \dfrac{1}{2}$.

Também podemos mostrar que $P(E) = P(F|E)$ e portanto E e F são eventos independentes.

1.3 Variáveis Aleatórias e Valor Esperado

Muitos experimentos, como visto no lançamento do dado, fornecem resultados numéricos. O resultado de outros experimentos não resulta em números, tal qual o lançamento da moeda. Porém, no lançamento da moeda podemos associar um número para cada resultado; por exemplo, podemos associar o número 1 para "cara" e 2 para "coroa". Ao trabalhar com estes números é natural perguntar "qual é a probabilidade da ocorrência dos mesmos", e este estudo será feito via *variáveis aleatórias.*

Um entendimento intuitivo de uma variável aleatória é uma variável cujo valor X não é conhecido *a priori* e que é determinada de acordo com a probabilidade P que é parte de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Exemplo 1.13 *Suponha o lançamento de uma moeda honesta. Então a probabilidade de ver cara (ou coroa) deve ser de $\frac{1}{2}$. Se X for uma variável aleatória que fornece o resultado do lançamento, então vai assumir os valores "cara" ou "coroa" e vai levar a exatamente 50% com o passar do tempo.*

O problema em permitir uma variável aleatória assumir valores arbitrários (como cara ou coroa) faz com que seja difícil usar variáveis aleatórias em fórmulas que envolvem números. Há uma definição *muito* técnica de variável aleatória que surge na teoria de probabilidade formal. No entanto está além do âmbito desta disciplina. Pode-se, no entanto, ter uma "ideia" desta definição de forma restrita que é suficiente nesta disciplina.

Definição 1.14 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade discreto. Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto finito discreto de números reais. A variável aleatória X é uma função que mapeia cada elemento de Ω num elemento de D. Formalmente $X : \Omega \to D$.*

Definição 1.15 (Definição mais formal) *Uma variável X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ é uma função real definida no espaço Ω, tal que o evento $[X \leq x]$ é evento aleatório $\forall x \in \mathbb{R}$, isto é a função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é variável aleatória se o evento $[X \leq x] \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Observações 1.2 *Seja $\omega \in \Omega$. A função $X(w)$ é uma variável aleatória que associa a cada evento contido no espaço amostral Ω um número real.*

Exemplo 1.14 *Considere a variável aleatória "lançamento de uma moeda". Em vez de ter X assumir valores "cara" ou "coroa", podemos permitir X assumir valores 1 se a moeda dá "cara" e 0 se a moeda der "coroa". Assim, se $\Omega = \{cara, coroa\}$, então $X(cara) = 1$ e $X(coroa) = 0$.*

Uma vez que uma variável aleatória assume um valor do seu contradomínio com certa probabilidade, tem-se que as probabilidades são associadas a valores da variável aleatória discreta por uma *função de probabilidade* (f.p.) e as probabilidades são associadas a intervalos de valores de uma variável aleatória contínua por uma *função densidade de probabilidade* (f.d.p.).

Definição 1.16 *A função de probabilidade da variável aleatória X, discreta, representada por $P(X = x) = p(x)$ é uma função tal que para $X(w) \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}, \forall \omega \in \mathcal{F}$, tem-se*

$$p(x_i) \geq 0 \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \tag{1.11}$$

Exemplo 1.15 *Seja, por exemplo o lançamento de um dado equilibrado. Sabe-se que ocorrerá um dos 6 resultados possíveis, mas é impossível adivinhar qual a face que irá sair ao lançar o dado. No quadro seguinte enumeram-se todos os possíveis valores da variável* x*, e a respectiva probabilidade. Este quadro é a função de distribuição de probabilidades uniforme ou retangular de um fenômeno aleatório, já que todos os possíveis valores de* x *têm exatamente a mesma probabilidade (tabela 1.1).*

$x = face$	$P(X = x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

Tabela 1.1: Função distribuição de probabilidade - Lançamento de um dado

Note-se que neste exemplo é possível enumerar todos os valores da variável aleatória, e entre quaisquer dois valores consecutivos da tabela não existe mais nenhum valor intermediário. As variáveis aleatórias deste gênero designam-se por *discretas*. De um modo geral, estas variáveis traduzem contagens de resultados do fenômeno aleatório.

Exemplo 1.16 *Um exemplo menos trivial de uma função de distribuição de probabilidades de natureza discreta é por exemplo a combinação de gens. Sejam Aa os genes que determinam uma dada característica, em indivíduos com reprodução sexuada. Ao dar-se o cruzamento de dois destes indivíduos, os possíveis valores resultantes, e as respectivas probabilidades estão enumerados na seguinte função de distribuição de probabilidades (tabela 1.2)*

$x =$ combinação dos gens	$P(X = x)$
AA	$\frac{1}{4}$
Aa	$\frac{2}{4}$
aa	$\frac{1}{4}$

Tabela 1.2: Função distribuição de probabilidade discreta - Gens

Há, contudo, variáveis aleatórias caracterizadas por terem uma variação *contínua*. É por exemplo o caso da seguinte variável aleatória, definida para quantificar o índice pluviométrico: $x = \{$ *precipitação de chuva em ml* $\}$. Note-se que uma variável deste gênero pode assumir qualquer valor (inteiro ou não), dentro de determinados limites.

Em variáveis deste gênero é impossível enumerar todos os possíveis valores. De um modo geral, e tomando como exemplo o anteriormente apresentado, interessa mais calcular a probabilidade de ocorrência de um índice pluviométrico num dado intervalo, do que calcular propriamente a probabilidade do índice ser rigorosamente igual a um determinado valor. Seria impossível falar que "o índice pluviométrico será 60ml"; o que se pretende dizer com isto é que a precipitação pluviométrica se situa numa vizinhança de 60ml.

Definição 1.17 (Esperança Matemática, Valor Esperado, Valor Médio) *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *um espaço de probabilidade discreto e seja* $X : \Omega \to D$ *uma variável aleatória. Então o "valor esperado" para* X *é*

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in D} xP(x) \tag{1.12}$$

Exemplo 1.17 *Seja o lançamento de um dado equilibrado onde "você" aposta teu próprio dinheiro. Números pares levam à perda de R\$ 10,00 vezes o número mostrado na face de cima, enquanto que números ímpares levam a ganhos de R\$ 12,00 vezes o número mostrado. Qual é a quantidade esperada de dinheiro que você vai ganhar neste jogo?*

Seja $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Então $D = \{12, -20, 36, -40, 60, -60\}$ esses são os valores que você irá ganhar para vários lançamentos do dado. Então o valor esperado de X é:

$$E(X) = (12)\left(\frac{1}{6}\right) + (-20)\left(\frac{1}{6}\right) + (36)\left(\frac{1}{6}\right) + (-40)\left(\frac{1}{6}\right) + (60)\left(\frac{1}{6}\right) + (-60)\left(\frac{1}{6}\right) = -2 \tag{1.13}$$

Será que "você" ainda quer jogar este jogo considerando que o *payoff* (pagamento) esperado é de R$ -2,00?

1.4 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes relaciona as probabilidade de E e F com as respectivas probabilidades condicionadas mútuas.

Definição 1.18 *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *um espaço de probabilidade discreto e suponha* $E, F \in \mathcal{F}$*, então*

$$P(F|E) = P(E|F) \times \frac{P(F)}{P(E)} \tag{1.14}$$

2

Racionalidade e Teoria da Utilidade

Os maiores filósofos e pensadores reconheceram que o comportamento humano é pautado pela incerteza e pelo conhecimento limitado do mundo. Ainda que por vezes a certeza possa ser uma noção conveniente, não há nada que possamos fazer sem estar à deriva do acaso - seja porque nossa ignorância nos cega frente à certeza, seja porque a certeza não passa de uma miragem, fabricada à frente de nossos olhos por um universo incerto. Mas seria este um motivo para alguém se silenciar frente às vicissitudes da vida e contemplar o acaso como um "desígnio inacessível dos deuses"? Fonte: Cusinato, [6])

Talvez não. Uma alternativa seria tentar "compreender" o acaso. E como parte desta compreensão, poderia-se desenvolver uma teoria da decisão capaz de guiar e descrever o comportamento humano. Mas, contrariamente ao que se poderia esperar, não foi um estudioso do comportamento humano que deu partida a esta empreitada intelectual. Precisou um matemático "inventar" a Teoria da Decisão para que o mundo se desse conta de um mundo inexplorado - ainda que nem fosse este seu objetivo. De fato, queria Balise Pascal (1623-1662) apenas convencer alguns amigos de que deveriam tornar-se devotos de Deus, e acabou estabelecendo o primeiro princípio matemático capaz de lidar com a tomada de decisão sob incerteza. Se seus amigos foram convencidos, a história não tem resposta; mas que ele transformou o acaso, um "desígnio dos deuses", em uma matéria mundana, ninguém duvida. Fonte: Cusinato, [6])

Se bem que a obstinação religiosa de Pascal pode ter atrapalhado sua obra matemática, sua religiosidade foi responsável pela formulação da **primeira teoria da decisão** que se tem notícia. Pascal queria responder a indagação sobre se deveríamos ou não ser devotos a Deus. Talvez, em uma situação como esta, muitos responderiam associando ao fato de Deus existir ou não. Se bem que sua obstinação religiosa pode ter atrapalhado sua obra matemática, sua religiosidade foi responsável pela formulação da primeira teoria da decisão que se tem notícia. Pascal queria responder a indagação sobre se deveríamos ou não ser devotos a Deus. Talvez, em uma situação como esta, muitos responderiam associando ao fato de Deus existir ou não.

Anos mais tarde, em 1783, quando o primeiro princípio matemático pareceu falhar, outro matemático entrou em cena (Daniel Bernoulli) e deu origem à "hipótese da utilidade esperada", concebendo a teoria da decisão mais influente de todos os tempos: a teoria da utilidade esperada (UE).

O processo de tomada de decisão muitas vezes é intuitivo. No entanto, quando estas decisões são de fundamental importância para a sobrevivência de uma organização em um setor competitivo da economia, é necessário que ela disponha de um ferramental quantitativo de suporte a decisões.

O maior objetivo da Teoria da Decisão é de tentar minimizar a subjetividade e a componente intuitiva intrínseca neste processo, através de valores consistentes e lógicos que subsidiem uma ação racional dos decisores.

Atualmente, os gerentes têm sustentado deterministicamente suas decisões de forma científica e racional. Este método decisório se baseia na determinação de probabilidades associadas a cada evento possível, na valoração de cada um deles e, finalmente, na definição quantitativa da melhor estratégia a ser seguida. Portanto, o agente decisório se defronta com uma realidade da qual ele não tem domínio completo, isto é, há o envolvimento de incertezas que são representadas pelas probabilidades.

2.1 Decisão Simples

Suponhamos que estamos confrontados com o problema de tomar uma decisão. Uma abordagem para o problema poderia ser a de determinar o resultado desejado e então se comportar de uma forma que leva a esse resultado. Isso deixa em aberto a questão de saber se é sempre possível alcançar o resultado desejado. Uma abordagem alternativa é elaborar um conjunto de ações (lista das ações) disponíveis e determinar o resultado de cada dessas possibilidades de comportamentos. Um destes resultados é o preferido porque é o único que maximiza algo de valor (por exemplo, a quantidade de dinheiro recebido). A ação que leva ao resultado desejado é, então, escolhida a partir do conjunto. Esta segunda abordagem é chamada de tomada da decisão ótima [[19], 2007].

Encontrar o máximo de algo é um procedimento familiar no cálculo básico. Supondo que estamos interessados em encontrar o máximo de alguma função $f(x)$. Deriva-se f e faz-se $f'(x) = 0$. A solução desta equação dá um ou mais valores de x em que um máximo (mínimo) é atingido, que poderíamos chamar de x^*. O valor máximo (mínimo) da função é, então, $f(x^*)$. Deve-se verificar o valor da segunda derivada de f para ter certeza de que $f(x^*)$ é realmente um máximo (mínimo).

Exemplo 2.1 *Seja a função* $f(x) = 10x - 2x^2$*. Se esta função for definida* $\forall x \in (-\infty, \infty)$

então $x^* = \frac{5}{2}$ *é ponto de máximo de* $f(x)$*. Entretanto, se a função for definida somente para* $x \in [1, 2]$*, o valor máximo de* $f(x)$ *ocorre em* $x^* = 2$

Exemplo 2.2 *Sejam* a*,* b *e* c *constantes não negativas, com* $b > 0$*. Seja*

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{b}), & se\ 0 \leq x \leq b \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases} \tag{2.1}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x \leq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$\max h(x) = a \times f(x) - c \times g(x)$

Muitas vezes interessa o valor de x em que o máximo é alcançado em vez do valor máximo da função em si, de modo que será introduzido o símbolo arg max.

Definição 2.1 *Suponha que* x *é um elemento arbitrário de um conjunto* X*. Seja* $f(x)$ *definida* $\forall x \in X$*. Então o símbolo* arg max *é definido pelas seguintes equivalência.*

$$x^* \in \arg\max_{x \in X} f(x) \Longleftrightarrow f(x^*) = \max_{x \in X} f(x). \tag{2.3}$$

Exemplo 2.3 *Seja* $f(x) = 1 + 6x - x^2$ *definida* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Encontre* $\arg\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

Isto é, x^* é um valor que maximiza a função $f(x)$. Note que não se escreveu $x^* = \arg\max_{x \in X} f(x)$ porque uma função pode assumir o valor máximo em mais de um elemento no conjunto X. Como o símbolo arg max retorna um conjunto de valores, em vez de um valor único, ele é uma correspondência e não uma função.

O caso mais simples a considerar é quando não há aleatoriedade no ambiente - uma vez que a escolha tenha sido feita, o resultado é certo. Para começar a dar a noção de uma teoria das decisões ótimas, construímos as seguintes definições.

Definição 2.2 *A escolha do comportamento em um problema de decisão simples é chamada de "ação". O conjunto de ações alternativas disponíveis será denotado por* A*. O conjunto* A *poderá ser discreto, por exemplo,* $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$*, ou contínuo, por exemplo, o intervalo unitário* $[0, 1]$*.*

Definição 2.3 *O* **payoff** *(recompensa) é uma função $\pi : A \to \mathbb{R}$ que associa um valor numérico a cada ação $a \in A$.*

Definição 2.4 *Uma ação a^* é uma ação ótima se*

$$\pi(a^*) \geq \pi(a), \qquad \forall a \in A \tag{2.4}$$

ou equivalentemente

$$a^* \in \arg\max_{a \in A} \pi(a) \tag{2.5}$$

Ou seja, a decisão ótima é escolher um $a^* \in A$ que maximiza o *payoff* $\pi(a)$. Em geral, a^* não precisa ser a escolha de uma única ação: se duas ações levarem ao mesmo *payoff* maximal, então, tanto faz qual for escolhida.

Exemplo 2.4 *A um candidato a emprego são oferecidos dois empregos, E_1 e E_2. Suas ações possíveis são $a_i = aceitar E_i$ com $i = 1, 2$. Os payoffs são os salários oferecidos: E_1 paga R\$ 15.000,00, E_2 paga R\$ 17.000,00 ao ano. Como $\pi(a_1) = 15.000$ e $\pi(a_2) = 17.000$, a decisão ideal é $a^* = a_2$ (isto é, o candidato deve aceitar o segundo emprego).*

Exemplo 2.5 *Um investidor pretende investir R\$ 10.000,00 por um ano em títulos do Tesouro Direto, e restringiu a escolha a um de dois títulos. Os dois títulos diferem apenas na taxa de retorno: o primeiro paga 6% ao ano, e o segundo 3% a cada seis meses. Que fundo o investidor deve escolher?*

Nos exemplos anteriores, as decisões ótimas não são alteradas se os pagamentos são expressos em reais (R\$) ou qualquer outra moeda; nem são alteradas se R\$ 1.000,00 é adicionado a cada *payoff*. Essas alterações nos *payoffs* são exemplos de transformações afins.

Definição 2.5 *Uma* **transformação afim** *muda os payoffs $\pi(a)$ em payoffs $\pi'(a)$ de acordo com a regra*

$$\pi'(a) = \alpha\pi(a) + \beta \tag{2.6}$$

onde α e β são constantes independentes de a e $\alpha > 0$.

Teorema 2.6 *A ação ótima mantem-se inalterada se os payoffs forem alterados por uma transformação afim.*

Em alguns problemas, o conjunto de ações é um subconjunto contínuo de $\mathbb{R}$. Esta abordagem pode ser conveniente para modelos em que um conjunto de ações discretas tem um grande número de elementos. Por exemplo, se estamos vendendo alguma coisa, pode-se querer considerar preços entre R\$ 0,01 e R\$ 5,00. Porque só podemos impor/cobrar preços em moedas de um centavo, e portanto o conjunto de ações é discreto. Mas, ao invés de considerar as consequências de 500 ações separadas, tratamos de preços contínuos e empregamos os recursos poderosos de cálculo para resolver o problema.

Exemplo 2.6 *A firma Lyzandra produz macarrão integral. Se ela cobra um preço de p R\$ por quilo, então o mercado vai comprar $Q(p)$ quilos, onde*

$$Q(p) = \begin{cases} Q_o(1 - \frac{p}{p_o}), & se\ p < p_o \\ 0, & se\ p \geq p_o \end{cases} \tag{2.7}$$

$Q(p)$ é uma função não crescente. Q_o é uma constante que dá a quantidade máxima que poderia ser vendida, e p_o é uma constante que é o preço máximo que o mercado estaria disposto a pagar. As ações disponíveis para a empresa são a escolha de um preço $p \in [0, p_o]$. Não adianta estabelecer um preço acima p_o porque a empresa não iria vender macarrão. Suponhamos que o custo de produção do macarrão seja c R\$ por quilo. Tomando o lucro da empresa como seu *payyof*, temos $\pi(p) = (p - c)Q(p)$. A decisão ótima é definir um preço p^* que maximiza o lucro. Para encontrar este preço, devemos determinar o *payoff* máximo como uma função de preço. Como

$$\frac{d\pi}{dp}(p^*) = Q_o\left(1 + \frac{c}{p_o} - \frac{2p^*}{p_o}\right) = 0 \tag{2.8}$$

então a ação ótima é, portanto, escolher um preço $p^* = \frac{1}{2}(p_0 + c)$.

Até o momento, assumimos que **não há incerteza** sobre as consequências de qualquer decisão. Se não houver certeza, podemos comparar o resultado esperado (no sentido probabilístico) para cada ação. Incerteza sobre *payoffs* podem ser representado como uma variável aleatória, X, que assume certos valores correspondendo a possíveis "estados da natureza" (por exemplo, condições econômicas) com probabilidades especificadas. Vamos denotar o conjunto de "estados da natureza" por X e a probabilidade com que um determinado estado x ocorrer será denotada por $P(X = x)$. Se o *payoff* associado a uma ação quando o estado de natureza é x é $\pi(a|x)$, então o *payoff*, por adotar uma ação a, é

$$\pi(a) = \sum_{x \in X} \pi(a|x) P(X = x) \tag{2.9}$$

e uma ação ótima é

$$a^* \in \arg\max_{a \in A} \sum_{x \in X} \pi(a|x) P(X = x) \tag{2.10}$$

Na teoria dos jogos há o pressuposto de racionalidade. Há também uma hipótese de maximização. Supõe-se que os jogadores dentro do jogo são racionais e vão se esforçar para maximizar seus retornos no jogo.

Segundo Levent [9], a economia, a sociologia, a psicologia e as ciências políticas estão dedicadas a estudar o comportamento humano em diferentes domínios da vida social. No entanto, em muitos casos, eles tratam os indivíduos isoladamente, por conveniência. Em outras palavras, eles assumem que para entender o comportamento de um indivíduo, é seguro supor que seu comportamento não tem um efeito significativo sobre outros indivíduos. Em alguns casos, e dependendo da questão levantada, esta suposição pode ser justificada. Por exemplo, que um pequeno agricultor em um mercado local, digamos, em Maringá, não irá influenciar os preços do trigo a nível mundial. Da mesma forma, provavelmente "meu voto vai mudar o resultado das eleições presidenciais brasileiras" é significativamente pequena. Então, se estamos interessados no preço mundial de trigo ou o resultado das eleições presidenciais, nós podemos seguramente assumir que um indivíduo age como se seu comportamento não afetará o resultado.

Em muitos casos, no entanto, esta suposição pode levar a conclusões erradas. Por exemplo, o quanto o nosso agricultor de Maringá precifica o trigo, em comparação com os outros agricultores em Maringá, certamente afeta o quanto ele e outros agricultores venderão. Se o nosso agricultor define um preço menor do que os preços fixados pelos outros agricultores no mercado local, ele irá vender mais que os outros, e vice-versa. Portanto, se assumirmos que eles determinam os seus preços sem levar em conta este efeito, provavelmente não chegaremos perto de entender seu comportamento. Da mesma forma, o voto de um indivíduo pode mudar radicalmente o resultado das votações em comunidades pequenas.

O objeto da teoria dos jogos são exatamente essas interações entre grupos de indivíduos (ou governos, empresas, etc) onde as ações de cada indivíduo têm um efeito sobre o resultado que é do interesse de todos. Na teoria dos jogos, a maneira que os indivíduos agem tem que ser estratégico, ou seja, eles devem estar cientes do fato de que suas ações afetam os outros. Portanto, dizemos que a teoria dos jogos estuda a *interação estratégica* entre um grupo de indivíduos. Por interação estratégica, queremos dizer que as pessoas sabem que as suas ações terão um efeito sobre o resultado e agem de acordo.

Tendo determinado os tipos de situações que a teoria dos jogos lida, temos que discutir agora como ela analisa essas situações. Como qualquer outra teoria, o objetivo da teoria dos jogos é organizar o nosso conhecimento e aumentar a nossa compreensão do mundo exterior. Uma teoria científica tenta abstrair os aspectos mais essenciais de uma dada situação, analisá-los utilizando determinadas premissas e procedimentos, e no final derivar alguns princípios gerais e previsões que podem ser aplicadas a casos individuais.

Para que tenha qualquer poder de previsão, a teoria dos jogos tem de postular regras segundo as quais os indivíduos agem. Se não descrever como os indivíduos se comportam, quais são seus objetivos e como eles tentam alcançar esses objetivos, então não podemos derivar qualquer previsão como um todo em uma dada situação. Por exemplo, pode-se obter previsões completamente diferentes sobre o preço do trigo no mercado local se for suposto que os agricultores simplesmente jogam uma moeda e escolhem entre R$ 0,50 e R$ 1,00 por quilo em comparação quando se supõe que eles tentam ganhar dinheiro tanto quanto possível. Portanto, precisamos impor certa disciplina para a análise e será necessário introduzir uma estrutura em termos das regras do jogo.

Para estudarmos como os jogadores tomam as suas decisões, temos de considerar as preferências desses jogadores, pois essas preferências é que irão nortear as escolhas dos mesmos. Utilizaremos aqui a teoria da escolha racional, que assume como um princípio básico a ideia de que os jogadores são racionais.

Suponha que você seja abordado por um filantropo rico que lhe oferece duas opções:

1. um ganho certo de R$ 1,00; ou;
2. jogar uma moeda para cima: no caso do resultado ser cara você ganha R$ 3,00; se for coroa você não ganha dinheiro algum.

Assim, neste jogo tem-se a opção do ganho certo de R$ 1,00 e a opção de uma “loteria” com 50% de chance de ganhar R$ 3,00 e 50% de chance de não ganhar nada. Você escolheria o ganho certo ou a aposta? A sua escolha seria outra caso os montantes envolvidos fossem R$ 1.000.000,00 e R$ 3.000.000,00?

Caso este jogo fosse repetido diversas vezes, o resultado para a primeira opção seria de R$ 1,00 a cada vez, gerando um retorno médio de R$ 1,00. Para a segunda opção, a expectativa seria obter em metade das vezes o resultado “cara” e na outra metade o resultado ”coroa”. Desta forma, em 50% das vezes você teria um ganho de R$ 3,00 e em 50% um retorno de R$ 0,00. Assim, o valor monetário esperado (VME) seria R$ $3,00 \times 50\%$ + R$ $0,00 \times 50\% = R\$1,50$.

Ao compararmos os resultados das duas alternativas, caso o seu interesse fosse maximizar o resultado (ganho) esperado, você deveria escolher a segunda opção. Entretanto, para esta análise considerou-se que o jogo seria repetido diversas vezes, o que nem sempre seria verdade.

Agora, se existisse a possibilidade de jogar apenas uma vez, as suas prioridades poderiam ser outras. Para valores pequenos, você poderia estar disposto a assumir maiores riscos e escolher pela segunda opção, mas no caso de valores maiores não necessariamente você estaria disposto a arriscar. Ou seja, talvez fosse mais útil a você (ou para algum de seus colegas) aceitar a primeira opção e garantir R$ 1.000.000,00 do que arriscar ganhar R$ 3.000.000,00 e acabar recebendo nada.

Caso a sua preferência seja a primeira alternativa, será dito em teoria dos jogos que essa possui maior utilidade do que a segunda. Você poderia, por exemplo, atribuir um valor de utilidade 8 para a primeira opção e 5 para a segunda. No decorrer do texto, estaremos interessados em buscar alternativas que maximizem a utilidade.

Exemplo 2.7 *Quando é vendida uma apólice de seguros, a empresa avalia as probabilidades de vários pagamentos. A partir disso, calcula a sua perda esperada P. Nesta perda acrescenta seu lucro L e propõe ao cliente $C = P+L$. Supondo que o cliente concorda com a empresa em relação a perda esperada P, por que comprar o seguro (dado que $C > P$)?*

Neste exemplo, cada contrato da seguradora com um cliente é um jogo. Assim, a seguradora está jogando diversas vezes o mesmo jogo, enquanto cada cliente está jogando apenas uma vez. Para exemplificar isso de forma mais detalhada, consideraremos o caso em que a seguradora está vendendo o serviço de seguro de um carro para cem pessoas diferentes (considerando que todos os carros possuem as mesmas características de ano, modelo e perfil do segurado), sendo você uma delas.

A seguradora, com base em estudos internos, estima que ocorrerão sinistros em 10 destes carros e o valor médio para cada sinistro será de R$ 6.500,00, implicando em uma perda total de R$ 65.000,00 e uma perda média $P = 65.000,00/100 = 650,00$. Como a seguradora que obter também um lucro (L) de R$ 250,00 por carro segurado, ela estipula o preço do seguro em R$ 900,00.

Nesta situação, você como cliente poderia estar disposto a pagar o valor do seguro para não precisar ter que pagar um valor maior em caso de sinistro com o seu carro. Um exemplo seria de que você tem a disponibilidade de pagar R$ 900,00, mas não teria a possibilidade de pagar R$ 6.500,00 no caso do sinistro.

Com base no exposto, notamos que os desejos de um indivíduo levam a um ranking de resultados em termos de sua preferência. Estas preferências não precisam estar de acordo com aquelas de outros agentes; contudo, elas devem ser internamente consistentes em relação aos resultados pretendidos.

Suponha que temos um conjunto de possíveis ações (por exemplo, comer um hambúrguer ou comer uma salada). Quando perguntadas, as pessoas vão expressar preferências sobre essas ações. Estas preferências não são necessariamente a mesma para todos pessoas: alguns podem preferir a salada, enquanto outros preferem o hambúrguer. Dada a liberdade de escolha, as pessoas devem escolher sua ação preferida. (No momento vamos supor que não há incerteza sobre a consequência de uma escolha: escolher agir de uma maneira particular, definitivamente leva ao resultado desejado.) Qualquer pessoa que realmente prefere o hambúrguer, mas opta por comer uma salada estaria agindo "irracionalmente". Alguém que diz que prefere o hambúrguer, mas depois escolhe comer uma salada porque está seguindo uma dieta pois não manifestou as suas verdadeiras preferências porque não incluiu, por exemplo, o desejo de perder peso.

Seja o conjunto de resultados possíveis denotado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$. Vamos escrever $\omega_1 \succ \omega_2$ se um indivíduo prefere estritamente o resultado ω_1 ao invés do resultado ω_2. Vamos escrever $\omega_1 \sim \omega_2$ se um indivíduo é indiferente entre os dois resultados. Preferência fraca será expressa pelo operador $\succeq$. A expressão $\omega_1 \succeq \omega_2$ significa que um indivíduo ou prefere ω_1 a ω_2 ou é indiferente entre o dois resultados.

O leitor não deve confundir a relação binária $\succeq$ ("ao menos tão bom quanto") com a relação binária $\geq$? ("maior ou igual"). Em primeiro lugar, porque as duas relações dizem respeito a comparações de natureza distinta. A relação $\geq$ diz respeito à comparação de uma mesma dimensão (litro, idade, ganhos, etc). Não faz sentido algum, portanto dizer que um índice pluviométrico de $40ml$ é maior ou igual a 24_oC. Já a relação $\succeq$, ao representar preferências, pode obviamente admitir que sejam comparados elementos de dimensões totalmente distintas. Pode ser que para um agricultor $40ml$ de chuva seja ao menos tão bom quanto 3 dias nublados.

Agora estamos em condições de especificar com maior precisão o que significa afirmar que os jogadores são racionais. Os jogadores são ditos racionais, em teoria dos jogos, significa dizer que suas preferências são racionais.

Definição 2.7 *Um indivíduo será chamado "racional sob certeza" se as suas preferências em relação aos resultados satisfazem as seguintes condições:*

1. **(Complementariedade)** *Ou* $\omega_1 \succeq \omega_2$ *ou* $\omega_2 \succeq \omega_1$
2. **(Transitividade)** *Se* $\omega_1 \succeq \omega_2$ *e* $\omega_2 \succeq \omega_3$ *então* $\omega_1 \succeq \omega_3$

Ambos os axiomas garantem que todas as escolhas podem ser ordenadas em uma única cadeia sem lacunas (Axioma 1) e sem ciclos (axioma 2).

A condição de complementariedade assegura que todos os resultados podem ser comparados um com o outro. A condição de transitividade implica que os resultados podem ser listados em ordem de preferência (possivelmente com “empates”’ entre alguns resultados).

Exemplo 2.8 *Suponha as opções de pacotes de viagens, com os seguintes destinos:*

- *A: Disney*
- *B: Nova York*
- *C: Las Vegas*

Neste contexto, imagine um jogador que prefere o destino A a B, B a C, mas prefere C a A, de forma que suas preferências são não transitivas. Este jogador será chamado de jogador 1. Imagine agora algum outro jogador, denominado jogador 2, que saiba que as preferências do jogador 1 são não transitivas e decida explorá-lo. O que o jogador 2 faria? Você talvez já tenha adivinhado!

1^a **Opção**: Se o jogador 1 possuir C (pacote para Las Vegas), que ele menos prefere em relação a B, o jogador 2 poderia oferecer a troca de C por B (Nova York). Depois, o jogador 2 poderia propor a 1 a troca de B por A (Disney). Mas, como o jogador 1 prefere C a A, ele aceitará trocar com o jogador 2, a opção A e mais uma pequena soma em dinheiro, por C. E então o jogador 1 terminaria com C (opção que ele começou o jogo), menos uma pequena quantidade de dinheiro.

2^a **Opção**: Se o jogador 2 for suficientemente paciente para repetir o mesmo ciclo tantas quantas forem necessárias, o jogador 1 acabará sem nenhum dinheiro. Daí o apelido que este tipo de situação ganhou na literatura: ”bomba de dinheiro” (FIANI, 2006).

Juntas, essas condições (complementariedade e transitividade), implicam que podemos introduzir a ideia de uma *função utilidade*. Será assumido que um indivíduo tem uma função utilidade $u(\omega)$ pessoal, que dá a utilidade para qualquer resultado ω. O resultado ω pode ser numérico (por exemplo, uma quantia em dinheiro ou um número de dias de férias) ou menos tangíveis (por exemplo, grau de felicidade). Qualquer que seja a recompensa, a função utilidade atribui um número à recompensa e abrange tudo que é importante para o indivíduo em relação a um resultado.

Imagine que um tomador de decisão enfrenta uma escolha entre um número de alternativas que apresentam riscos. Cada alternativa pode resultar em um número possível de resultados, mas quais desses resultados vai ocorrer é incerto no momento em que a escolha seja feita. Consideremos o que acontece quando uma ação não produz um resultado definitivo e em vez disso, permitir que cada resultado ocorra com uma probabilidade conhecida. Tais resultados incertos serão chamados de “loterias”.

2.2 Tomada de decisão sob incerteza e Função Utilidade

A decisão é uma escolha entre duas ou mais ações. Tomada de decisão sob incerteza é o ato de escolher entre duas ou mais ações quando os resultados dessas ações são incertos. A Figura XXXX apresenta a árvore de decisão, um diagrama que ajuda a estruturar a decisão quando as incertezas estão presentes. Esta decisão é entre "algo certo" [A1] e uma loteria [A2]. As recompensa "certa" é garantida, x1, enquanto o resultado da loteria é incerto. Na loteria, o indivíduo se depara com a chance de receber uma recompensa maior com probabilidade p ou nenhuma recompensa com probabilidade $1 - p$. O valor esperado de uma loteria é a soma ponderada entre as probabilidades e os resultados possíveis: $E[A2] = pX2 + (1 - p)x3$.[1]

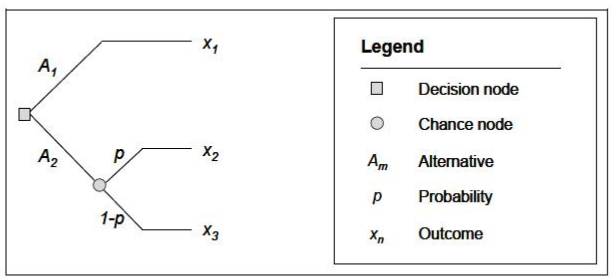

Figura 2.1: Fonte: Schultz et. al. [16] - Uma árvore de decisão mostrando duas alternativas e três resultados. Esta figura ilustra uma escolha entre A1, que tem um certo resultado, x1, e A2, uma lotaria, que tem um dos dois resultados possíveis, x2, o que ocorre com probabilidade p, ou x3, que ocorre com probabilidade $1 - p$.

As pessoas que tomam uma decisão analisam alternativas segundo um dentre três conjuntos de condições. Sob condições de certeza, o tomador de decisão conhece de antemão o resultado das decisões. Sob condições de risco, o tomador de decisão utiliza a experiência pessoal ou informações secundárias para calcular a probabilidade de alternativas ou resultados. Uma abordagem racional para avaliar alternativas sob condições de risco é a do valor esperado, um conceito que permite aos tomadores de decisão atribuir um valor monetário às consequências positivas ou negativas que resultariam da seleção de uma alternativa viável. Se os tomadores de decisão não dispõem de informações suficientes para selecionar alternativas claras ou calcular seu risco, precisam tomar decisões sob condições de incerteza. Para fazer isso, devem recorrer à intuição e à criatividade.

A teoria de utilidade de von Neumann-Morgenstern (veja mais adiante) apresenta uma

[1] Esta escolha é ilustrado na Figura 3. Um indivíduo é obrigado a escolher entre um resultado garantido, x1 ¿ 0, e uma loteria que tem um resultado de qualquer x2 = 0 com probabilidade p ou x3 com probabilidade $1 - p$. Se x3 e p são escolhidos de modo que o valor esperado da lotaria é igual a x1, a maioria dos indivíduos escolhe o item "coiso" em relação a lotaria.

forma analítica de comparação e de representação de preferências entre variáveis aleatórias (v.a.). Neste trabalho, as v.a.'s são representadas por um conjunto de resultados de uma "loteria", ou jogo, e comparados segundo o valor esperado da utilidade. Desta maneira, se um agente tomador de decisão diz que uma determinada v.a. é preferível frente a outra, então, o valor esperado da utilidade desta primeira deverá ser maior que o da segunda.

Um lotaria simples, λ, é um conjunto de probabilidades das ocorrências de cada $\omega \in \Omega$. Iremos denotar a probabilidade da ocorrência do resultado ω na loteria por $p(\omega|\lambda)$. O conjunto de todas as loterias possíveis será denotada por Λ.

Exemplo 2.9 *Por exemplo, seja a loteria simples* $\lambda = (0,5; 0,2; 0,3)$. *Se, por exemplo,* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *for igual a* $\{0, 50, 200\}$, *isto significa que esta loteria fornece um prêmio de $0 com probabilidade 0,5; um prêmio de $50,00 com probabilidade 0,2 e um prêmio de $200,00 com probabilidade 0,3.*

Para efetuar nossas análises, iremos supor que as preferências são *monotônicas* - ou seja, "mais dinheiro é preferível a menos". Isto é também chamado de *monotonicidade* das preferências. Assim, por exemplo, um tomador de decisão preferirá uma loteria simples que forneça $ 15,00 com probabilidade 1 à outra que forneça $10,00 com probabilidade 1.

Definição 2.8 (Loteria Simples) *Uma loteria simples* λ *é definida como o conjunto* $\lambda = \{(\omega_1, p_1); (\omega_2; p_2); ...(\omega_n; p_n)\}$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n=1} p_i = 1, 0 \leq p_i \leq 1 \tag{2.11}$$

Em uma loteria simples o resultado ω_i ocorre com probabilidade p_i.

Definição 2.9 (Loteria Degenerada) *Dizemos que a loteria* λ *é degenerada se* $p_i = 1$ *para algum* i, *isto é,* λ *equivale a um resultado com certeza.*

Portanto, uma loteria não-degenerada corresponde a uma situação onde não existe resultado certo.

Chamaremos o vetor p (as distribuições de probabilidade) também de loteria. Em palavras mais simples, λ é o conjunto de resultados e p é o conjunto de probabilidades associadas a ocorrência de cada resultado possível. Todas estas probabilidades devem ser não-negativas e a soma delas deve ser igual a 1.

Exemplo 2.10 *Parabéns! Você está em "The Price is Right"! Você irá jogar "Temptation". Neste jogo, lhe serão oferecidos quatro prêmios e serão dados seus valores em dólar. A partir dos valores em dólares, deve então ser formado o preço de um carro. Uma vez que são mostrados todos os prêmios (e construído um palpite para o preço do carro), você deve fazer uma escolha entre ficar com os prêmios e deixar o jogo, ou ficar na torcida de que tenha escolhido os números certos na formação do preço do carro.*

Neste exemplo, há duas loterias: a opção dos prêmios e a opção do carro. A opção do prêmio contém um único prêmio, composto pelos diversos itens que você já viu; denotemos esta por ω_1. Esta loteria é $\{(\omega_1, p_1)$ onde $\P(\omega_1) = 1$. A opção do carro contém dois prêmios: o carro (ω_2), e o prêmio nulo ω_0 (onde você sairá com nada). Dependendo da dinâmica do jogo, este tem de lotaria forma: $\{(\omega_1, p); (\omega_2; (1-p))\}$ $p \in (0,1)$ e depende da natureza dos preços dos prêmios em A_1, que foram utilizados para construir a estimativa para o preço do carro.

Exemplo 2.11 *Suponha que você está participando de um jogo, em que você pode escolher entre lançar um dado ou jogar uma moeda. Se você lançar o dado e encontrar um número inferior a 3, você recebe R\$ 120,00, caso contrário, recebe nada. Se você optar por jogar a moeda e obtiver "cara", você recebe R\$ 100, 00, caso contrário, recebe nada. Neste dilema, o conjunto de resultados possíveis é* $\Omega = \{0, 100, 120\}$.

O lançamento do dado envolve uma distribuição de probabilidade (loteria), que atribui o resultado R\$ 0,00 com probabilidade igual a 2/3, e o resultado R\$ 120,00 com probabilidade 1/3.

Conforme podemos perceber, para esta loteria há somente dois resultados possíveis, pois o retorno de R\$ 100,00 não está relacionado com o lançamento do dado. Em outras palavras, dizemos que este resultado possui probabilidade nula. Assim, se denotarmos esta loteria por λ_1, temos que $\lambda_1(0) = 2/3$, $\lambda_1(120) = 1/3$, e $\lambda_1(100) = 0$.

Já o lançamento da moeda consiste em uma segunda loteria, que denotaremos por λ_2. Sabendo que os resultados possíveis para esta loteria são R\$ 0,00 e R\$ 100, e que esta moeda é não é viciada, temos $\lambda_2(0) = \lambda_2(100) = 1/2$, e $\lambda_2(120) = 0$.

Uma generalização é permitir que os resultados sejam eles próprios loterias simples. Suponha agora que temos duas distribuições de probabilidade simples, λ_1 e λ_2, e um número $p \in [01]$. Isso pode formar uma nova distribuição de probabilidade, λ_c, chamada **loteria composta**

Definição 2.10 *Uma lotaria composta* λ_c *de duas loterias é uma combinação linear destas duas lotarias simples (do mesmo conjunto* Λ*).*

Exemplo 2.12 *$\lambda_c = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$, com $0 \leq p \leq 1$ é uma loteria composta das loterias λ_1 e λ_2.*

Exemplo 2.13 *Se na situação descrita anteriormente, das loterias λ_1 (lançamento do dado) e λ_2 (lançamento da moeda), a pessoa não pudesse escolher entre jogar o dado ou a moeda, mas tivesse que retirar uma carta de baralho para saber qual dos objetos lançar, estaríamos diante de uma loteria composta.*

Assim, se estabelecêssemos como regra que a retirada de uma figura (valete, dama ou rei) resultaria no lançamento da moeda, e caso contrário, no lançamento do dado, a probabilidade do lançamento do dado seria $p = \frac{3}{13}$, e a probabilidade de lançamento da moeda seria $(1-p) = \frac{10}{13}$.

Exemplo 2.14 *Dois competidores estão jogando um novo jogo chamado "Flip of a Coin!" no qual "Sua vida pode mudar no lançamento de uma moeda!".*

Os competidores entram na rodada escolhendo cara ou coroa. Uma moeda é lançada e ao vencedor é oferecida uma escolha de ganho certo de R$ 1.000,00 ou 10% de chance de ganhar um carro. O perdedor é apresentado a uma loteria em que ele pode sair com nada (e ficar "seco") ou escolher uma loteria na qual há uma chance de 10% de ganhar R$ 1.000 e 90% de que vai cair num tanque de água tingida de azul. A etapa do lançamento da moeda é uma loteria composta de loterias; esta etapa será oferecida aos os concorrentes no final do show.

Exemplo 2.15 *Sejam as loterias $\lambda_1 = \{0,5; 0,2; 0,3\}$ e $\lambda_2 = \{0,1; 0,1; 0,8\}$ e $\lambda = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$, com $p = 0,5$.*

Então, a loteria composta λ_c é tal que fornece a loteria simples λ_1 com probabilidade 0,5 e a loteria simples λ_2. A loteria composta λ_c encontra-se representada na figura

Repare que a probabilidade de obtermos x_1 com esta loteria composta é a probabilidade de x_1 acabar sendo sorteado por meio da loteria λ_1, $0,5 \times 0,5 = 0,25$, mais a probabilidade de x_1 acabar sendo sorteado por meio da loteria simples λ_2, $0,5 \times 0,1 = 0,05$, ou seja, $0,25 + 0,05$, que é igual a 0,3. Da mesma maneira, a probabilidade de obtermos x_2 é $0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,1 = 0,15$ e a probabilidade de obtermos x_3 é $0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,8 = 0,55$.

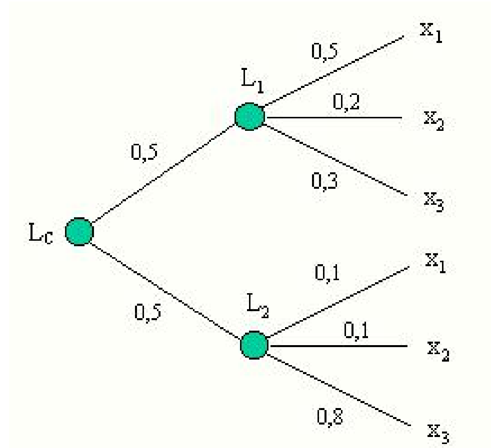

Figura 2.2: Fonte: Cusinato [6] - Representação de uma loteria composta.

Definição 2.11 (Generalização da Definição 2.10) *Dadas K loterias λ_i e probabilidades $p_i, p_i \geq 0$, onde $\sum_{i=1}^{K} r_i = 1$, a* **loteria composta** *r é dada por*

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda_i \tag{2.12}$$

Definição 2.12 (Loteria Reduzida) *É uma loteria simples λ_r que associa a cada resultado $\omega_i in \Omega$ a mesma probabilidade que uma loteria composta λ_c*

Exemplo 2.16 *Sejam $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\lambda_1 = \{p, (1-p)\}$ e $\lambda_2 = \{q, (1-q)\}$.*

Se a loteria simples λ_1 é selecionada com probabilidade r e a loteria simples λ_2 é selecionada com probabilidade $(1-r)$, então a loteria composta correspondente é $\lambda_c = \lambda_1 r + \lambda_2(1-r)$ e a loteria reduzida λ_r é $\lambda_r = \{(\omega_1, rp+(1-r)q); (\omega_2, r(1-p)+(1-r)(1-q))\}$.

Mais adiante veremos que quando um jogador escolhe entre suas estratégias mas muitas vezes não tem certeza quanto às consequências, pois ele não sabe quais estratégias os outros jogadores escolheram. Então, para analisarmos as decisões dos jogadores em um jogo, seria útil termos uma teoria de tomada de decisão, que nos permita expressar as preferências de um agente sobre suas escolhas, as quais têm consequências incertas, em decorrência da posição dos demais.

2.3 Axiomas de Von Neumann-Morgenstern

Von Neumann[2] e Morgenstern[3] perceberam que era necessário um instrumental teórico capaz de lidar tanto com loterias simples como com loterias compostas. Porém, uma teoria que lidasse diretamente com loterias compostas geraria uma série de complicações que seriam mais difíceis de tratar. Por outro lado, a loteria composta é um conceito importante - uma parte significativa dos fenômenos econômicos do mundo real não correspondem a loterias simples. A solução que Von Neumann e Morgenstern apresentaram, bastante profícua, foi o axioma do conseqüencialismo

Toda loteria composta pode ser reduzida a uma loteria simples. Porém, a princípio, isto não significa que elas sejam intercambiáveis; isto é, que elas sejam equivalentes para o tomador de decisão. O papel do axioma do conseqüencialismo é exatamente impor a equivalência entre a loteria composta e a sua reduzida.

Teorema 2.13 (Axioma do Consequencialismo) *Sejam K loterias λ_i e probabilidades $r_i, r_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{K} r_i = 1$. Se λ_r é loteria reduzida da loteria composta λ_c, então $\lambda_r \sim \lambda_c$*

Pelo axioma do "consequencialismo" só as loterias reduzidas são relevantes para o indivíduo, ou seja, a probabilidade efetiva de um resultado é o que importa e não a maneira como esse resultado pode vir a se realizar. Para aficionados por jogos de azar o axioma do "consequencialismo" não é plausível.

O principal axioma proposto por von Neumann e Morgenstern foi o conseqüencialismo, no qual loterias (jogos envolvendo probabilidade) compostas seriam transformadas

[2] John Von Neumann era matemático e sua contribuição à teoria da utilidade esperada representa apenas uma pequena parte de suas realizações em diferentes áreas do conhecimento. Johnny, como era conhecido, escreveu uma importante obra de física matemática na área da mecânica quântica; desempenhou um papel relevante no desenvolvimento da primeira bomba atômica norte-americana; inventou o computador digital e criou a teoria dos jogos; deu contribuições originais nas áreas de lógica matemática, matemática pura, biologia evolucionária, cibernética, turbulência, teoria da guerra e do conflito, vida artificial e teoria da auto-reprodução. Von Neumann era capaz de multiplicar, de cabeça, números de oito dígitos por oito dígitos. Certa vez, o físico laureado com o prêmio nobel, Eugene Wigner, teria dito: "existem dois tipos de pessoas no mundo: Johnny Von Neumann e o resto de nós". O físico Hans Bethe foi mais longe ainda e imaginou se seu cérebro "não indicaria uma espécie superior à do homem". (Fonte: Cusinato [6], pg. 32)

[3] Oskar Morgenstern era economista e, apesar de que seu treinamento matemático não fosse comparável ao de Von Neumann, era um defensor da aplicação da matemática à economia. Morgenstern persuadiu Von Neumann a colaborar com ele em um artigo e a parceria se estendeu por anos, durante a segunda guerra mundial. O resultado foi *Theory of games and economic behavior (1944)*, obra clássica da economia, considerada o marco inicial da teoria dos jogos. (Fonte: Cusinato [6], pg. 32)

e ficariam equivalentes a loterias simples. Desse modo, os agentes econômicos analisam as probabilidades finais ao tomarem decisões, simplificando o processo de escolha.

O axioma do conseqüencialismo afirma que somente a probabilidade sobre os resultados finais é de relevância para o tomador de decisão. Não importa se as loterias são apresentadas em vários estágios ou não (i.e., se são ou não loterias compostas), desde que as probabilidades sobre os resultados finais sejam as mesmas, o tomador de decisão será indiferente entre elas.

Uma questão controversa em relação ao axioma do conseqüencialismo é que ele exclui a possibilidade de alguém obter utilidade com o processo de "sorteio" dos resultados, embora muitos indivíduos apreciem estes processos (corridas de cavalo, bingo, roleta, etc.). Assim, ele é às vezes chamado de axioma *no fun in gambling*. Von Neumann e Morgenstern deram-se conta deste ponto, mas consideraram que este axioma poderia ser considerado plausível e legítimo "a não ser que fosse utilizado um sistema muito mais refinado de psicologia do que o agora disponível para os propósitos da economia" (Von Neumann e Morgenstern, 1944 [1980], p.28) (Fonte: Cusinato, [6]).

A virtude deste axioma é que nos permite evitar a complicação de quantificar a utilidade referente ao processo de "sorteio". Por outro lado, facilita bastante a construção da teoria, já que não precisamos nos preocupar diretamente com as loterias compostas. Como toda loteria composta é redutível a uma loteria simples que, aos olhos do tomador de decisão, são indiferentes entre si, então podemos elaborar uma teoria que trate diretamente apenas das loterias simples; qualquer loteria composta relevante pode ser incluída em sua forma reduzida.

Portanto, seguindo o axioma conseqüencialista, assumiremos que somente as loterias reduzidas sobre os resultados finais são de relevância para o tomador de decisão. Note que toda loteria simples é também a reduzida de si mesma.

Exemplo 2.17 *Seja* $\Omega = \{5, 4, 2\}$ *e sejam as loterias simples* $\lambda_1 = \{(5, 0); (4, 0); (2, 1)\}$, $\lambda_2 = \{(5, 0); (4, 1/2); (2, 1/2)\}$, $\lambda_3 = \{(5, 1); (4, 0); (2, 0)\}$, $\lambda_4 = \{(5, 0); (4, 1/4); (2, 3/4)\}$, $\lambda_5 = \{(5, 1/2); (4, 0); (2, 1/2)\}$.

1. Seja a loteria composta $\lambda_c = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3$. Então $\lambda_r = \{(5, 1/4); (4, 1/8); (2, 5/8)\}$.
2. Seja a loteria composta $\lambda_c' = \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5$. Então $\lambda_r' = \{(5, 1/4); (4, 1/8); (2, 5/8)\}$.

Para gerar instrumentos de análise das escolhas dos indivíduos, é necessário impor algum tipo de consistência sobre as suas preferências, de forma que possibilite o tratamento matemático. Von Neumann e Morgenstern impuseram uma consistência através da suposição da racionalidade ou ordenabilidade das preferências.

Definição 2.14 *Um indivíduo será chamado* **racional sob incerteza** *ou simplesmente* **racional** *se suas preferências para loterias satisfazem as seguintes condições:*

1. **(Complementariedade)** *Ou* $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ *ou* $\lambda_2 \succeq \lambda_1$ *ou* $\lambda_2 \sim \lambda_1$
2. **(Transitividade)** *Se* $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ *e* $\lambda_2 \succeq \lambda_3$ *então* $\lambda_1 \succeq \lambda_3$
3. **(Monotonicidade)** *Se* $\lambda_1 \succ \lambda_2$ *e* $q_1 > q_2$ *então* $q_1\lambda_1 + (1-q_1)\lambda_2 \succ q_2\lambda_2 + (1-q_2)\lambda_2$
4. **(Continuidade)** *Se* $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ *e* $\lambda_2 > \lambda_3$ *então existe uma probabilidade* q *tal que* $\lambda_2 \sim q\lambda_2 + (1-q)\lambda_3$
5. **(Independência)** *Se* $\lambda_1 \succ \lambda_2$ *então* $q\lambda_1 + (1-q)\lambda_3 \succ q\lambda_2 + (1-q)\lambda_3$

A condição complementariedade garante que as lotarias pode ser comparadas uma com a outra. Isto é, podemos comparar as duas loterias uma com a outra e sempre seremos capazes de decidir qual é a preferida, ou se eles são equivalentes.

A transitividade exclui a possibilidade de preferências circulares entre sequências de pares de escolha. A condição de transitividade implica que lotarias podem ser listadas em ordem de preferência (possivelmente com empates). Deve-se notar que este pressuposto raramente funciona na vida real. A ideia de que todo mundo tem em sua mente um ranking total de todas as possíveis loterias (ou poderia construir um) é difícil de acreditar. Ignorando que no entanto, problemas muitas vezes surgem com mais frequência com a hipótese de transitividade.

Exemplo 2.18 (Problemas com Transitividade) *Neste exemplo, você deve usar sua imaginação e pensar como um pré-escolar (provavelmente um menino pré-escolar). Suponha que a um pré-escolar sejam apresentadas as seguintes opções (3 loterias com apenas um item): i) uma bola; ii) um bastão; e iii) um giz de cera (com papel).*

Se apresentar a escolha do bastão e do giz de cera, a criança pode escolher o giz de cera (giz de cera são divertidos de usar quando você tem uma boa imaginação). Na apresentação do bastão e da bola, a criança pode escolher o bastão (bastões podem ser transformados em qualquer coisa usando a imaginação). Por outro lado, suponha que sejam apresentados o giz de cera e a bola. Se a criança escolher a bola, então a transitividade é violada. Por que a criança escolheria a bola? Suponha que "a bola não é uma bola", mas a chave final para acesso á última fonte de energia da galáxia! As preferências da criança vão mudar dependendo dos requisitos atuais da sua imaginação, levando a um exemplo simples de um ordenamento intransitivo sobre os itens que ela são apresentados. Isto é evidente quando apenas os itens são apresentados em pares.

A monotonicidade e continuidade permitem afirmar que uma loteria fica melhor bem como a probabilidade de um aumento resultado preferido. A condição de independência implica que as preferências dependem apenas das diferenças entre as loterias; componentes que são iguais pode ser ignoradas.

Já o axioma da continuidade exige que na existência de três loterias, tais que $\lambda_1 \succeq \lambda_2 \succeq \lambda_3$, existe uma probabilidade p tal que as loterias λ_2 e a loteria composta $r = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_3$ são indiferentes.

Segundo Downs, um indivíduo racional se comporta da seguinte forma:

1. ele consegue sempre tomar uma decisão quando confrontando com uma gama de alternativas;
2. ele classifica todas as alternativas diante de si, em ordem de preferência, de tal modo que cada uma é preferida, indiferente ou inferior a cada uma das outras;
3. seu ranking de preferência é transitivo;
4. ele sempre escolhe, dentre todas as alternativas possíveis, aquela que fica em primeiro lugar em seu ranking de preferência; e
5. ele sempre toma a mesma decisão cada vez que é confrontado com as mesmas alternativas. Todos aqueles que tomam decisão racionalmente no nosso modelo inclusive partidos políticos, grupos de interesse e governos mostram as mesmas qualidades.

Suponha que a escolha da ação a produz a loteria $\lambda(a)$. Qual será o *payoff* $\pi(a)$ que um indivíduo racional procurará maximizar? Podemos introduzir uma *função utilidade* para o resultado esperado $\mathbb{E}(\omega)$. Há dois problemas em relação a isto. Primeiro, não está claro o que $\mathbb{E}(\omega)$ significaria para resultados (da loteria) não numéricos. Em segundo lugar, mesmo quando os resultados são numéricos, parece que as pessoas não necessariamente procuram maximizar qualquer função do resultado esperado.

Considere o exemplo do filantropo rico novamente. Se um indivíduo escolhe o jogo dos R$ 3 milhões, então o resultado esperado é de R$ 1.5 milhões. Como as pessoas preferem R$ 1 milhão certo (garantido) ao jogo, parece - se eles estão maximizando algum tipo de "utilidade do resultado esperado" - que a utilidade de R$ 1 milhão é maior do que a utilidade de R$ 1.5 milhões, o que parece ser altamente improvável. Uma alternativa à maximização da "utilidade" do resultado esperado é a maximização da *utilidade esperada*.

John von Neumann e Oscar Morgenstern mostraram que existe uma função utilidade sobre os resultados de tal forma que a utilidade esperada de uma lotaria fornece uma classificação consistente de todas as loterias.

John Von Neumann e Oskar Morgenstern, em sua obra seminal publicada em 1944, *Theory of games and economic behavior*, forneceram a "resposta", elaborando as bases axiomáticas para a teoria da utilidade esperada. Eles mostraram que a maximização da utilidade esperada é logicamente equivalente à hipótese de que o comportamento de escolha satisfaz algumas restrições sob a forma de axiomas. Assim, se estes axiomas são satisfeitos, então é possível construir uma função utilidade esperada que represente as preferências de um indivíduo. A relevância deste resultado é que se estes axiomas são plausíveis, então a hipótese da utilidade esperada também é. E, portanto, pode ser aplicada para modelar o comportamento dos tomadores de decisão. A obra de Von Neumann e Morgestern talvez tenha uma importância incomensurável. Ela lançou as bases modernas para a teoria da utilidade esperada e estabeleceu a teoria dos jogos, abrindo dois novos campos de pesquisa entre os economistas. (Fonte: Cusinato [6]

A definição formal de forma de utilidade esperada é:

Definição 2.15 (Forma de Utilidade Esperada) *Uma função utilidade* $u : \lambda \to \mathbb{R}$ *tem a forma de utilidade esperada* $u(\lambda) = \sum_i p_i u(x_i)$ *se e somente se é linear nas probabilidades; isto é, se e somente se satisfaz a propriedade*

$$u\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \lambda_k\right) = \sum_{k=1}^{K} p_k u(\lambda_k) \tag{2.13}$$

para quaiser K *loterias* λ_k *e probabilidades* $(p_1, p_2, ..., p_K) \geq 0$*, e* $\sum_k p_k = 1$

Veremos agora, o resultado mais importante da teoria da decisão sob incerteza, o chamado **teorema da utilidade esperada** ou **teorema de Von Neumann-Morgenstern**. Este teorema afirma que se as preferências são racionais, contínuas e satisfazem o axioma da independência, então elas são representáveis por uma função utilidade com a forma de utilidade esperada.

Definição 2.16 *Seja* $\succeq$ *uma relação de preferências satisfazendo as propriedades 1-5 (definição 2.14 sobre o conjunto de todas as loterias* Λ *definido sobre os prêmios* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *Além disso, suponhamos que:*

$$\lambda_1 \succeq \lambda_2 \succeq \lambda_3 \succeq ... \succeq \lambda_n \tag{2.14}$$

Então existe uma função $u : \Lambda \to \mathbb{R}$ *é tal que* $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$*:*

$$u(\lambda_1) \geq u(\lambda_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \succeq \lambda_2 \tag{2.15}$$

Uma consequência imediata da última definição é que um indivíduo que é racional sob certeza deve procurar maximizar a sua utilidade.

Exemplo 2.19 *Para exemplificar uma função utilidade será considerada novamente a situação da oferta do filantropo rico. Para que um indivíduo consiga decidir de forma racional qual alternativa escolher, ele deve atribuir valores de utilidade para cada quantia de dinheiro possível. Partindo do princípio que o indivíduo é racional, quanto mais dinheiro ele possuir maior será a utilidade. Logo, a função utilidade deve, neste caso, ser crescente para que ela seja consistente. Um exemplo de função utilidade pode ser:*

$$U(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{92500}\right)^2, & \text{se } x \leq 185.000 \\ \log\left(\dfrac{x}{18,5}\right), & \text{se } x > 185.000 \end{cases} \tag{2.16}$$

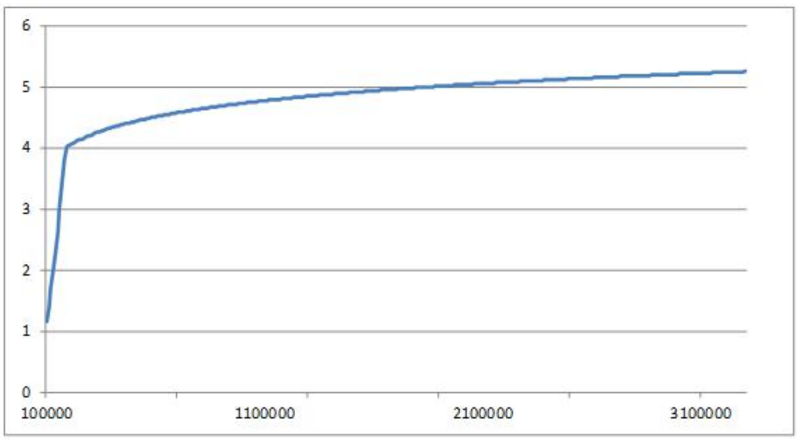

Figura 2.3: Exemplo função Utilidade

A função utilidade não é única. Na verdade, é possível realizar transformações em uma função utilidade de forma que a ordem das preferências não seja alterada. Quando ocorre uma transformação de um conjunto de números em outro, mas preservando a ordem original dos números, ela é dita uma transformação monotônica.

Exemplo 2.20 *Sendo $u(x)$ uma função utilidade consistente e x_1 e x_2 alternativas que possuem respectivamente utilidades $u(x_1)$ e $u(x_2)$. Se $u(x_1) \geq u(x_2)$ e $v(x)$ é uma transformação tal que $v(x) = u(x) + b$, em que b é uma constante, tem-se que:*

$$v(x_1) = u(x_1) + bev(x_2) = u(x_2) + b. \tag{2.17}$$

Como $u(x_1) \geq u(x_2)$, então:

$$v(x_1) = u(x_1) + b \geq u(x_2) + b = v(x_2). \tag{2.18}$$

Logo, a desigualdade $v(x_1) \geq v(x_2)$ é válida, e $v(x)$ também é uma função utilidade consistente.

É importante ainda destacar que qualquer transformação monotônica de uma função utilidade consistente resulta em outra função utilidade também consistente.

A função utilidade será útil quando estivermos trabalhando com *payoff*, pois a relação entre a função utilidade u e a função *payoff* π é simples e direta. Se a escolha da ação a produz um resultado $\omega(a)$, então $\pi(a) = u(\omega(a))$.

Exemplo 2.21 *João ganhou um prêmio numa loja e tem o direito de escolher uma caixa. Ele possui duas caixas a disposição: uma azul e outra amarela. A caixa azul contém uma bola de futebol, enquanto a amarela uma bola de basquete. João define a utilidade de cada bola como o número de colegas na sua sala de aula que praticam cada esporte (15 jogam futebol e 6 basquete).*

Escrevendo esta situação na notação utilizada, tem-se:

a_1 = caixa azul	$\omega(a_1)$=Bola de Futebol	$\pi(a_1) = u(\omega(a_1)) = 15$
a_2 = caixa amarela	$\omega(a_2)$=Bola de Basquete	$\pi(a_2) = u(\omega(a_2)) = 6$

Definição 2.17 *Um tomador de decisão racional que se depara com o problema de tomar uma decisão escolhe um resultado $\omega^* \in \Omega$ que maximiza sua utilidade (ou, equivalentemente, para cada $\omega \in \Omega$, temos $\omega^* \succeq \omega$.*

Observações 2.1 *As condições para a racionalidade expressos na definição 2.14 somente determinam a função utilidade para uma transformação afim (ver Definição 2.5). No entanto, isto não representa um problema, porque a otimalidade de qualquer comportamento não é alterado por uma mudança deste tipo (ver Teorema 2.6).*

A construção explicita de uma função utilidade, que é importante para a elaboração de modelos realísticos do comportamento de um indivíduo é um problema que deve ser resolvido para cada modelo. Durante os próximos capítulos, geralmente será assumido que a maximização do VME é apropriada, sendo especificados os casos de utilização de alguma outra função utilidade. Ainda, em determinados casos, consideraremos situações completamente abstratas, nas quais o *payoff* de um indivíduo será especificado em "unidades de utilidade", sem preocupações com as várias componentes de um resultado que determinariam o valor.

Definição 2.18 *Um indivíduo cuja função utilidade satisfaz $\mathbb{E}(u(\omega)) < u(\mathbb{E}(\omega))$ é dito (assumindo que $\mathbb{E}(\omega)$ pode ser definido)* **avesso ao risco**. *Se $\mathbb{E}(u(\omega)) > u(\mathbb{E}(\omega))$ o indivíduo é* **propenso ao risco**. *Se $\mathbb{E}(u(\omega)) = u(\mathbb{E}(\omega))$ o indivíduo é considerado* **neutro em relação ao risco**.

Com base na função utilidade, é possível definir a posição do indivíduo em relação ao risco:

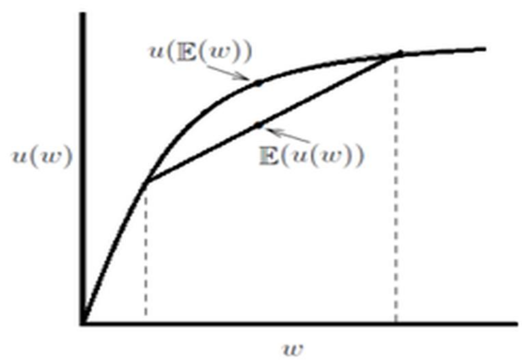

Figura 2.4: Fonte: Webb [19] - A função de utilidade para o indivíduo Avesso ao Risco: $\mathbb{E}(u(\omega)) < u(\mathbb{E}(\omega))$.

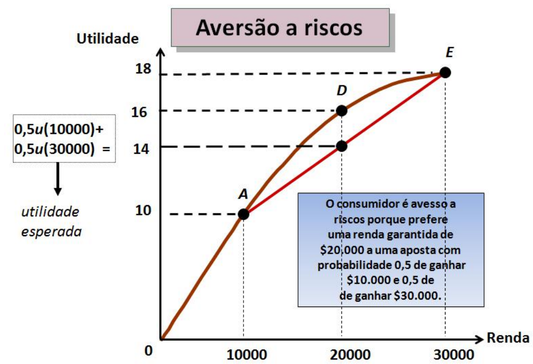

Figura 2.5: Fonte: Domingues [7] - Exemplo de utilidade para o indivíduo Avesso ao Risco.

A principal característica do indivíduo avesso ao risco ou dito "conservador" é que este é muito mais sensível a perdas do que a lucros. Neste caso, a perda devida a um "mau" resultado não é "compensada" pelo ganho advindo de um "bom" resultado de mesma magnitude.

Seja E_λ uma loteria degenerada que fornece o valor esperado da loteria λ com certeza. Em relação às loterias, um tomador de decisão é avesso ao risco (ou exibe aversão ao risco) se para qualquer loteria $\lambda \in \Lambda$, temos que $E_\lambda \succeq \lambda$.[4]

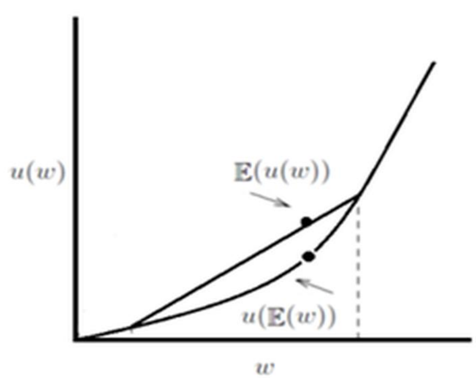

Figura 2.6: Fonte: Webb [19] - A função de utilidade para o indivíduo Propenso ao Risco: $\mathbb{E}(u(\omega)) > u(\mathbb{E}(\omega))$.

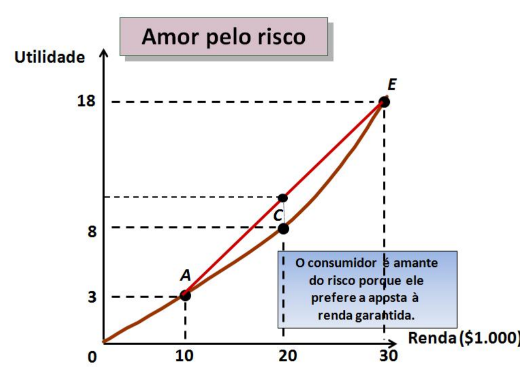

Figura 2.7: Fonte: Domingues [7] - Exemplo de utilidade para o indivíduo Propenso ao Risco.

No perfil do indivíduo propenso ao risco, ocorre o oposto do caso de aversão.

[4]Relembrando: uma loteria é degenerada quando atribui probabilidade 1 para algum prêmio e 0 para os outros. Por exemplo, a loteria $\lambda = (0, 1, 0, 0)$ é uma loteria degenerada.

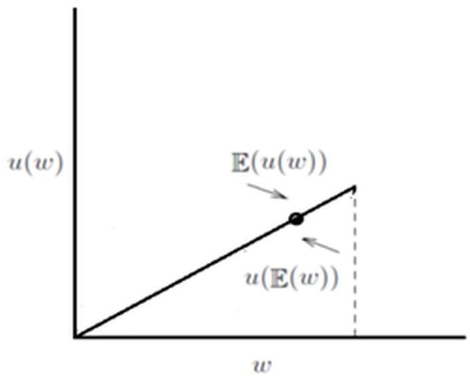

Figura 2.8: Fonte: Webb [19] - A função de utilidade para o indivíduo Neutro em relação ao Risco: $\mathbb{E}(u(\omega)) = u(\mathbb{E}(\omega))$.

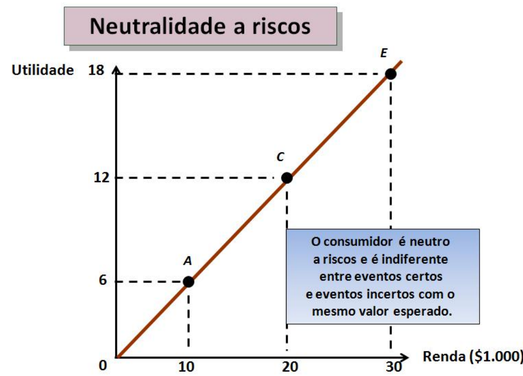

Figura 2.9: Fonte: Domingues [7] - Exemplo de utilidade para o indivíduo Neutro em relação ao Risco.

Já um investidor indiferente a riscos apresentaria uma FU linear, como na figura 2.8 Isto significa que um aumento de receita tem o mesmo impacto (em módulo) que uma redução.

Vejamos um exemplo para aplicar as definições de atitudes frente ao risco. Suponha que um tomador de decisão se defronte com as seguintes loterias, referentes a $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{0, 40, 100\}$.

$$\begin{array}{ll} \lambda = \{(0, 0,6); (40, 0); (100, 0,4)\} & E(\lambda) = 40 \\ E_\lambda = \{(0, 0); (40, 1); (100, 0)\} & E(E_\lambda) = 40 \end{array} \tag{2.19}$$

Note que λ é uma loteria não-degenerada e que E_λ é uma loteria degenerada que fornece com certeza o valor esperado de λ. Assim, ambas loterias apresentam o mesmo valor esperado, mas λ é mais arriscada. Neste caso, conhecendo apenas a atitude do indivíduo frente ao risco, já podemos obter a sua ordenação. Assim, se o tomador de decisão é:

Estritamente avesso ao risco $\Rightarrow E_\lambda \succ \lambda$
Avesso ao risco $\Rightarrow E_\lambda \succeq \lambda$
Neutro ao risco $\Rightarrow E_\lambda \sim \lambda$
Propenso ao risco $\Rightarrow \lambda \succeq E_\lambda$
Estritamente propenso ao risco $\Rightarrow \lambda \succ E_\lambda$

Agora vamos supor que a escolha de a ação a produz a loteria $\lambda(a)$. Desta forma, surge a questão: "Qual será o *payoff* $\pi(a)$ que um indivíduo racional procurará maximizar?". Para ilustrar a utilização da teoria da utilidade na resposta a esta pergunta, voltaremos ao exemplo do filantropo rico.

Exemplo 2.22 *Supondo que o indivíduo possui uma riqueza de R\$ 100.000,00, implicando numa utilidade* $u(100000) = \left(\frac{100000}{92500}\right)^2 = 1,168736$*, analisaremos duas situações:*

Situação 1: O caso do ganho certo de R\$ 1,00 ou a possibilidade do ganho de R\$ 3,00 com probabilidade de 50%. Caso escolha pelo lançamento da moeda, a riqueza poderá ser mantida em R\$ 100.000,00 com probabilidade $p_1 = 0,5$ ou aumentar para R\$ 100.003,00 com probabilidade $p_2 = 0,5$. Assim,

$u(\mathbb{E}(\omega)) = u(0,5 \times 100000,00 + 0,5 \times 100003,00) = u(100001,50) = 1,16877$

$\mathbb{E}(u(\omega)) = 0,5 \times u(100000,00) + 0,5 \times u(100003,00) = 0,5 \times 1,16874 + 0,5 \times 1,16881 = 1,16878$. Como $\mathbb{E}(u(\omega))) = 1,16878 > 1,16877 = u(\mathbb{E}(\omega))$, ele seria propenso ao risco.

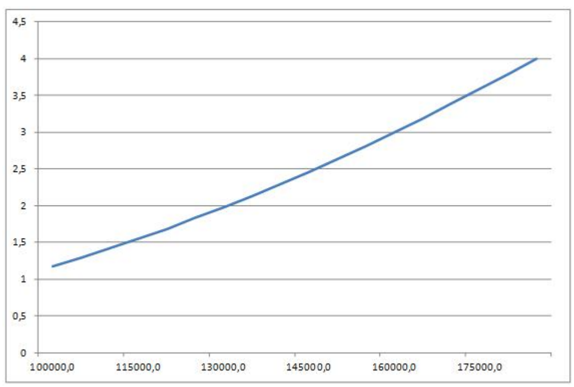

Figura 2.10: Propensão ao Risco.

Como é possível observar pelo gráfico acima, a função utilidade para riquezas de até R\$ 185.000,00 tem característica de propensão ao risco (função convexa).

Agora, para definir se vale a pena jogar a moeda, é necessário calcular qual seria a utilidade de aceitar o ganho certo de R\$ 1,00, fato que elevaria a riqueza para R\$ 10.0001,00.

$u(100001) = \left(\frac{100001}{92500}\right)^2 = 1,16876$

Como a utilidade do ganho certo é menor do que a utilidade esperada da "loteria", $u(100001) < \mathbb{E}(u(\omega))$, o indivíduo deverá aceitar que a moeda seja jogada.

Situação 2: 2. O caso do ganho certo de R\$ 1.000.000,00 ou a possibilidade do ganho de R\$ 3.000.000,00 com probabilidade de 50%.

De forma análoga ao caso anterior, calcularemos $u(\mathbb{E}(\omega))$ e $\mathbb{E}(u(\omega))$:

$u(\mathbb{E}(\omega)) = u(0,5 \times 100000,00 + 0,5 \times 3100000,00) = u(1600000,00) = 4,9369$

$\mathbb{E}(u(\omega)) = 0,5 \times u(100000,00) + 0,5 \times u(3100000,00) = 0,5 \times 1,16874 + 0,5 \times 5,22419 = 3,1965$. Como $\mathbb{E}(u(\omega)) = 3,1965 < 4,9369 = u(\mathbb{E}(\omega))$, ele seria avesso ao risco.

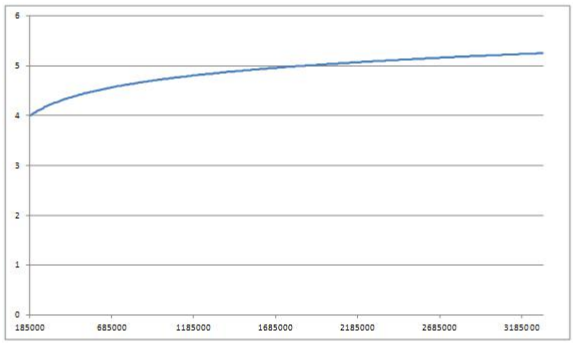

Figura 2.11: Aversão ao Risco.

Ao contrário da situação anterior, observa-se pelo gráfico acima que a função utilidade para riquezas a partir de R$ 185.000,00 tem característica de aversão ao risco (função côncava).

Na escolha do ganho certo, a riqueza dele passaria a ser de R$ 1.100.000,00 resultando numa utilidade $u(1100000,00) = 4,77422$.

Agora, como a utilidade do ganho certo é maior do que a utilidade esperada da "loteria", $u(1100000) > \mathbb{E}(u(\omega))$, o indivíduo deverá aceitar o ganho certo.

Considere o seguinte problema clássico da escolha da carteira de investimentos. Dois ativos estão disponíveis para um investidor. Um é livre de risco (por exemplo, uma conta bancária) proporcionando um retorno fixo r sobre a soma inicial; a outra apresenta risco (por exemplo, ações) com um retorno, tendo uma média μ e um desvio padrão σ.

Se o investidor é um maximizador do VME, então ele deve investir todo seu dinheiro em ações se $\mu > r$. No entanto, em algumas circunstâncias, um investidor avesso ao risco pode preferir um *trade-off* entre o retorno esperado e a variância. Em outras palavras, ele podem reduzir a faixa de variabilidade de seu retorno através da construção de uma carteira em que ele coloca uma fração do dinheiro no banco e investir o restante no mercado de ações. Se a é a fração que coloca em ações, então o retorno esperado da carteira é $a\mu + (1-a)r$ e sua variância é $a^2\sigma^2$.

Assim, a utilidade esperada para o investidor é

$$\pi(a) = a\mu + (1-a)r - \frac{k}{2}a^2\sigma^2 \tag{2.20}$$

onde k representa o valor que o investidor coloca sobre a variância relativa à expectativa.

Observe que o valor da função utilidade será maior para:

- Maiores valores do retorno μ
- Maiores valores do retorno r
- Menores valores da variância σ^2

Ou seja, com esta função utilidade o investidor estará ao mesmo tempo buscando um maior retorno $a\mu + (1-a)r$ e uma menor variância $a^2\sigma^2$.

Para encontrarmos a proporção a que maximize essa utilidade esperada, utilizamos ferramentas de cálculo e obtemos o seguinte resultado:

$$a^* = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \mu < r \\ \frac{\mu - r}{k\sigma^2}, & \text{se} \quad 0 < \mu - r < k\sigma^2 \\ 1, & \text{se} \quad \mu - r > k\sigma^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

Exemplo 2.23 *Considere um indivíduo cuja função utilidade da riqueza* ω, *é quadrática:* $u(\omega) = \omega - k\omega^2$, *onde a constante* k *é tal que* $u(\omega)$ *é não decrescente ao longo do intervalo permitido para* ω. *Repita o problema carteira do Exemplo anterior.*

Comportamento Ótimo

Até agora, consideramos o problema de encontrar uma ação ótima a^* a partir de um dado conjunto A. No entanto, outro tipo de comportamento pode estar disponível para um indivíduo: *aleatório*. Será que este comportamento aleatório permite que um indivíduo obtenha *payoffs* superiores do que se ater a escolher uma ação?

Definição 2.19 *Iremos especificar um* **comportamento geral** β, *especificando a lista de probabilidades com que cada ação disponível é escolhida. A probabilidade de que uma ação* a *é escolhida é dada por* $p(a)$ *e*

$$\sum_{a \in A} p(a) = 1 \tag{2.22}$$

O conjunto de todos os comportamentos aleatórios possíveis (para um determinado problema) será denotada por **B**.

O *payoff* resultante da utilização de um comportamento β está relacionado com os *payoffs* das ações de forma óbvia. O *payoff* da utilização de β é dada por

$$\pi(\beta) = \sum_{a \in A} p(a)\pi(a). \tag{2.23}$$

Em um mundo incerto, podemos também definir os *payoffs*

$$\pi(\beta|x) = \sum_{a \in A} p(a)\pi(a|x). \tag{2.24}$$

tal que

$$\pi(\beta) = \sum_{x \in X} P(X = x)\pi(a|x). \tag{2.25}$$

Definição 2.20 *Um comportamento β^* é dito ótimo se*

$$\pi(\beta^*) \geq \pi(\beta) \qquad \textit{ou ainda} \qquad \beta = \arg\max_{\beta \in \mathbf{B}} \pi(\beta) \tag{2.26}$$

2.4 Processos de Decisão Simples (baseado no texto de Webb, [19], 2007)

Em qualquer ramo de negócio as decisões são tomadas sob condições de incertezas, uma vez que sempre existem pelo menos dois resultados possíveis decorrentes de uma linha de ação escolhida.

As árvores de decisão são compostas por vários eventos aleatórios, cada qual com sua probabilidade de ocorrência. Elas representam uma sequência de decisões encadeadas que devem ser analisadas através das técnicas da Teoria da Decisão de modo a se chegar à melhor alternativa de investimento. Portanto, a árvore de decisão é um importante instrumento para o executivo visualizar as alternativas existentes e otimizar o resultado esperado de um empreendimento incerto.

A Teoria da Decisão é uma metodologia que permite o melhor entendimento e quantificação do risco, mas ela não o elimina nem o reduz. Veremos adiante sua representação gráfica através das árvores de decisão.

Árvores de Decisão

Um homem ouve que sua filha sempre pega uma moeda de cinco centavos quando um parente adulto lhe oferece uma escolha entre cinco centavos e dez centavos de dólar. Ele explica para sua filha, "Cinco centavos é duas vezes o valor de 10 centavos, assim você deve sempre escolher a moeda de dez centavos". Em um tom irritado, sua filha responde: "Papai, mas depois as pessoas não vão mais me oferecer dinheiro qualquer".

Esta história é um exemplo de um processo de decisão: uma sequência de decisões é feita, embora o processo possa terminar antes de todas as decisões potenciais tenham sido tomadas. A história também ilustra duas componentes sobre o que é considerado ser *comportamento estratégico*. Em primeiro lugar, recompensas imediatas são dispensados na expectativa de retornos futuros. Em segundo lugar, o comportamento dos outros é levado em conta. Esta é a primeira componente que é o assunto principal desta seção.

Para representar problemas, igual ao da moeda, podemos desenhar uma *árvore de decisão*. Os instantes em que as decisões são tomadas são mostrados como pequenos círculos cheios. Partindo destes nós de decisão há os ramos para cada ação que poderá ser tomada naquele nó. Quando cada decisão tenha sido tomada, chega-se ao fim de um caminho através da árvore. Nesse ponto, o *payoff* para seguir esse caminho está escrito. A convenção que o tempo aumenta à medida que se desce a página assim a árvore é desenhada "de cabeça para baixo".

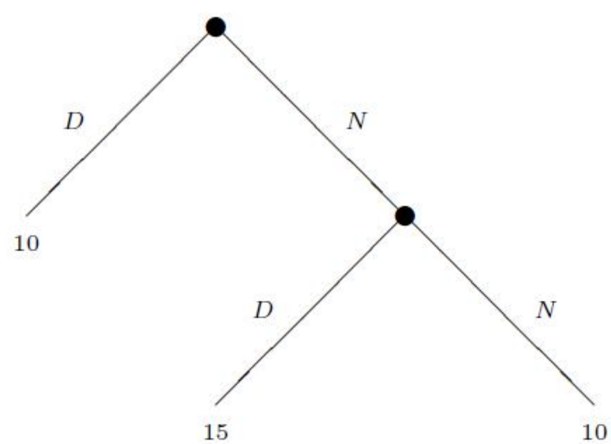

Figura 2.12: Fonte: Webb [19]

Na Figura 2.12 temos a arvore que representa a escolha de 5 centavos(N) ou 10 centavos (D) em (no máximo) duas ocasiões. O *payoff*, em centavos, é dado no final de cada ramo da árvore.

Exemplo 2.24 *Suponha que o adulto irá oferecer "5 centavos ou 10 centavos" no máximo duas vezes: se a menina toma a moeda de 10 centavos pela primeira vez, então a escolha será oferecida apenas uma vez. O problema da moeda pode então ser representado pela árvore mostrado na Figura 2.12. Se ela escolhe 10 centavos (ação D) na primeira oportunidade, então ela recebe dez centavos e nenhuma outra oferta será feita. Por outro lado, se ela escolhe 5 centavos (ação N), ela recebe cinco centavos e a opção de uma segunda escolha. É claro que a menina deverá fazer. Se ela escolhe 5 centavos pela primeira vez e, em seguida, 10 centavos, ela recebe um payoff de quinze centavos, se ela seguir a qualquer outro curso de ação, ela recebe apenas 10 centavos. Portanto, ela deve escolher primeiro 5 centavos e depois a moeda de 10 centavos.*

Comportamento Estratégico

A palavra "estratégia" é derivada da palavra grega *strategos* que significa "comandante militar" ' e, coloquialmente, uma estratégia é um plano de ação.

Definição 2.21 *A estratégia é uma regra para a escolha de uma ação em cada ponto que uma decisão pode ser tomada. Uma* **estratégia pura** *é uma em que não há aleatoriedade. O conjunto de todas as possíveis estratégias puras será denotado por* **S**.

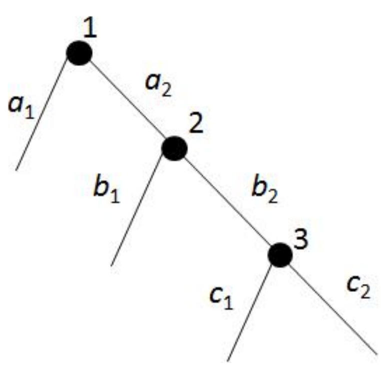

Figura 2.13: Exemplo de árvore de decisão 1

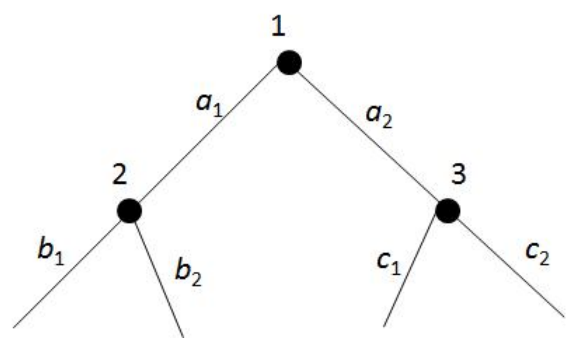

Figura 2.14: Exemplo de árvore de decisão 2

Suponha que haja n nós de decisão e que em cada nó de decisão i existe um conjunto de ações A_i descrevendo as escolhas que podem ser tomadas nesse momento. Alguns ou todos os A_i podem ser idênticas. Então, o conjunto de estratégias puras **S** é dado pelo produto cartesiano de todos os conjuntos de ações: $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Exemplo 2.25 *Suponhamos que existem três nós de decisão na qual os conjuntos de ação são $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ e $C = \{c_1, c_2\}$. Então, o conjunto de estratégias puras é dado pelo conjunto de oito triplas*

$$S = \{a_1b_1c_1, a_1b_1c_2, a_1b_2c_1, a_1b_2c_2, a_2b_1c_1, a_2b_1c_2, a_2b_2c_1, a_2b_2c_2\}.$$

Este conjunto estratégia pode aplicar a qualquer uma das árvores de decisão ilustradas nas duas Figuras acima.

Definição 2.22 *O comportamento observado de um indivíduo seguindo uma determinada estratégia é chamado de o* **resultado** *da estratégia.*

Uma estratégia pura pega um caminho através da árvore de decisão a partir do ponto inicial para um dos pontos terminais. Entretanto, uma estratégia pura não é apenas um caminho através da árvore de decisão: uma estratégia pura especifica a ação que será tomada em cada nó de decisão, incluindo aqueles que não serão alcançados se a estratégia é seguida.

Dado que estratégias que levam à mesma saída resultam no mesmo *payoff*, às vezes é útil introduzir o conceito de um conjunto "reduzido" de estratégias puras, que remove esta redundância.

Definição 2.23 *Um* **conjunto estratégias reduzido** *é o conjunto formado quando todas as estratégias puras que conduzem a resultados indistinguíveis são combinadas.*

Exemplo 2.26 *Considere o jogo da moeda. $S = \{NN, ND, DN, DD\}$ é o conjunto de estratégias puras, onde cada par de ações representa as escolhas feitas na ordem natural (tempo maior). Duas destes estratégias, DN e DD, produzem o mesmo resultado, porque a escolha da moeda de 10 centavos (D) no primeiro nó de decisão significa que não há outras decisões a serem tomadas.*

O conjunto estratégia reduzida é $SR = \{NN, ND, DX\}$, onde a combinação DX significa "moeda de 10 centavos no nó de decisão em primeiro lugar e nada no outro nó de decisão".

Estratégias Aleatórias

Quando há apenas uma única decisão a ser tomada, os conjuntos de ações e de estratégias puras são idênticos. Há também apenas uma maneira de especificar o comportamento aleatório.

Exemplo 2.27 *Suponha que o conjunto de ações (ou estratégia pura) é definido por $a1, a2$. Um comportamento geral especifica o uso a_1 com probabilidade p e a_2 com probabilidade $1 - p$. Conforme visto na seção acima, $\beta = (p, 1 - p)$.*

Quando há(potencialmente) mais do que uma decisão a ser tomada, os conjuntos de ações e os conjuntos de estratégias puras não são mais idênticas e agora existem duas maneiras conceitualmente diferentes de representar um comportamento aleatório. Para distingui-los vamos chamar uma de “estratégia mista” e o outro uma “estratégia comportamental”.

Definição 2.24 *Uma* **estratégia mista** σ *especifica a probabilidade* $p(e)$ *com que cada uma das* **estratégias puras** $e \in E$ *é usada.*

Suponha que o conjunto de estratégias é $S = e_1, e_2, e_3...$, então uma estratégia mista pode ser representada como um vetor de probabilidades:

$$\sigma = (p(e_1), p(e_2), p(e_3), ...) \tag{2.27}$$

Uma estratégia pura pode, então, ser representada como um vetor em que todas as componentes são nulas, exceto um. Por exemplo,

$$s_2 = (0, 1, 0, ...) \tag{2.28}$$

Estratégias mistas podem, portanto, ser representadas como combinações lineares de estratégias puras:

$$\sigma = \sum_{e \in E} (p(e)) \tag{2.29}$$

Observações 2.2 *Muitas vezes, essas combinações lineares são escritos simbolicamente. Por exemplo, no caso do jogo das moedas de 5 e de 10 centavos, a estratégia mista em que* NN *é usado com probabilidade* $\frac{1}{4}$ *e* DN *é utilizada com uma probabilidade* $\frac{3}{4}$ *pode ser escrita como*

$$\sigma = \frac{1}{4}NN + \frac{3}{4}DN \tag{2.30}$$

3 Jogos

O objetivo deste capítulo é a de criar uma representação formal e visual para uma certa classe de jogos. Esta representação será chamada "forma extensiva", que iremos definir formalmente mais adiante. Vamos iniciar prosseguir com o estudo de jogos sob os seguintes pressupostos:

1. Há um conjunto finito de jogadores: $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$
2. Cada jogador tem um conhecimento das regras do jogo (as regras segundo as quais o estado do jogo evolui) e as regras são fixas.
3. Em qualquer momento $t \in \mathbb{R}$ durante o jogo, o jogador tem um conjunto finito de *movimentos* ou escolhas a fazer. Estas opções irão afetar a evolução do jogo. O conjunto de todos os movimentos disponíveis será denotado de $\mathbf{S}$.
4. O jogo termina depois de um número finito de movimentos.
5. No final do jogo, cada jogador recebe um prêmio. (Usando os resultados do capítulo anterior, assume-se que estes prêmios podem ser ordenados de acordo com a preferência e que existe uma função de utilidade para atribuir valores numéricos para estes prêmios.)

Além destes pressupostos, alguns jogos podem incorporar duas outras componentes:

1. Em certos pontos, pode haver "movimentos casuais" que avançam o jogo de uma forma não-determinística. Isso só ocorre em jogos de azar. (Isto ocorre, por exemplo, no poker quando as cartas são dadas.)

2. Em alguns jogos, os jogadores irão conhecer a história "inteira" dos movimentos que tenham sido feitos em todas os instantes de tempo t. (Isto ocorre, por exemplo, no Jogo da Velha e no Xadrez, mas não, por exemplo, no Poker.)

Na teoria dos jogos, a *forma normal* é uma forma de descrever um jogo. Distintamente da *forma extensa* (capítulo seguinte), as representações na forma normal não são grafos, mas matrizes, ditas matrizes de ganhos. Isto pode ser de grande utilidade na hora de identificar estratégias estritamente dominantes e equilíbrios de Nash.

3.1 Introdução (Boretolossi [3])

Registros antigos sobre teoria dos jogos remontam ao século XVIII. Em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, James Waldegrave analisa um jogo de cartas chamado "le Her"e fornece uma solução que é um equilíbrio de estratégia mista (conceito que nos familiarizaremos posteriormente). Contudo, Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral. No início do século XIX, temos o famoso trabalho de Augustin Cournot sobre duopólio [3]. Em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos [21], o teorema afirma que o jogo de xadrez é estritamente determinado, isto é, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. Outro grande matemático que se interessou em jogos foi Emile Borel, que reinventou as soluções minimax e publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos. Ele achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de uma maneira semelhante.

Em seu início, a teoria dos jogos chamou pouca atenção. O grande matemáatico John von Neumann mudou esta situação. Em 1928, ele demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução e estratégias mistas [18]. A demonstração original usava topologia e análise funcional e era muito complicada de se acompanhar. Em 1937, ele forneceu uma nova demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer. John von Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, mostrou interesse em economia e, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico *The Theory of Games and Economic Behaviour* [19] em 1944 e, com isto, a teoria dos jogos invadiu a economia e a matemática aplicada.

Em 1950, o matemático John Forbes Nash Júnior publicou quatro artigos importantes para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria de barganha. Em *Equilibrium Points in n-Person Games* [14] e *Non-cooperative Games* [16], Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado equilíbrio de Nash, e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos a partir de sua redução para a forma não-cooperativa. Nos artigos *The Bargaining Problem* [15] e *Two-Person Cooperative Games* [17], ele criou a teoria de barganha e provou a existência de solução para o problema da barganha de Nash.

Em 1994, John Forbes Nash Jr. (Universidade de Princeton), John Harsanyi Universidade de Berkeley, California) e Reinhard Selten (Universidade de Bonn, Alemanha) receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

3.2 Terminologia

O principal objetivo ao se estudar teoria dos jogos, é desenvolver critérios racionais para a seleção de uma estratégia, supondo que o adversário também é racional e que tentará fazer o melhor que puder com relação ao seu oponente.

A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. O elemento básico em um jogo é o conjunto de *jogadores* que dele participam. Cada jogador tem um conjunto de *estratégias.* Quando cada jogador escolhe sua estratégia, temos então uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma função utilidade que atribui um núumero real (o ganho ou *payoff* do jogador) a cada situação do jogo.

- **Jogadores**: participantes do jogo (há pelo menos 2 jogadores). Jogador é todo agente que participa e possui objetivos em um jogo. O objetivo de cada jogador é maximizar a utilidade (*payoff*) através da escolha das estratégias.

  Neste texto, o conjunto finito de jogadores será representado por $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$.

  Jogador pode ser um país, um grupo ou uma pessoa, o que interessa é que, dentro de um jogo, ele possua interesses específicos e se comporte como um todo.

- **Estratégia** (ou **ações** ou **movimentos**): descrição das decisões a tomar em todas as situações possíveis. As estratégias compõem uma lista das escolhas ótimas para um jogador. Nesta lista já estão previstas todas as possíveis situações que o jogador poderá enfrentar. Assim, tendo uma estratégia, ele saberá o que fazer em qualquer estágio, não importando o que seu oponente faça nem os resultados dos eventos probabilísticos.

  Estratégia é algo que um jogador faz para alcançar seu objetivo. Um jogador sempre procura uma estratégia que aumente seus ganhos ou diminua as perdas. Em um jogo de pôquer um jogador pode baixar suas cartas ao começo de cada rodada. Restringindo suas perdas dessa forma. Ele não obterá lucros, mas pode evitar ter que explicar como perdeu a poupança em uma noite.

  Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{im_i}\}, (m_i \geq 2)$ de opções de estratégias, denominadas estratégias puras do jogador g_i.

Uma combinação das estratégias é um conjunto ordenado $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, de cada um dos n jogadores do jogo.

A grande questão ao se escolher uma estratégia, então, é tentar prever os ganhos e as perdas potenciais que existem em cada alternativa. Grande parte do problema reside no fato de prever-se o que os outros participantes irão fazer ou estão fazendo (informações completas sobre os concorrentes são um luxo de que nem sempre se dispõe em jogos de estratégia). O jogador "A"não analisa somente a melhor linha de ação que ele deve tomar, mas também as prováveis linhas de ação do jogador "B", seu competidor. Isso cria o dilema de que, se "B"sabe que "A"vai tentar prever suas ações, "B"pode optar por uma linha de ação alternativa, buscando surpreender seu opositor. Claro que "A"pode prever isso também, entrando numa seqüência interminável de blefes e previsões sobre a estratégia adversária.

- **Ganho -** *payoff* / *utility*: valor, pagamento ou utilidade u de uma estratégia (pontos, \$, etc.) ou ainda uma expressão de preferência. No fim do jogo, cada jogador obtém um *payoff*. Podemos associar este número ao montante que foi ganho ou perdido, ou dizer, por exemplo, que o *payoff* é $+1$ para o ganhador, 0 se há um empate, e -1 para o perdedor.

  Antes do início do jogo, cada jogador conhece as estratégias disponíveis para si, as disponíveis para o oponente e a tabela de *payoffs*. A partida real do jogo consiste dos jogadores escolherem simultaneamente uma estratégia, sem saberem da escolha do adversário.

  Segundo Rasmusen [12] Na modelagem de uma situação particular do mundo real, definir os "ganhos"geralmente é a tarefa mais árdua na construção do modelo.

  Por *payoff* do i-ésimo jogador $u_i(s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{im_i})$, deve-se entender:

  1. A utilidade que o jogador i recebe depois de todos os jogadores escolherem duas estratégias e o jogo tenha sido concluído; ou
  2. A utilidade esperada que ele vai receber em função das estratégias por ele escolhidas e pelas estratégias dos outros jogadores.

  Neste texto, "estratégia"será usada como sinônimo de "ação". As definições 1. e 2. são distintas e diferentes, mas na literatura e neste texto o termo *payoff* será usado para expressar o valor atual e futuro do "ganho". O contexto irá determinar o que se deseja expressar.

  Jogadores sempre recebem pagamentos, representados por um valor. No entanto, o valor absoluto não é tão importante quanto a proporção entre as opções. Em determinado jogo, por exemplo, pode-se representar a morte de um jogador por -100, enquanto continuar vivo pode ser representado por 0.

  O *payoff* é um conceito que reflete sua preferencia frente a várias alternativas de resultado de um jogo. Exemplo: Suponha que o resultado de um jogo seja $F = \langle$ir assistir$\rangle$ a uma partida de futebol. ou $C = \langle$ir ao cinema$\rangle$. Se você prefere F a C, então a função de utilidade deve indicar $u(F) > u(C)$. Quaisquer valores podem ser empregados aqui, por exemplo, $u(F) = 4$ e $u(C) = 2$. Há a possibilidade de estender este conceito para o caso de o tempo estar seco ou chuvoso. Sejam $FS = \langle$ir assistir a uma partida de futebol com tempo seco$\rangle$, $FC = \langle$ir assistir a uma partida de futebol com tempo chuvoso$\rangle$ e $C = \langle$ir ao cinema$\rangle$. Sua função de utilidade pode agora indicar $u(FS) > u(C) > u(FC)$. Quaisquer valores podem ser empregados aqui, por exemplo, $u(FS) = 4$, $u(C) = 2$ e $u(FC) = 0$. É evidente que esses valores influenciam outros indicativos de preferência associados. Supondo que exista uma chance de tempo chuvoso de 50%, então, com a função de utilidade acima, é possível indicar que o jogador é indiferente entre ir ao futebol ou ir ao cinema com base na seguinte equação:

$$\frac{1}{2}u(FS) + \frac{1}{2}u(FC) = u(C) \tag{3.1}$$

Segundo Zuben [20], existe um conjunto de axiomas fundamentando a teoria de utilidade (LUCE & RAIFFA, 1957), a qual foi proposta já na concepção da teoria de jogos por VON NEUMANN & MORGENSTERN (1944). A função de utilidade deve refletir todos os aspectos vinculados aos possíveis resultados de um jogo, incluindo o sentimento de satisfação de um jogador frente ao que ocorre com seus adversários.

Para Rasmusen [12], *Player i´s strategy s_i is a rule that tells him which action to choose at each instant of the game, given his information set.*

3.3 Grafos e árvores

Para formalizar o jogo, é necessário primeiro entender a noção de gráficos e árvores, que são usados para modelar a sequência de movimentos em qualquer jogo.

A Teoria dos Grafos é uma área importante da matemática discreta. Tendo as suas raízes em jogos e recreações matemáticas, atribui-se a sua criação a Euler, ao resolver o problema das pontes de Königsberg em 1736, mas foram os problemas acerca de fórmulas de estrutura de compostos químicos, que A. Cayley resolveu na segunda metade do século XIX, que a começaram a desenvolver. Hoje, a Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas (Informática, Pesquisa Operacional, Economia, Sociologia, Genética, etc.), pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo.

Existem várias situações nas quais é importante poder modelar o inter-relacionamento entre um conjunto finito de objetos. Por exemplo, poderíamos querer descrever vários tipos de rede (estradas ligando cidades, rotas aéreas ligando cidades, conexões de comunicação ligando satélites etc.) ou relações entre grupos ou indivíduos (relações de amizade em uma sociedade, relações caçador-caça em um ecossistema, relações de dominância em um esporte etc.). Grafos são usados para modelagens de tais redes e relacionamentos, e matrizes são uma ferramenta muito útil para o estudo deles.

Definição 3.1 (Grafo) *Um grafo $G = (V, E)$ é definido pelo par de conjuntos V e E, onde, V é um conjunto finito não vazio de vértices (ou nós) e E é o conjunto de pares ordenados $a = (v, w)$, $v, w \in V$ são as arestas do grafo.*

Um grafo consiste em um conjunto finito de pontos (chamados vértices)e um conjunto finito de arestas, e cada uma destas conecta dois vértices (não necessariamente distintos). Dizemos que dois vértices são adjacentes se eles são os dois pontos finais de uma aresta.

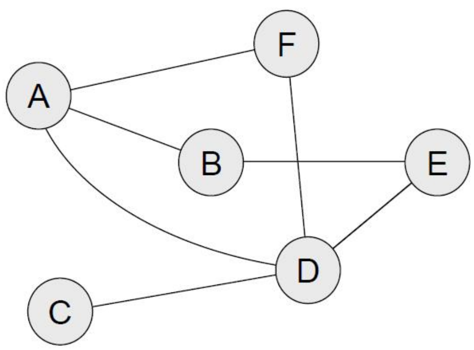

Figura 3.1: Grafo não direcionado $G = (V, E)$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Figura 3.2: Matriz de adjacência

Exemplo 3.1 *Seja o grafo $G = (V, E)$ dado por $V = \{p | p$ é uma pessoa $\}$ e $A = \{(v, w) | < v$ é amigo de $w >\}$. Esta definição representa toda uma família de grafos.*

Exemplo 3.2 *Uma maneira cômoda de especificar um grafo é exibir o conjunto de suas arestas. Por exemplo, o conjunto de arestas*

$$0 - 1 \ 0 - 5 \ 1 - 5 \ 2 - 4 \ 3 - 1 \ 5 - 3$$

define um grafo sobre o conjunto de vértices $\{0..5\}$. Cada elemento $v - w$ dessa lista representa dois arcos: o arco $v - w$ e o arco $w - v$.

Definição 3.2 (Dígrafo) *Um dígrafo (directed graph - grafo orientado) é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de vértices e $E \subseteq V \times V$ é um conjunto finito de arestas orientadas compostas de dois subconjuntos ordenados de elementos de V. Por convenção, assume-se que $(v, v) \notin E$ para todos $v \in V$.*

Exemplo 3.3 *Há* $2^6 = 64$ *dígrafos possíveis em três vértices. Isto pode ser calculado considerando o número de permutações de dois elementos escolhidos a partir de um conjunto de 3 elementos. Isso resulta em 6 possíveis pares ordenados de vértices (arestas orientadas). Para cada uma destas extremidades, existem duas possibilidades: ou o bordo está no conjunto de ponta ou não. Assim, o número total de dígrafos sobre três arestas é 26 = 64.*

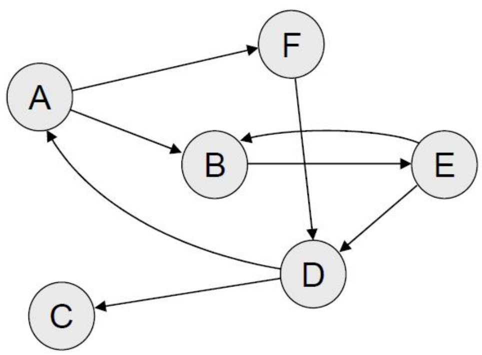

Figura 3.3: Dígrafo não direcionado $G = (V, E)$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Figura 3.4: Matriz de adjacência

4

Jogos na forma estratégica

Na teoria dos jogos, a *forma normal* é uma forma de descrever um jogo. Distintamente da *forma extensa* (capítulo seguinte), as representações na forma normal não são grafos, mas matrizes, ditas matrizes de ganhos. Isto pode ser de grande utilidade na hora de identificar estratégias estritamente dominantes e equilíbrios de Nash.

4.1 Exemplos de Jogos

1. O Jogo da Tesoura, Pedra e Papel:

   $G = \{L, C\}$, $S_L = \{tesoura, pedra, papel\}$, $S_C = \{tesoura, pedra, papel\}$,

   $S = \{(tesoura, tesoura), (tesoura, pedra), (tesoura, papel), ...$
   $(pedra, tesoura), (perda, pedra), (pedra, papel), ...$
   $(papel, tesoura), (papel, pedra), (papel, papel)\}$

   Matriz de *payoffs* do jogo da Tesoura, pedra e papel:

   $$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Conforme a matriz A, cada iteração tem como resultado vitória para um dos agentes (e derrota para o outro agente) ou empate. Nenhum agente possui uma estratégia determinística vencedora.

2. O Dilema do Prisioneiro: Neste jogo, dois ladrões (Linha e Coluna) são presos próximo à cena de um roubo e precisam escolher entre duas estratégias: confessar o roubo, implicando também o companheiro, ou não confessar na expectativa de reduzir sua pena.

A matriz de *payoff* abaixo mostra os ganhos possíveis para cada estratégia escolhida pelos jogadores (na verdade são perdas, e maximizar o *payoff* neste caso implica em obter a menor pena).

$G = \{L, C\}$, $S_L = \{confessar, negar\}$, $S_C = \{confessar, negar\}$,

$S = \{(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar, negar)\}$

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad C_1 \quad & \quad C_2 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (-5,-5) & (-30,-1) \\ (-1,-30) & (-10,-10) \end{array} \right] \end{array}$$

Considerando que ambos os ladrões têm conhecimento da matriz, para cada um o raciocínio é o mesmo: se o outro confessar, é melhor confessar também, pois assim fica preso 5 anos ao invés de 10. Se o outro não confessar, também assim é melhor confessar, pois então sairá livre.

3. A batalha dos sexos: Um homem (Linha) e a sua mulher (Coluna) desejam sair para passear. O homem prefere assistir a um jogo de futebol enquanto que sua mulher prefere ir ao cinema. Se eles forem juntos para o futebol, então o homem tem satisfação maior do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então a mulher tem satisfação maior do que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos. Esta situação também pode ser modelada como um jogo estratégico. Temos:

   $G = \{L, C\}$, $S_L = \{futebol, cinema\}$, $S_C = \{futebol, cinema\}$,

   $S = \{(futebol, futebol), (futebol, cinema), (cinema, futebol), (cinema, cinema)\}$

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad C_1 \quad & \quad C_2 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (10,5) & (0,0) \\ (0,0) & (5,10) \end{array} \right] \end{array}$$

4. Concorrência entre duas empresas: Duas empresas concorrentes (empresa Linha e empresa Coluna) produzem um mesmo produto e têm custos fixos de R$ 5.000,00 por período, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto (R$ 2,00) e um preço baixo (R$ 1,00). Regras do jogo:

   - A R$ 2,00, o mercado consome 5000 unidades ao custo de R$ 10.000,00
   - A R$ 1,00, o mercado consome 10000 unidades ao custo de R$ 10.000,00
   - Se ambas empresas aplicarem o mesmo preço, vendas serão divididas entre elas
   - Se aplicarem preços diferentes, aquela com menor preço vende toda a quantidade e a outra nada
   - *payoffs* são os lucros - revenda menos custos fixos

$G = \{L, C\}$, $S_L = \{preço\ alto, preço\ baixo\}$, $S_C = \{preço\ alto, preço\ baixo\}$,

$S = \{(preço\ alto, preço\ alto), (preço\ alto, preço\ baixo), ...$
$(preço\ baixo, preço\ alto), (preço\ baixo, preço\ baixo)\}$

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \left[\begin{array}{cc} (0,0) & (5000,-5000) \\ (-5000,5000) & (0,0) \end{array}\right] \end{array}$$

5. Par ou Ímpar: Considerar dois jogadores (Linha e Coluna), cada um com duas alternativas de escolha: par ou ímpar. Dependendo a combinação de escolhas dos dois, os jogadores obtêm ganho (representado por 1) ou perda (-1). O jogador Linha obterá ganho se ambos fizerem a mesma escolha, e neste caso Coluna receberá -1. Se as escolhas forem diferentes, os ganhos invertem-se.

   $G = \{Linha, Coluna\}$, $S_L = \{par,\ ímpar\ \}$, $S_C = \{par,\ ímpar\ \}$,

   $S = \{(par, par), (par,\ ímpar\ , (\ ímpar\ , par), (\ ímpar\ ,\ ímpar\ )\}$

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \left[\begin{array}{cc} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{array}\right] \end{array}$$

6. Aposta com Dois Dedos: Neste jogo, dois jogadores (Linha e Coluna) mostram, simultaneamente, um ou dois dedos. Se o número de dedos for igual, o jogador Linha ganhará \$ 1 do jogador Coluna. Se o número for diferente o jogador Linha pagará \$ 1 ao jogador Coluna.

   $G = \{Linha, Coluna\}, S_L = \{Mostrar\ 1, Mostrar\ 2\}, S_C = \{Mostrar\ 1, Mostrar\ 2\}$,

   $S = \{(Mostrar\ 1, Mostrar\ 1), (Mostrar\ 1, Mostrar\ 2), (Mostrar\ 2, Mostrar\ 1), ...$
   $(Mostrar\ 2, Mostrar\ 2)\}$

   Assim, cada jogador tem duas estratégias: mostrar um, ou mostrar dois dedos. O pagamento resultante para cada jogador é dado na tabela de *payoffs*:

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \left[\begin{array}{cc} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{array}\right] \end{array}$$

4.2 Solução de um Jogo

Conforme [3], uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Existem vários conceitos diferentes de solução. Neste texto serão investigados os conceitos mais comuns: dominância e equilírio de Nash.

Dominância

Em termos da teoria dos jogos, diz-se que os dois jogadores possuem um perfil de *estratégia dominante*, isto é, todas menos uma *estratégia é estritamente dominada*, que o jogo é resolúvel por dominância estrita iterada e que o jogo termina em uma solução que é um equilíbrio de estratégia dominante.

Frequentemente discute-se perfis de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador $g_i \in G$ irá variar, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecem fixas. Para qualquer vetor $y = (y_1, ..., y_n)$, denotemos por y_{-i} o vetor $(y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$, que é a porção de y não associada ao jogador i. Usando esta notação, s_{-Linha}, é a lista das estatégias de cada jogador, exceto a do jogador *Linha*. Esta lista é de grande interesse de *Linha*, porque ele a usa para escolher sua própria estratégia.

Denotemos por

$$s_i = s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, ..., s_{nj_n} \in S_i = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n \quad (4.1)$$

uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i. Desta maneira, um perfil de estratégia pode ser convenientemente denotado por

$$s = (s_{ij_i}, s_{-i}) = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{i+1}}, ..., s_{nj_n}). \quad (4.2)$$

A melhor resposta ao perfil de estratégia s_{-i} escolhido pelos outros jogadores é a estratégia s_i^* que rende o maior *payoff* para o jogador g_i.

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}), \ \forall s_i^{'} \neq s_i^*. \quad (4.3)$$

A melhor resposta é "estritamente melhor"se nenhuma outra estratégia é igualmente melhor.

A estratégia s_i^d é uma *estratégia dominada* se ela é estritamente inferior a alguma outra estratégia, independente da estratégia que o outro jogador escolha, no sentido de que qualquer estretégia tomada pelos demais jogadores, o *payoff* é inferior ao da estratégia s_i^d. Matematicamente, s_i^d é dominada se existe uma estratégia $s_i^{'}$ tal que

$$u_i(s_i^d, s_{-i}) < u_i(s_i^{'}, s_{-i}), \ \forall s_{-i}. \quad (4.4)$$

Note que s_i^d não é uma estratégia dominada se não existe s_{-i} que seja uma resposta melhor, entretanto algumas vezes a estratégia $s_i^{'}$ é melhor, e às vezes é $s_i^{''}$. Quando s_i^d não é dominada, ela possui a característica de ser uma boa estratégia para o jogador que não pode predizer o que os demais jogadores irão fazer. Uma estratégia dominada é sem dúvida inferior a alguma outra estratégia.

Se

$$u_i(s_i^d, s_{-i}) \leq u_i(s_i^{'}, s_{-i}),\ \forall s_{-i}. \tag{4.5}$$

então dizemos que a estratégia s_i^d é fracamente dominada.

A estratégia que é superior a todas as demais estratégias é geralmente denominada de *estratégia dominante*. A estratégia s_i^* é uma *estratégia dominante* se é estritamente a melhor resposta dentre as estratégias escolhidas pelos demais jogadores, no sentido de que independente da estratégia escolhida pelos demais jogadores, a estratégia s_i^* apresenta o melhor *payoff*. Matematicamente

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i}),\ \forall s_{-i},\ \forall s_i^{'} \neq s_i^*. \tag{4.6}$$

A estratégia dominante de um jogador é sua melhor resposta, mesmo diante das ações irracionais dos demais jogadores. A maioria dos jogos não possui estratégias dominantes e assim precisam tentar "adivinhar"as ações que os demais jogadores irão escolher.

Dominância Iterada

Um *equilíbrio por dominância iterada*, conforme Rasumsen [12] é um perfil de estratégias que é determinado a partir da exclusão (deletando) estratégias fracamente dominadas do conjunto de estratégias de um dos jogadores, reavaliando quais estratégias resultantes são fracamente dominadas, deletando-as. Este processo continua até sobre uma única estratégia para cada jogador.

Conforme [1], uma idéia com implicações filosóficas bastante discutíveis é a racionalidade implícita do jogador na teoria dos jogos.[27] Contudo, a idéia de racionalidade, tal como pressuposta na teoria dos jogos, é relativamente simples. De acordo com o próprio John Von Neumann, "o individuo que tenta obter este respectivo máximo (de utilidade) é também o que age racionalmente". O conceito de racionalidade, tal como entendido na teoria dos jogos, significa apenas que o jogador racional é aquele que age para atingir a maior utilidade possível. É uma pressuposição teórica que garante a operacionalidade da teoria, pois não é possível aplicá-la se for tomada como base a pressuposição de que algum dos participantes do jogo jogará para perder utilidade. Além disso, a hipótese de racionalidade dos jogadores serve ao propósito de tornar mais restrita a totalidade de resultados possíveis em um jogo, já que o comportamento estritamente racional é mais previsível que o comportamento irracional.

Conforme Rêgo [13], uma das coisas mais difíceis quando analisamos um jogo é determinar as crenças dos agentes. Muitos jogos podem ser simplificados assumindo racionalidade dos agentes e conhecimentos sobre racionalidade dos outros agentes. Por exemplo, considere o Dilema do Prisioneiro. Cooperar é uma estratégia dominada. Um agente racional portanto nunca cooperará. Portanto, isto resolve o jogo pois todos os agentes irão delatar. Note que um agente não precisa saber nada sobre o outro agente, a não ser que ele é racional. Este resultado é intrigante, pois ele é o pior resultado em termos da soma das utilidades dos jogadores e ambos melhorariam seu resultado se cooperassem. Este resultado mostra que às vezes é benéfico restringir as opções dos agentes.

Seja o jogo determinado pela matriz de *payoff* abaixo.

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} (5,2) & (2,6) & (1,4) & (0,4) \\ (0,0) & (3,2) & (2,1) & (1,1) \\ (7,0) & (2,2) & (1,5) & (5,1) \\ (9,5) & (1,3) & (0,2) & (4,8) \end{array}\right] \end{array}$$

$G = \{L, C\}$, $S_L = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$, $S_C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$,

Neste jogo, para o jogador C, a estratégia C_1 é estritamente dominada pela estratégia C_4, assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada.

$$A = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} (2,6) & (1,4) & (0,4) \\ (3,2) & (2,1) & (1,1) \\ (2,2) & (1,5) & (5,1) \\ (1,3) & (0,2) & (4,8) \end{array}\right] \end{array}$$

Agora, nesta matriz reduzida, para o jogador L, as estratégias L_1 e L_4 são estritamente dominadas pelas estratégias l_2 e l_3, respectivamente. Portanto, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas.

$$A = \begin{array}{c} \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} (3,2) & (2,1) & (1,1) \\ (2,2) & (1,5) & (5,1) \end{array}\right] \end{array}$$

Além disso, a estratégia C_4 do jogador C é estritamente dominada pelas estratégia C_2. Assim, a coluna 3 também pode ser eliminada. Obtemos então uma matriz reduzida 2×2.

$$A = \begin{array}{c} \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_2 & C_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (3,2) & (2,1) \\ (2,2) & (1,5) \end{array}\right] \end{array}$$

Finalmente, a estratégia L_3 do jogador C é estritamente dominada pela estratégia L_2 e, na matriz 1×2 resultante, a estratégia C_3 do jogador C é estritamente dominada pela estratégia C_2. Vemos então que o resultado do jogo é o perfil $(3, 2)$, isto é, o jogador L

escolhe a estratégia L_2B e o jogador C escolhe a estratégia C_2. Neste caso, temos que a técnica de eliminação de *dominância estrita iterada* fornece um único perfil de estratégia como solução do jogo. Contudo, conforme Rego [13] na grande maioria dos jogos esta técnica não determina uma solução única.

Para Rêgo [13] vale a pena discutir o nível de conhecimento que requeremos dos jogadores quando aplicamos esta técnica de eliminação de estratégias estritamente dominadas. Agente 1 tem que saber que o agente 2 é racional. Agente 2 tem que saber que o agente 1 sabe que o agente 2 é racional. Não é suficiente saber que o outro agente é racional, também é necessário saber que o outro agente sabe que o primeiro é racional. É necessário conhecimento de ordens ainda maiores. Eu posso saber que meu adversário é racional e que ele sabe que eu sou racional. Mas pode ser que ele não saiba que eu sei que ele sabe. Quanto maior for a ordem do conhecimento, mais o processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas pode ser repetido. Se racionalidade for conhecimento comum podemos repetir este processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas infinitamente. Assumiremos que racionalidade é conhecimento comum na maior parte deste texto.

É importante observar que, para eliminar uma estratégia estritamente dominada basta supor que cada jogador seja racional. Para fazer uma eliminação iterativa, no entanto, é preciso supor conhecimento comum dessa racionalidade.

A eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas resulta no mesmo conjunto de estratégias, independentemente da ordem de eliminação. No entanto, isso não é verdade para a eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas. Segundo Rossi de Oliveira [14], isso ocorre porque o argumento para a eliminação desse tipo de estratégia, qual seja o de que cada jogador acredita que haja uma probabilidade positiva de que qualquer estratégia de seus rivais possa ser escolhida, é inconsistente com a lógica de eliminação iterativa, que assume que estratégias eliminadas são aquelas que não se espera que ocorram.

Observações:

1. Pode acontecer da técnica fornecer vários perfis ou, até mesmo, fornecer todo o espaço de estratégia, como é o caso da batalha dos sexos, onde não existem estratégias estritamente dominadas.

2. Apesar da maioria dos jogos não ter solução determinada por eliminação de estratégias estritamente dominadas, este processo nos leva a determinar que estratégias não deverão ser utilizadas caso a hipótese de conhecimento comum sobre racionalidade dos jogadores seja satisfeita.

3. Não especificamos a ordem na qual as estratégias devem ser eliminadas. Pode-se mostrar que a ordem de eliminação não importa. (Exercício) Intuição: Assuma que

você não eliminou todas as estratégias dominadas em algum passo da iteração. Você a eliminar á depois? Claro que sim, uma estratégia dominada permanecerá sendo dominada, o máximo que pode ter acontecido é que algumas outras estratégias dos outros agentes foram eliminadas, o que diminui as restrições na definição de estratégia dominada. O mesmo não é verdade para eliminação de estratégias fracamente dominadas.

Equilíbrio de Nash

“Equilíbrio de Nash: É uma jogada para a qual uma estratégia adotada também é a melhor resposta da outra pessoa.”

No equilíbrio de Nash, nenhum jogador se arrepende de sua estratégia, dadas as posições de todos os outros. Ou seja, um jogador não está necessariamente feliz com as táticas dos outros jogadores, apenas está feliz com a tática que escolheu em face das escolhas dos outros.

Segundo Tonelli [18], o objetivo da teoria dos jogos seria achar o ´´melhor”perfil de estratégia do jogo e o valor do pagamento do jogo neste perfil. O grande problema é: melhor em que sentido? Este não é um conceito fácil de definir, mas vamos trabalhar com o conceito de equilíbrio de Nash. Neste caso, encontramos um perfil de estratégias com que conseguimos convencer cada jogador separadamente de que não é bom ele mudar de estratégia.

Para a maioria absoluta dos jogos, onde não pode ser utilizado conceito de dominância, os que modelam jogos usam o conceito de *Equilíbrio de Nash*. Segundo Rasmusen [12], é o conceito mais importante e mais utilizado. Para introduzir o conceito de Equilíbrio de Nash, será apresentado o jogo dos Porcos Confinados de Baldwin & Meese (1979). Dois porcos (porco dominante G e o porco pequeno P) são colocados em confinamento (num espaço limitado) onde numa extremidade há um painel especial de controle e na outra extremidade há um dispenser de comida. Quando um porco pressiona o painel, a um custo (utilidade) u de 2 unidades monetárias, 10 unidades de comida são disponibilizadas pelo dispenser. Suponhamos que o porco G é “dominante”(que seja o maior o dominante), e se ele chega primeiro ao dispenser, ao outro porco (proco P) sobrarão apenas os restos no total de 1 unidade de comida. Se, ao contrário, o porco P chegar por primeiro ao dispenser, ele comerá 4 unidades de comida, e se ambos chegarem simultaneamente, o porco D comerá 3 unidades de comida.

Neste caso teremos os seguintes conjuntos

$G = \{Porco\ Dominante(G), Porco\ Pequeno(P)\}$, $S_G = \{Pressiona, Aguarda\}$, $S_P = \{Pressiona, Aguarda\}$, Para simplificar a notação, consideremos que $G = \{G, P\}$, $S_L = \{G_{Pr}, G_{Ag}\}$, $S_C = \{P_{Pr}, P_{Ag}\}$,

$S = \{(G_{Pr}, P_{Pr}), (G_{Pr}, P_{Ag}), (G_{Ag}, P_{Pr}), (G_A, P_{Ag})\}$

Assim, por exemplo, associado ao perfil de estratégias, que são $(Pressiona, Aguarda)$, resultará num *payoff* de 5 para o porco grande (10 unidades de comida menos as 3 unidades consumidas pelo porco pequeno e menos as 2 unidades devido o esforço de chegar ao dispenser) e de 1 unidade para o porco pequeno (3 unidades menos as 2 unidades devido o esforço). A tabela abaixo apresenta a matriz de *payoffs* associada a esse jogo.

$$A = \begin{array}{c} \\ G_{Pr} \\ G_{Ag} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_{Pr} & P_{Ag} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (5,1) & (4,4) \\ (9,-1) & (0,0) \end{array} \right] \end{array}$$

O jogo dos porcos confinados não apresenta estratégias dominantes, porque a escolha do que fazer por parte do porco dominante depende do que ele pensa que o pequeno fará. Se ele acredita que o porco pequeno irá pressionar o painel, o porco grande aguardará próximo ao dispensar; mas se ele acredita que o porco pequeno vai aguardar, o porco dominante irá pressionar o painel.

Neste exemplo há uma *dominância iterada* que é o perfil $(Pressionar, Aguardar)$. Este perfil será denominado de *Equilíbrio de Nash*.

O perfil de estratégias s^* é um *Equilíbrio de Nash* se não há incentivo para que nenhum jogador desvie da sua estratégia dado que os outros jogadores não desviam. Formalmente

$$\forall i, u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i}^*), \ \forall s_i^{'}. \tag{4.7}$$

A “ênupla”de estratégias s^* representa o equilíbrio de de Nash. Esse conceito de solução implica que nenhum participante se beneficia mudando sua estratégia em s^*, quando todos os demais mantêm as suas. Em outras palavras, no equilíbrio, nenhum agente tem estímulo para alterar unilateralmente a sua estratégia.

O perfil de estratégias do jogo do confinamento de porcos $(Pressionar, Aguardar)$ é o único *Equilíbrio de Nash*.

Conforme Rego [13], um perfi de estratégia é um equilíbrio de Nash se mesmo que um jogador saiba as estratégias que estão sendo usadas pelos demais, ele não tem incentivo a mudar sua estratégia porque sua estratégia é uma melhor resposta as estratégias dos demais jogadores. O equilíbrio é puro se os jogadores escolhem estratégias determinísticas e é estrito se qualquer desvio unilateral do equilíbrio causa um prejuízo ao jogador que desviar do equilíbrio.

Para alguns jogos é possível que exista algum equilíbrio de Nash que se destaque em relação aos demais, estes equilíbrios são chamados de *pontos focais*. Para Rasmusen [12], *pontos focais* são listas de Equilíbrios de Nash escolhidos por algum motivo psicológico. Ou seja, são determinados equilíbrios de Nash que apresentam preferências em relação a outros equilíbrios.

Para Rossi de Oliveira [14], antes de adotar o conceito de equilíbrio de Nash, é necessário perguntar se de fato é razoável supor que os jogadores fazem conjecturas corretas sobre como os demais jogadores irão jogar. Conforme Rossi de Oliveira, alguns argumentos para justificar essa adoção são os seguintes:

1. **O equilíbrio de Nash é uma consequência da inferência racional dos jogadores**. Esse argumento sugere que a racionalidade dos agentes implica que eles serão capazes de prever corretamente as ações dos outros jogadores.

2. **Se há um único resultado previsto para o jogo, esse resultado é um equilíbrio de Nash**. Isso ocorre porque os jogadores, sendo racionais, percebem que aquele é o resultado previsto e, portanto, não querem desviar-se dele, o que caracteriza o equilíbrio de Nash.

3. **O Equilíbrio de Nash como um contrato auto sustentável**. Essa justificativa supõe que os jogadores podem comunicar-se entre si antes do jogo e concordar em jogar uma determinada combinação de estratégias. Para que esse acordo tenha sucesso, é necessário que ele seja auto sustentável, ou seja, represente um equilíbrio de Nash. No entanto, mesmo que os jogadores tenham *a priori* concordado em seguir as estratégias de um equilíbrio de Nash, isso não garante que eles o cumprirão se esperarem que outros não o cumpram. Portanto, essa explicação sustenta que o contrato torna-se um ponto focal.

4. **O Equilíbrio de Nash como uma convenção social estável**. Quando o jogo é jogado repetidamente e uma determinada convenção social se impõe, uma determinada forma de jogar o jogo pode surgir, tornando-se o seu ponto focal.

Basicamente, a conclusão a que chegamos a partir da discussão do conceito de equilíbrio de Nash é de que ele é uma condição necessária para uma forma óbvia de jogar o jogo, se essa forma óbvia existir.

Para um perfil de equilíbrio, se um jogador mudar sozinho de estratégia ele não pode aumentar seu *payoff*, e corre o risco de rebaixar o ganho individual. Pode existir um perfil em que todos os jogadores ganham mais que num perfil de equilíbrio, mas aí cada jogador precisaria do auxílio dos outros.

É também importante enfatizar que nem todo jogo apresenta uma maneira óbvia de jogar, como é o caso do jogo abaixo se os dois jogadores não têm como comunicar-se entre si. Neste caso, é importante observar que, quando o jogo não admite uma maneira óbvia de jogar, o equilíbrio de Nash pode não ser o resultado mais razoável, isto é, aquele que os indivíduos de fato jogariam. No jogo abaixo,

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} (200,6) & (3,5) & (4,3) & (0,-1000) \\ (0,-1000) & (5,-1000) & (6,3) & (3,2) \end{array} \right] \end{array}$$

por causa dos *payoffs* altamente negativos possíveis para outras estratégias, o jogador C só jogaria algo diferente de C_3 se tivesse bastante certeza do comportamento do jogador L. Dado isso, (L_2, C_3) é um resultado bastante freqüente em jogos experimentais, embora não possa ser considerada uma maneira óbvia de jogar. Considerando as estratégias puras, em nenhum dos equilíbrios de Nash (L_1, C_1) e (L_2, C_4), o jogador C joga C_3.

Portanto, para Rossi Oliveira [14], o equilíbrio de Nash não deveria influenciar a escolha do resultado provável do jogo quando não há uma maneira óbvia de jogá-lo.

Algumas vezes pode-se usar os valores dos *payoffs* para escolher dentre os equilíbrios de Nash. No próximo jogo (Rasmusen [12]) há dois jogadores: Smith e Jones. Eles estão tentando decidir se irão vender micros com HD´s compatíveis ou não. Ambos os jodadores irão vender mais computadores se os seus discos forem compatíveis.

$G = \{Smith, Jones\}$, $S_S = \{grande, pequeno\}$, $S_J = \{grande, pequeno\}$,

$S = \{(grande, grande), (grande, pequeno), (pequeno, grande), (pequeno, grande)\}$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} J_1 & J_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (2,2) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,1) \end{array} \right] \end{array}$$

Nesta classe de jogos os *payoffs* são similares para todos os jogadores para qualquer perfil de estratégias. Esta classe de jogos geralmente é denominada de *Coordination Games*.

4.3 Critério MIN-MAX

4.4 Estratégias Mistas

Até neste momento, adotou-se a hipótese que os jogadores escolhem ou não escolhem determinadas estratégias (*estratégias puras*. Este é apenas um caso extremo dentre diversas possibilidades, em alguns casos é interessante dispensar tal hipótese. É interessante considerar casos onde ao invés de escolher uma determinada estratégia (*estratégia pura*), o jogador escolhe uma *distribuição de probabilidade* das possíveis estratégias puras, chamada *estratégia mista*. Desta forma, uma estratégia pura pode ser vista como uma estratégia mista onde a probabilidade de escolher uma determinada estratégia é 1.

Assim, uma estratégia mista de um jogador consiste em selecionar uma estratégia de forma aleatória, atribuindo probabilidades às estratégias pertencentes ao espaço de estratégias desse jogador.

Uma estratégia mista é uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias disponíveis para um jogador. Em outras palavras, uma estratégia mista supõe probabilidades para as estratégias puras. Do exposto, podemos concluir que estratégias puras são casos especificos de estratégias mistas, onde uma estratégia é escolhida com 100% de probabilidade.

IntroTeoriaDosJogos 00 Rasmusen pág 69

t28296 113tjcfc

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, Fábio Portela Lopes de *A teoria dos jogos: uma fundamentação teórica dos métodos de resolução de disputa*, Estudos de Arbitragem Mediação e Negociação, Vol.2, Capítulo 14, Brasília, março de 2003

[2] Bazzan, A.L.C., *Coordenação de Agentes com Técnicas de Teoria dos Jogos (curso JAIA 2001)*, Instituto de Informática, UFRGS (bazzan@inf.ufrgs.br) http://www.inf.ufrgs.br/ bazzan/jaiaGT.pdf

[3] Boretolossi, J.H., Sartini, B.A., Garbugio, G.G., Santos, P.A. e Barreto, L.S., *Uma introdução a Teoria dos Jogos*, II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 2004

[4] Chaves Neto, Anselmo *Notas de Aula da disciplina "CE-715 Probabilidade e Estatística Matemática I"*, Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná, 2012

[5] Costa, Carlos Arriaga, *Introdução à teoria de jogos - o que é a teoria de jogos*, Universidade do Minho - Escola de Economia e Gestão, Portugal carlosarriag@gmail.com, http://www1.eeg.uminho.pt/economia/caac/pagina20pessoal/Disciplinas/Disciplinas2004/jogos.pdf

[6] Cusinato, Rafael Tiecher *Teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade Esperada: conceitos analíticos e paradoxos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, Porto Alegre, 2003.

[7] Domingues, Edson *Microeconomia A III - Aula 6 - Incerteza* http://www.cedeplar.ufmg.br

[8] Dresher, Melvin, *The mathematics of games of strategy : theory and applications* New York : Dover, 1981.

[9] Koçkesen, Levent *Game Theory Lecture Notes*, Department of Economics, Koç University, Istanbul

[10] McKinsey, J.C.C., *Introduccion a la teoria matematica de los juegos*, Madri : Aguilar, 1960.

[11] Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L., *Microeconomia*, São Paulo : Prentice Hall do Brasil, 2005.

[12] Rasmusen, Eric *GAMES AND INFORMATION, FOURTH EDITION: An Introduction to Game Theory*, Basil Blackwell, 4th ed, 2005.

[13] Rêgo, Leandro Chaves Rêgo *Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Teoria dos Jogos*, Recife, Março de 200.

[14] Rossi de Oliveira, André Luís (arossi@unb.br) *Anotações de Aula*, Programa de Pós-Graduação, Departamento de Economia, UNB, 2007.

[15] Marcelo M. Saraiva *Ficha 1 Introdução à Teoria dos Jogos e Modelos de Jogos*, Fortium Grupo Educacional, 01/03/2010

[16] Schultz, Martin T., Kenneth N. Mitchell, Brian K. Harper and Todd S. Bridges *Decision Making Under Uncertainty* Prepared for U.S. Army Corps of Engineers Washington, DC, 2010

[17] Teixeira, Ianara *Estratégia aplicada - Teoria dos Jogos - Apostila-texto com os conteúdos de aula*, IPESU, 2009

[18] Tonelli, Pedro Aladar *Um Minicurso em Teoria dos Jogos*, Departamento de Matemática Aplicada, USP, Semana de Matemática Aplicada FFCLRP-USP, 2006.

[19] Webb, James N. *Game Theory - Decisions, Interaction and Evolution*, London, UK, Sringer-Verlag London, 2007.

[20] Zuben, Fernando J. Von, *Teoria dos Jogos*, DCA/FEEC/Unicamp.

[21] Zugman, Fábio, *Teoria dos Jogos - Uma introdução à disciplina que vê a vida como uma seqüência de jogos* http://pt.scribd.com/doc/20824508/introducao-teoria-dos-jogos