

21 – PÓS-OTIMIZAÇÃO – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Geralmente, além de resolver o problema para obter a solução ótima, também é importante analisar em quais condições a solução ótima de um ppl é válida, e o que aconteceria se os dados do problema sofrem alterações (mudança de preços, alterações nas restrições, etc.). Este tipo de estudo e interpretação dos resultados é chamado de *análise de sensibilidade*, isto é, quão sensível é a solução respeito às mudanças nos dados.

Quando estudamos o simplex revisado vimos que:

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \text{ (solução geral)}$$

$$\bar{Z} = c_B x_B + c_N x_N = c_B (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

$$\bar{Z} - (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = c_B B^{-1}b$$

Portanto, em qualquer iteração, os coeficientes atualizados da função objetivo e os valores das variáveis básicas podem ser obtidos através das expressões

$$\bar{c}_j = -c_j + c_B B^{-1}A_j \quad \text{e} \quad x_B = \bar{b} = B^{-1}b$$

onde c_j, c_B, A_j são coeficientes do ppl e B^{-1} é a matriz inversa retirada do quadro ótimo.

Estas expressões podem ser usadas para estudar o efeito na solução ótima da mudança em coeficientes da função objetivo e mudanças no conjunto de restrições.

MUDANÇAS EM c_j

Exemplo: Seja o seguinte pl

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 &\leq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

cujas solução ótima é

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1			1	24
x_3^*	1		1	0	3
x_2^*	2/3	1		1/3	8

a) Suponhamos que a função objetivo passou para $Z = (\frac{3}{2})x_1 + 3x_2$. A solução continua a mesma?

$$\bar{c}'_1 = -c'_1 - c_B B^{-1}A_1 = -\frac{3}{2} - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} + (0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

b) Suponhamos que a função objetivo passou para $Z = 3x_1 + 3x_2$. Qual a nova solução básica?

$$\bar{c}'_1 = -c'_1 - c_B B^{-1} A_1 = -3 - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + (0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Usar simplex para determinar a nova solução

c) Se $c'_2 = 1$, Qual a nova solução básica?

$$\bar{c}'_2 = -c'_2 - c_B B^{-1} A_2 = -1 - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + (0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{muda base}$$

O quadro final será

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	2		1	24
x_3^*	1		1	0	3
x_2^*	2/3	1		1/3	8

Base	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1/3			1/3	8
x_3^*	1		1	0	3 $\rightarrow$
x_2^*	2/3	1		1/3	8

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			1/3	1/3	9
x_1^*	1		1	0	3
x_2^*		1	-2/3	1/3	6

MUDANÇAS EM b_j

Seja o seguinte ppl primal:

$$\begin{aligned} \max Z = & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O quadro final (ótimo) é:

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	b
Z			1/3	1/3	9
x_1^*	1		1	0	3
x_2^*		1	-2/3	1/3	6

- d) Suponhamos que b_1 e b_2 passem para 1 e 18, respectivamente. Então deve-se atualizar os novos valores das variáveis básicas segundo o novo b .

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

- e) Qual o menor valor de b_2 tal que a solução permaneça ótima?

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 + \theta/3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \therefore \theta \geq 6$$

- f) Suponhamos que b_1 e b_2 passem para 2 e 3, respectivamente. Então

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Base	x_1	x_2	$F_1 \downarrow$	F_2	b
Z			1/3	1/3	5/3
x_1^*	1		1	0	2
x_2^*		1	-2/3	1/3	-1/3 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	b
Z		1/2		1/2	1/2
x_1^*	1	3/2		1/2	1/2
F_1^*		-3/2	1	-1/2	1/2

EXEMPLO 1

Seja

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad &\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1 \\ &\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b
Z	-2	-3	-1			
F_1	1/3	1/3	1/3	1		1
F_2	1/3	4/3	7/3		1	3

Quadro ótimo

Base	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	b
Z			3	5	1	8
x_1	1		-1	4	-1	1
x_2		1	2	-1	1	2

a) Cálculo do Coeficiente atualizado na Função Objetivo – Variável Básica

$$\bar{C}_B = (-2-3) - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = -(-2-3) + (2,3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$

b) Cálculo do Coeficiente atualizado na Função Objetivo – Variável Não Básica

$$\bar{C}_N = (-1,0,0) - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(-2-3) + (2,3) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (3,5,1)$$

c)

d) Variação de coeficiente na Função Objetivo para não mudar solução ótima – Variável BásicaQual a variação do coeficiente da variável básica x_2 (c_2) tal que a solução ótima não mude

$$\bar{C}_N = (-1,0,0) - (-2-c_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow 2 \leq c_2 \leq 8$$

e) Variação de coeficiente na Função Objetivo para não mudar solução ótima – Variável Não BásicaQual a variação do coeficiente da variável não básica x_3 (c_3) tal que a solução ótima não mude

$$\bar{C}_N = (-c_3,0,0) - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow c_3 \leq 4$$

f) Mudanças no vetor b

- Suponha que $b=(1,3)$ passou para $b'=(1,2)$

$$\bar{b}' = B - B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow \text{não muda a base}$$

- Suponha que $b=(1,3)$ passou para $b''=(1,8)$

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{como } \bar{b}''_1 < 0, \text{ então usar o método dual simplex}$$

- Qual a faixa de variação de b_1 tal que a base não muda

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4b_1 - 3 \geq 0 \\ -b_1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq b_1 \leq 3$$

g) Acréscimo de variável – vale a pena acrescentar um novo produto?Suponhamos um novo produto com preço de venda de 3,00 R\$ e o vetor consumo $A_4 = (1,1)$.

$$\bar{c}_4 = -3 - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + (2,3) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 + 6 = 3 > 0 \rightarrow \text{não compensa produzir}$$

h) Acréscimo de nova restrição: Fazer o pivoteamento. Se necessário, usar dual simplex

- $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow$ a solução permanece ótima
- $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \rightarrow$ a solução não permanece ótima $\rightarrow$ usar dual simplex
- $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \end{cases}$

EXEMPLO 2 (www.feg.unesp.br/~fmarins/po-i/slides/CapituloII_6_1.pptb)

Num laboratório farmacêutico são fabricados 3 produtos, passando por 3 operações diferentes. O tempo (em horas) requerido por cada unidade de cada produto, a capacidade diária de cada operação (em h/dia) e o lucro unitário por unidade vendida de cada produto (em Euros) são as seguintes:

	Tempo por Unidade Produzida			Capacidade
	Produto 1	Produto 2	Produto 3	
Operação 1	2	3	1	5
Operação 2	4	1	2	11
Operação 3	3	4	2	8
Lucro Unitário	5	4	3	

A formulação do ppl é a seguinte

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
 \text{sa} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 5 \\
 & 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Na forma canônica (padrão)

Pós-Otimização. Exemplo.

The diagram illustrates the canonical form of the linear programming problem. It includes the objective function and constraints, with variables defined in text boxes:

- x_1 - produção diária do produto 1
- x_2 - produção diária do produto 2
- x_3 - produção diária do produto 3
- F_1 - não utilização da capacidade diária da operação 1
- F_2 - não utilização da capacidade diária da operação 2
- F_3 - não utilização da capacidade diária da operação 3

The canonical form is presented as follows:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
 & \text{sujeito a} \quad x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + F_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + F_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Pós-Otimização. Exemplo. Soluções ótimas primal e dual.

a) Descreva as soluções ótimas primal e dual e justifique-as, economicamente, utilizando a complementaridade de folgas

$\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

$\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$x_1 \cdot y_4 = 2 \times 0 = 0$

$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 1 = 0$

$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 3 = 0$

$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$

$x_3 \cdot y_6 = 1 \times 0 = 0$

$x_6 \cdot y_3 = 0 \times 1 = 0$

		B^{-1}						
	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

valores simétricos dos valores das variáveis de folga duais

Valores simétricos dos valores das variáveis de decisão duais

Interpretação econômica das soluções ótimas utilizando a complementaridade das folgas (1).

Primal: $\mathbf{X}^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

Dual: $\mathbf{Y}^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$$x_1^* \cdot y_4^* = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 2 \cdot 0 = 0$$

Referente à produção do produto 1:

Devem ser manufacturadas 2 unidades do produto 1 diariamente, sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do produto 1 igual ao seu lucro unitário

**Interpretação econômica das soluções ótimas
utilizando a complementaridade das folgas (2).**

Primal: $X^* = (2, \underline{0}, 1, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, \underline{3}, 0)$

$x_2^* \cdot y_5^* = 0$

$0 \cdot 3 = 0$

Referente à produção do produto 2:

A produção do produto 2 não é contemplada, pois a valorização interna atribuída às horas que seriam gastas nas operações para produzir uma unidade do produto 2 é maior do que o seu lucro unitário.

**Interpretação econômica das soluções ótimas
utilizando a complementaridade das folgas (3).**

Primal: $X^* = (2, 0, \underline{1}, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, \underline{0})$

$x_3^* \cdot y_6^* = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

Referente à produção do produto 3:

Deve ser manufacturada 1 unidade do produto 3 diariamente, sendo a valorização interna atribuída às horas gastas nas operações para produzir uma unidade do produto 3 igual ao seu lucro

**Interpretação econômica das soluções ótimas
utilizando a complementaridade das folgas (4).**

Primal: $X^* = (2, 0, 1, \mathbf{0}, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (\mathbf{1}, 0, 1, 0, \mathbf{3}, 0)$

$F_1^* \cdot y_1^* = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

Referente ao recurso 1:

O *preço sombra* (valorização interna) de uma hora por dia na operação 1 é positivo e igual a 1 Euro, pelo fato deste ser *um recurso escasso*, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 1 (5 h/dia) está esgotada.

A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de 1 Euro no valor do lucro total.

**Interpretação econômica das soluções ótimas
utilizando a complementaridade das folgas (5).**

Primal: $X^* = (2, 0, 1, 0, \mathbf{1}, 0)$

Dual: $Y^* = (1, \mathbf{0}, 1, 0, \mathbf{3}, 0)$

$F_2^* \cdot y_2^* = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

Referente ao recurso 2:

O *preço sombra* (valorização interna) de uma hora por dia na operação 2 é *nulo*, pelo fato deste ser *um recurso abundante*, do qual sobra 1 hora diária do total das horas disponíveis para esta operação (11 h/dia).

O tempo diário não utilizado na operação 2 é de 1 hora.

Interpretação econômica das soluções ótimas utilizando a complementaridade das folgas (6).

Primal: $X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

Dual: $Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$

$F_3^* \cdot y_3^* = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

Referente ao recurso 3:

O preço sombra (valorização interna) de uma hora por dia na operação 3 é positivo e igual a 1 Euro, pelo fato deste ser um recurso escasso, do qual não há sobras, i.e., a capacidade diária para a operação 3 (8 h/dia) está esgotada.

A disponibilidade adicional de 1 hora diária na operação 1 possibilitaria um incremento de 1 Euro no valor do lucro total.

Pós-Otimização. Exemplo. Alteração dos termos independentes.

- b) Analise as consequências econômicas e de produção que decorrem se a capacidade diária da operação 3 passar de 8 h/dia para 12 h/dia.

$X_B^* \rightarrow X_B^* + B^{-1}\Delta b, \Delta b = (0, 0, 4)$

$$\begin{bmatrix} X_B^* \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-1} \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{nova } X_B^* \\ \text{nova } b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

Como a nova solução é primal não admissível e dual admissível (as linhas dos custos reduzidos não sofreram alteração) pode ser aplicado o algoritmo dual simplex para atingir uma solução ótima admissível.

Pós-Otimização. Exemplo.
Alteração dos termos independentes.

$X^* = (0, 0, 5, 0, 1, 2)$

$Y^* = (3, 0, 0, 1, 5, 0)$

$x_1 \cdot y_4 = 0 \times 1 = 0$

$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 3 = 0$

$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 5 = 0$

$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$

$x_3 \cdot y_6 = 5 \times 0 = 0$

$x_6 \cdot y_3 = 2 \times 0 = 0$

	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	-2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	9
	z_j	5	7	3	1	0	1	17
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	
0	x_6	-1	-2	0	-2	0	1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	2	3	1	1	0	0	5
	z_j	6	9	3	3	0	0	15
	$c_j - z_j$	-1	-5	0	-3	0	0	

Pós-Otimização. Exemplo.
Alteração dos coeficientes da f.o.

c) Analise as consequências econômicas e de produção que decorrem se o lucro unitário do produto 1 passa de 5 a 7 Euros.

$$c_1 \rightarrow c_1 + \Delta c_1 = 5 + 2 = 7$$

	c_j	5	4	3	0	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

	c_j	7	4	3	0	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
7	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	$c_j - z_j$	0	-7	0	-5	0	1	17

Como a solução admissível primal deixa de ser ótima (existe um custo reduzido positivo) pode ser aplicado o algoritmo primal simplex para determinar uma nova solução ótima.

Pós-Otimização. Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o.

$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)$		C_j	7	4	3	0	0	0		
$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$		C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
7	x_1	1	2	0	2	0	-1	2		
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1		
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1		
	z_j	7	11	3	5	0	-1	17		
	$C_j - z_j$	0	-7	0	-5	0	1			
7	x_1	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2		
0	x_5	0	-5	0	-2	1	0	1		
0	x_6	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2		
	z_j	7	21/2	7/2	7/2	0	0	35/2		
	$C_j - z_j$	0	-13/2	-1/2	-7/2	0	0			

$x_1 \cdot y_4 = 5/2 \times 1 = 0$

$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 7/2 = 0$

$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 13/2 = 0$

$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$

$x_3 \cdot y_6 = 0 \times 1/2 = 0$

$x_6 \cdot y_3 = 1/2 \times 0 = 0$

$$x_1 \cdot y_4 = 5/2 \times 1 = 0$$

$$x_4 \cdot y_1 = 0 \times 7/2 = 0$$

$$x_2 \cdot y_5 = 0 \times 13/2 = 0$$

$$x_5 \cdot y_2 = 1 \times 0 = 0$$

$$x_3 \cdot y_6 = 0 \times 1/2 = 0$$

$$x_6 \cdot y_3 = 1/2 \times 0 = 0$$

Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação econômica.

Plano ótimo antes do incremento

$$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$

$$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

O lucro unitário do produto 1 passa de 5 para 7 Euros

Plano ótimo depois do incremento

$$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2), \quad z^* = 17,5$$

$$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$$

Referente à produção:

Ao incrementar o lucro unitário do produto 1 de 5 Euros para 7 Euros, o novo plano ótimo:

- ▶ contempla a produção diária de 2,5 unidades do produto 1

evidentemente a perda de oportunidade da produção duma unidade do produto 1 é nula ($y_4=0$)

- ▶ não contempla a produção dos produtos 2 e 3

as perdas de oportunidade da produção duma unidade do produto 2 e do produto 3 são positivas e iguais a 6,5 Euros e 0,5 Euros respectivamente ($y_5=13/2, y_6=1/2$).

Economicamente é **vantajoso** este incremento do lucro unitário do produto 1, pois obtém-se um incremento de **4,5 Euros** no lucro total diário.

Exemplo. Alteração dos coeficientes da f.o. Interpretação econômica.

Plano ótimo antes do incremento

$$X^* = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad z^* = 13$$

$$Y^* = (1, 0, 1, 0, 3, 0)$$

O lucro unitário do produto
1 passa de 5 para 7 Euros

Plano ótimo depois do incremento

$$X^* = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2), \quad z^* = 17,5$$

$$Y^* = (7/2, 0, 0, 0, 13/2, 1/2)$$

Referente aos recursos:

- ▶ O **recurso 1** continua sendo um **recurso escasso** e o seu preço sombra aumenta de 1 para 3,5 Euros por h/dia ($x_4=0, y_1=7/2$).
*a capacidade de produção da operação 1 mantém-se esgotada, sendo utilizada ao seu nível máximo disponível para a produção de um único produto: o produto 1 (2 h/dia * 2,5 unidades do produto 3 = 5 h/dia)*
- ▶ O **recurso 2** continua sendo um **recurso abundante** pelo que o seu preço sombra continua nulo ($x_5=1, y_2=0$).
no novo plano também sobra 1 hora da operação 2
- ▶ O **recurso 3** passa de **recurso escasso** para **recurso abundante** pelo que o seu preço sombra é agora nulo ($x_6=1/2, y_3=0$).
no novo plano sobram agora 0,5 horas da operação 3, e o seu preço sombra cai de 1 até zero ($y_3=1 \rightarrow y_3=0$)

$$\text{O lucro total } z^* = c_1 x_1 = 7 \cdot 2,5 = 17,5 \text{ Euros} = b_1 y_1 = 5 \cdot 3,5 = w^*$$