

EXERCÍCIO RESOLVIDO DE ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma empresa necessita produzir os produtos A e B que vende com margem de lucro unitário médio de 3,00 R\$ e 2,00 R\$ respectivamente

São utilizadas duas matérias primas (Horas Máquina e Horas de Trabalho) cujas disponibilidades e consumos unitários são os seguintes:

	A	B	Disponível
Máquinas (h)	2	1	100
Trabalho (h)	1	1	80

A empresa quer que a produção total seja no máximo 40 unidades do produto A. Deseja-se, maximizar o lucro. O ppl associado a esta decisão é

$$\max Z = 3x_A + 2x_B$$

$$s.a \quad 2x_A + 1x_B \leq 100$$

$$1x_A + 1x_B \leq 80$$

$$1x_A \leq 40$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

$$\max Z = 3x_A + 2x_B$$

$$s.a \quad 2x_A + 1x_B + F_1 = 100$$

$$1x_A + 1x_B + F_2 = 80$$

$$1x_A + F_3 = 40$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

A solução ótima é mostrada no quadro

Base	x_A	x_B	F_1	F_2	F_3	b
Z	0	0	1	1	0	180
x_B	0	1	-1	2	0	60
F_3	0	0	-1	1	1	20
x_A	1	0	1	-1	0	20

Questões

1. Quais recursos são escassos? Justifique.

Resposta: Como $F_1=F_2=0$, então os recursos escassos são Horas Máquina e Horas de Trabalho.

2. Se alguém quisesse adquirir uma unidade do recurso R_1 , você estaria disposto a vender? Qual o preço que compensa a venda? Justifique.

Resposta: Estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que uma redução em uma unidade do recurso R_1 reduz o valor da função objetivo em 1,00 R\$ ($y_1=1$)

3. Se alguém insistir em comprar uma unidade do recurso R_2 , que preço de venda compensaria o fato dele ser escasso? Justifique.

Resposta: Análogo à questão 2, estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que a redução em uma unidade do recurso R_2 , leva ao decréscimo do valor da função objetivo em 1,00 R\$ ($y_2=1$)

4. Construa o modelo Dual do problema e obtenha a sua solução (do Dual).Resposta:

$$\min D = 80x_A + 100y_2 + 40y_3$$

$$s.a \quad 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 3$$

$$1y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

A solução ótima do Dual deve ser extraída do quadro ótimo do primal. $y_1^* = 1$, $y_2^* = 1$, $y_3^* = 0$, $E_1^* = 0$, $E_2^* = 0$, $D^* = 180$

5. O que significa a variável dual y_1 ?Resposta:

- É o preço mínimo pelo qual deverá ser vendida uma unidade do recurso R_1 .
- É o preço máximo que se deve pagar por uma unidade adicional do recurso R_1 .
- É o acréscimo no valor da função objetivo se ocorrer a adição de uma unidade do recurso R_1 .
- É o valor que a função objetivo vai decrescer se ocorrer uma redução de uma unidade do recurso R_1 .

6. Quanto você pagaria por uma unidade adicional do recurso R_3 ? Por que?

Resposta: Pagaria no máximo 0,00 R\$ ($y_3 = 0$). Pagaria no máximo 0,00 R\$ pois já há sobra deste recurso ($F_3=20$).

7. Qual a faixa de variação do coeficiente de x_A (c_A) na função objetivo tal que a solução ótima não mude?Resposta:

$$\bar{C}_N = (0,0) - (-2,0, -c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{C}_N = (2,0, c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 + c'_A \geq 0 \\ 4 - c'_A \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'_A \geq 2 \\ c'_A \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq c_A \leq 4$$

8. Qual a faixa de variação do coeficiente de F_1 na função objetivo tal que a solução ótima não mude?Resposta:

$$\bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} - (-2,0,-3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} + (2,0,3) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow -c'_{F_1} + 1 \geq 0 \Rightarrow c'_{F_1} \leq 1$$

9. Suponha, então que a disponibilidade do segundo recurso (b_2) reduziu de 80 para 40 unidades. A solução ótima muda? Se sim, qual a nova solução?

Resposta: O vetor de recursos $(100, 80, 40)^T$ passou para $b' = (100, 40, 40)^T$

$$\bar{b}' = B - B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ F_3 \\ x_A \end{pmatrix}$$

Como esta solução é inviável deve-se usar o algoritmo dual-simplex para “tentar” encontrar uma solução viável. Antes deve-se calcular o novo valor da função objetivo: $Z=140$

Base	x_A	x_B	$\downarrow F_1$	F_2	F_3	b
Z	0	0	1	1	0	140
x_B	0	1	1	2	0	-20 $\rightarrow$
F_3	0	0	-1	1	1	-20
x_A	1	0	1	-1	0	60

Base	x_A	x_B	F_1	F_2	F_3	b
Z	0	1	0	3	0	120
x_B	0	-1	1	-2	0	20
F_3	0	-1	0	-1	1	0
x_A	1	1	0	1	0	40

Neste caso a solução ótima muda, e passa a ser $x_A = 40$, $x_B = 20$, $Z = 120$

10. Qual a faixa de variação do primeiro recurso (b_1) para que a base ótima não mude.

Resposta: O vetor de recursos $(100, 80, 40)^T$ passou para $b'' = (b_1'', 40, 40)^T$

$$\bar{b}'' = B - B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1'' \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -b_1'' + 160 \\ -b_1'' + 80 + 40 \\ b_1'' - 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_1'' + 160 \geq 0 \\ -b_1'' + 80 + 40 \geq 0 \\ b_1'' - 80 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1'' \leq 160 \\ b_1'' \leq 120 \\ b_1'' \geq 80 \end{cases} \Rightarrow 80 \leq b_1'' \leq 120$$