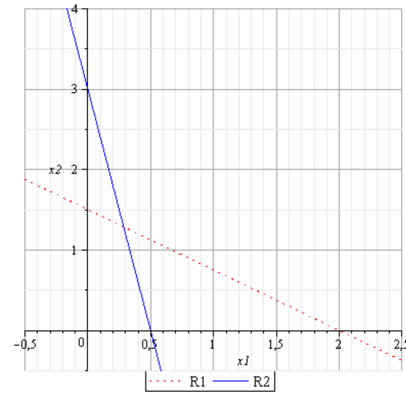
$$\begin{array}{llll} \max\ Z = & 2x_1 + 1x_2 & \max\ Z = & 2x_1 + 1x_2 \\ sa & 3x_1 + 4x_2 \le 6 & sa & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 \le 3 & & 6x_1 + 1x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$



<u>SOLUÇÃO VIA SIMPLEX REVISADO</u>

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \ \ (\text{solução geral})$$

$$\overline{Z} = c_B x_B + c_N x_N = c_B\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N x_N = c_B B^{-1}b + \left(c_N - c_B B^{-1}N\right)x_N$$

<u>Iteração 0)</u>

- $x_B = (x_3, x_4) \ \Rightarrow x_N = (x_1, x_2)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-2\ -1) - (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = (-2\ -1)$$

<u>Iteração A)</u>

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_1 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

Atualizar *b* e A_1 para usar o teste do bloqueio

$$\overline{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\overline{b}_R}{\overline{a}_{RS}} = \min_j\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{jS}},\ \overline{a}_{jS} > 0\right\}\right)$$

$$\min_j\left\{\frac{6}{3}, \frac{3}{6}\right\} = \frac{3}{6} \Rightarrow x_4 \text{ sai da base}$$

- $x_B = (x_3, x_1) \Rightarrow c_B = (0, -1) \ \Rightarrow \ x_N = (x_2, x_4)$

- $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_3\\ x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-1,0)-(0,-2)\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

<u>Iteração B)</u>

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_2 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?
  Atualizar *b* e A_2 para usar o teste do bloqueio

$$\bar{A}_2 = B^{-1}A_2=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix},\ \bar{b}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

x_3 sai da base

- $x_B=(x_2,x_1) \quad \Rightarrow x_N=(x_3,x_4)$
- $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{7}\\ \frac{2}{7}\end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (0,0)-(-1,-2)\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(\frac{4}{21},\frac{5}{21}\right)$$

<u>Iteração C)</u>

- Solução Ótima? **SIM**
- $(x^*{}_1,x^*{}_2,x^*{}_3,x^*{}_4)=\left(\frac{2}{7},\frac{9}{7},0,0\right) \Rightarrow Z^*=\frac{13}{7}$
- $Z^* = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = (-2,-1)\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}+0=\frac{13}{7}$

Fonte:
http://amath.colorado.edu/courses/4120/2009Spr/supplements/Chap5WorkedExampleofRevisedSimplexMethod.htm

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis x_4 e x_5 como variáveis de folga as respectivas restrições. A forma aumentada para o modelo então é

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando matrizes, temos

$$c = [4,3,6,0,0],\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = [30,40]^T,\ x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$$

SOLUÇÃO VIA SIMPLEX REVISADO

Iteração 0)

Como x_4 e x_5 são as variáveis básicas iniciais,

- $IB = (x_4, x_5) \Rightarrow INB = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow c_B = (0,0)$ e $c_N = (-4,-3,-6)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,-3,-6) - (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-4,-3,-6)$$

Iteração A)

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_3 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

  Atualizando b e A_1 para usar o teste do bloqueio

$$\bar{A}_3 = B^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\bar{b}_R}{\bar{a}_{RS}} = \min_j \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{jS}},\ \bar{a}_{jS} > 0 \right\} \right) \qquad \min_j \left\{ \frac{30}{3}, \frac{40}{3} \right\} = \frac{30}{3} \Rightarrow x_4 \text{ sai da base}$$

- $IB = (x_3, x_5) \quad \Rightarrow \; INB = (x_1, x_2, x_4) \Rightarrow c_B = (-6,0)$ e $c_N = (-4,-3,0)$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,-3,0) - (-6,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (2,-1,2)$$

<u>Iteração B)</u>

- Solução ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_2 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

  Atualizar *b* e A_2 para usar o teste do bloqueio

$$\bar{A}_2 = B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\min_j \left\{ \frac{10}{1/3}, \frac{10}{1} \right\} = \frac{10}{1} \; \Rightarrow \; x_5 \text{ sai da base}$$

- $IB = (x_3, x_2) \quad \Rightarrow \; INB = (x_1, x_4, x_5) \Rightarrow c_B = (-6,-3)$ e $c_N = (-4,0,0)$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,0,0) - (-6,-3) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

<u>Iteração C)</u>

- Solução Ótima? **SIM**
- $x_B = \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{pmatrix}$
- $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(0, \frac{20}{3}, 10, 0, 0 \right) \Rightarrow \; Z^* = 70$
- $Z^* = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N = (-6,-3) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} + 0 = -70$