UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Erros – Erros Numéricos

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Erros Numéricos

Muitos problemas podem ser formulados em equações matemáticas simples.

Isso não significa, que elas podem ser resolvidas facilmente!

Para qualquer aplicação, usa-se números $\Rightarrow$ Métodos Numéricos!

Necessário para um grande número de operações:

a) exp(3) (e^3)
b) sqrt (7) ($\sqrt{7}$)
c) sin(42º) ($\mathrm{seno}(42)$)
d) pi (π)

Muitas vezes, modelagem e cálculos numéricos podem ajudar no design, construção, segurança.

Erros Numéricos

$\sqrt{2}$ é numero irracional. Não existe uma forma de representá-lo com número finito de algarismos

$$\sqrt{2} = 1{,}1442213562\ \ldots$$

$$\sqrt{2} \approx 1{,}1442213562$$

Erro é a diferença entre o valor exato e o valor apresentado.

Erros Numéricos

Erro absoluto

Seja x’ uma aproximação à quantidade exata/verdadeira x. Então:

O **erro absoluto** Δx em x’ é definido por $\Delta x = |x - x'|$

Exemplo A:

Resultado da operação:	2123542,7
Valor Real:	2123544,5
Erro absoluto:	1,8

Exemplo B:

Resultado da operação:	0,234
Valor Real:	0,128
Erro absoluto:	0,106

Erros Numéricos

Erro relativo

Seja x' uma aproximação à quantidade exata/verdadeira x. Então:

O **erro relativo** em x' é definido por $\dfrac{\Delta x}{x} = \left|\dfrac{x - x'}{x}\right|$

Exemplo A:

Resultado da operação:	2123542,7
Valor Real:	2123544,5
Erro absoluto:	1,8
Erro relativo:	0,000008 (0,0008%)

Exemplo B:

Resultado da operação:	0,234
Valor Real:	0,128
Erro absoluto:	0,106
Erro relativo:	0,83 (83%)

Erros Numéricos

Fonte de Erros

a) Erros iniciais
b) Erros de programação e de modelagem
c) Erro de truncamento

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ (truncando)

$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} = 2{,}5$ (calculando valor aproximado de exp(1))

erro absoluto: $\Delta x = |2{,}718 - 2{,}5| = 0{,}218$

o erro relativo é igual $\left|\frac{0{,}218}{2{,}718}\right| = 0{,}08\ (8{,}0\%)$

Erros Numéricos

Fonte de Erros

d) Erro de arredondamento

$0{,}1_{(10)} \approx 0{,}\ 0001100110011001_{(2)} = 0{,}099990844_{(10)}$

$$\Delta x = |0{,}1 - 0{,}099990844| = 0{,}000009155 \approx 9\times10^{-6}$$

- Arredondamento para baixo ou por falta.
- Arredondamento para cima ou por excesso.

$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots \approx 1{,}41$

$\sqrt[3]{2} = 1{,}259 \ldots \approx 1{,}26$

$$\Delta x = \left|\sqrt{2} - 1{,}41\right| = |1{,}414 - 1{,}41| = 0{,}004 < 0{,}005$$

$$\Delta x = \left|\sqrt[3]{2} - 1{,}26\right| = |1{,}259 - 1{,}26| = 0{,}001 < 0{,}005$$

(Usando duas casas decimais)

Erros Numéricos

Arredondamento *versus* Truncamento

Considere uma máquina com $\beta = 10$, l = −5, u = 5 e t = 4. Seja $x = 0{,}937 \times 10^4$ e $y = 0{,}1272 \times 10^2$.

- Calcular x + y

  Sol: $x = 0{,}937 \times 10^4$ e $y = 0{,}001272 \times 10^4 \Rightarrow x + y = 0{,}938272 \times 10^4$

  Considerando 4 dígitos

  Arredondamento: $(X+Y) = 0{,}9383 \times 10^4$

  Truncamento: $(X+Y) = 0{,}9382 \times 10^4$

- Calcular (xy)

  Sol: $(xy) = (0{,}937 \times 10^4) \times (0{,}1272 \times 10^2) = 0{,}1191864 \times 10^6$

  Considerando 4 dígitos

  Arredondamento: $(XY) = 0{,}1192 \times 10^6$

  Truncamento: $(XY) = 0{,}1191 \times 10^6$

Mesmo que as parcelas ou fatores de uma operação possam ser representados exatamente no sistema, não se pode esperar que o resultado armazenado seja exato. No exemplo, x e y tinham representação exata, mas o resultado x + y teve representação aproximada.

Erros na Aritmética do Ponto Flutuante

Ordem de execução das operações em ponto flutuante

- A ordem da execução de operações de ponto flutuante pode variar o resultado

- Exemplo: Seja uma máquina com $\beta = 10$, l = −5, u = 5 e t = 3. Em ponto flutuante tem-se
  - ➢ $1{,}0 + (10^3 - 10^3) = 1{,}0$
  - ➢ $(1{,}0 + 10^3) - 10^3 = 0{,}0$

Assim, ao programar no computador, é preciso ter cuidado com números em ponto flutuante, em especial com acumuladores e comparações.

Erros na Aritmética do Ponto Flutuante

Ordem de execução das operações em ponto flutuante

Exemplos: ($\beta = 10$, t = 3) (com arredondamento)

i. (11,4 + 3,18) + 5,05 = 14,6 + 5,05 = 19,7

ii. 11,4 + (3,18 + 5,05) = 11,4 + 8,23 = 19,6

iii. $\dfrac{3{,}18 \times 11{,}4}{5{,}05} = \dfrac{36{,}3}{5{,}05} = 7{,}19$

iv. $\left(\dfrac{3{,}18}{5{,}05}\right) \times 11{,}4 = 0{,}630 \times 11{,}4 = 7{,}18$

v. 3,18 × (5,05 + 11,4) = 3,18 × 16,5 = 52,3

vi. 3,18 × 5,05 + 3,18 × 11,4 = 16,1 + 36,3 = 52,4

vii. Somar 1/3 dez vezes consecutivas usando arredondamento
0,333 + 0,333 + . . . + 0,333 = = 3,31

Erros na Aritmética do Ponto Flutuante

Ordem de execução das operações em ponto flutuante

viii. Avaliar o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 0{,}1$, no ponto 5,24 e comparar com o resultado exato.

Para calcular o valor exato consideremos todos os dígitos de uma máquina, sem usar arredondamento a cada operação. Assim: $P(5{,}24) = 143{,}8777824 - 164{,}7456 + 20{,}96 - 0{,}1 = -0{,}00776$ (valor exato).

Agora, usando arredondamento a cada operação efetuada, obtemos:

$P(5{,}24) = 5{,}24 \times 27{,}5 - 6 \times 27{,}5 + 4 \times 5{,}24 - 0{,}1 = 144, - 165, + 21{,}0 - 0{,}1 =$

$= -0{,}10$ (somando da esquerda para a direita)

$= \ 0{,}00$ (somando da direita para a esquerda).

Entretanto, observe que $P(x)$ pode ser escrito como: $P(x) = x\,(x\,(x - 6) + 4) - 0{,}1$.

Assim:

$P(5{,}24) = 5{,}24\,(5{,}24\,(5{,}24 - 6) + 4) - 0{,}1 =$

$= 5{,}24\,(-3{,}98 + 4) - 0{,}1 = 5{,}24\,(0{,}02) - 0{,}1 = 0{,}105 - 0{,}1 = 0{,}005$ (sinal errado).

Erros na Aritmética do Ponto Flutuante

Ponto flutuante no Excel (http://support.microsoft.com/kb/214118/pt-br)

Combinações de operações aritméticas em números de ponto flutuante no Microsoft Excel podem produzir resultados que parecem estar incorretas.

Por exemplo, a equação =(0,5 – 0,4 – 0,1) pode ser avaliada com a quantidade $-2{,}7755\text{x}10^{-17}$ em vez de 0.

Para minimizar os efeitos de imprecisão de armazenamento aritmética de ponto flutuante, pode-se usar a função **round ()** para arredondar números para o número de casas decimais que é exigido pelo seu cálculo. P.ex., =ROUND((0,5 – 0,4 – 0,1),2).

Pode se usar também a opção **precisão conforme exibido** de arredondamento de ponto flutuante. Essa opção força o valor de cada número na planilha seja igual ao número/precisão exibido na planilha.

Uso da opção **precisão conforme exibido** pode ter efeitos de cálculo cumulativo que podem tornar os dados cada vez mais imprecisos ao longo do tempo.