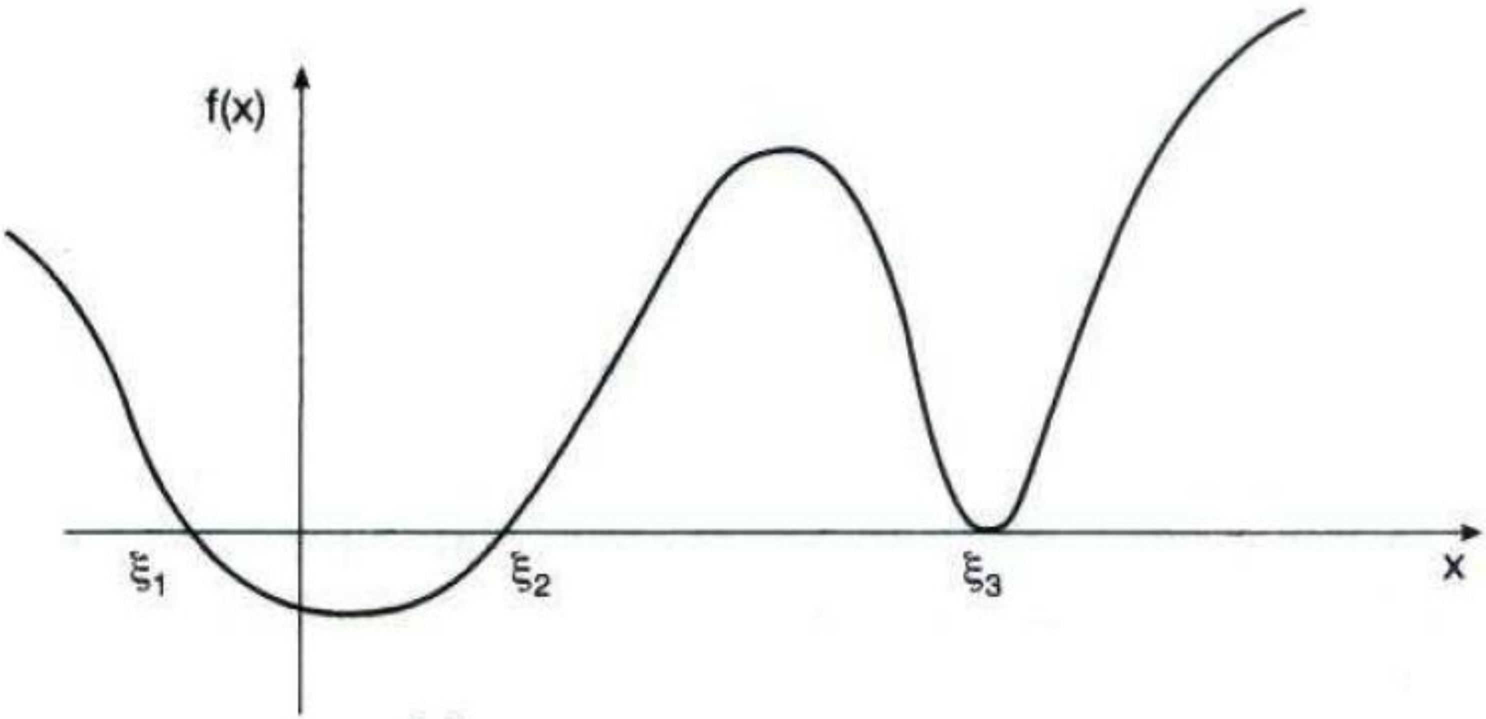
Métodos Numéricos

Zeros: Introdução

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Zeros Reais de Funções Reais

Um número real ξ é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x)=0, se f(ξ)=0.



Zeros Reais de Funções Reais

Os zeros de uma função "são os valores de x que anulam esta função".

Este podem ser reais ou complexos.

Em cálculo numérico estudaremos apenas métodos para obter zeros reais.

Problema

Dada uma função $y = f(x)$ encontrar os valores da variável independente x tal que $f(x) = 0$.

Métodos

- Analíticos
- Iterativos

Zeros Reais de Funções Reais

Método Analítico

Fórmulas explícitas para a determinação das raízes

Exemplo: Encontrar as raízes/zeros da função $ax^2 + bx + c = 0$

Solução: As raízes podem ser obtidas via equação

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

Dificuldade

Polinômios de graus mais elevados e funções com maior grau de complexidade

Geralmente

Impossível a determinação exata dos zeros.

Zeros Reais de Funções Reais

Métodos Iterativos

Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos.

Esses processos se caracterizam pela **repetição** de uma determinada operação.

A ideia é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou **iteração** um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. E, a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte. (por Walter Martins Rodrigues)

Nestes métodos numéricos, gera-se uma aproximação inicial para a raiz (geralmente um intervalo que possa conter a raiz) e em seguida refina-se essa aproximação através de um processo iterativo.

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

A obtenção dos zeros da função f(x) a partir dos métodos iterativos, ocorre em duas fases.

Fase 1: Isolamento das raízes (obter um intervalo que contém uma raiz)

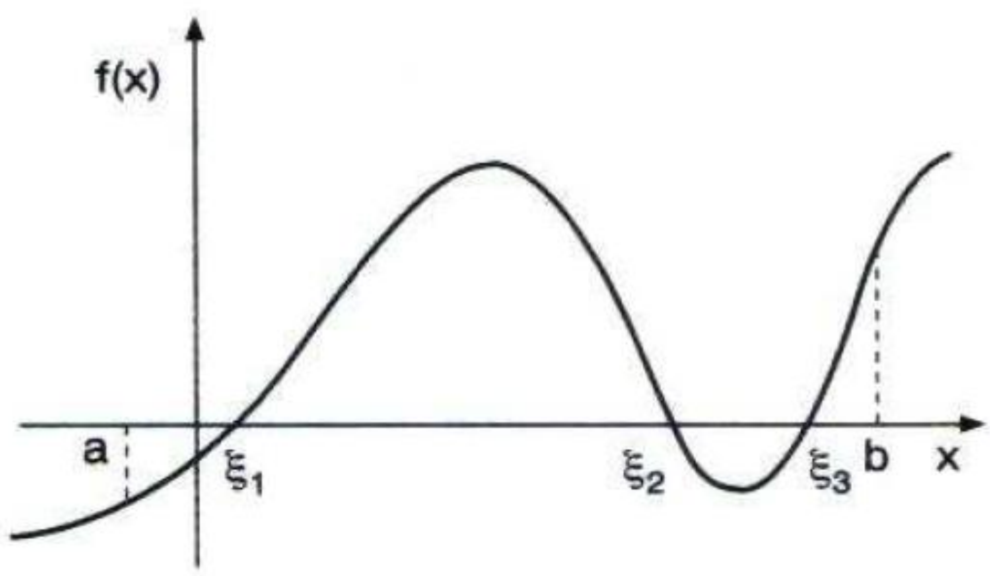
Fase 2: Refinamento (refinar a aproximação iniciai até obter uma aproximação para a raiz com uma certa precisão prefixada)

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Teorema de Bolzano: Seja uma função f(x) contínua em um intervalo [a,b], tal que, $f(a) \times f(b) < 0$. Então a função f(x) possui pelo menos uma raiz no intervalo [a,b].

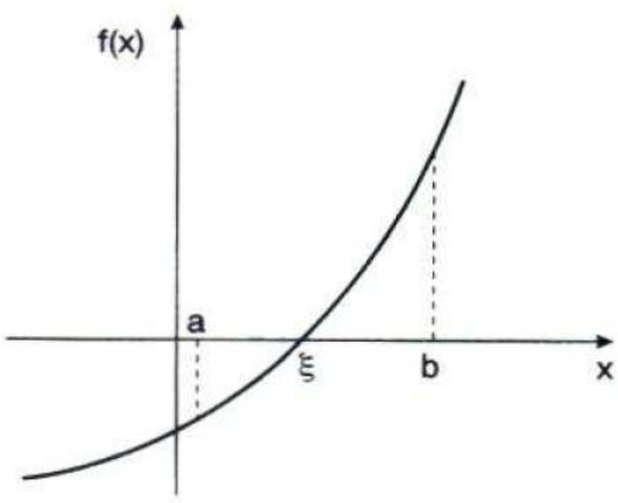


Zeros Reais de Funções Reais

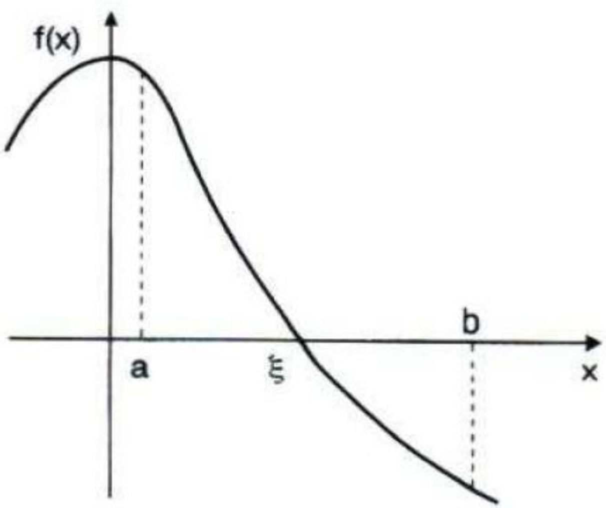
Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Do teorema de Bolzano, temos que se f'(x) existir e preservar o sinal em (a, b), então esse intervalo contem um único zero de f(x).



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Métodos mais comuns para localizar as raízes de $f(x) = 0$:

1. Tabelar $f(x)$ e analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e o sinal da derivada nos intervalos em que $f(x)$ mudou de sinal.

2. Análise gráfica da função $f(x)$.

3. Escrever a função como sendo subtração de duas funções $f(x) = g(x) – h(x) = 0$, e analisar para quais x ocorre a igualdade $g(x) = h(x)$.

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 1: Tabelar f(x) e analisar as mudanças de sinal de f(x) e o sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$

$f(-\infty) < 0$	$f(-100) < 0$	$f(-10) < 0$	$f(-5) < 0$
$f(-3) > 0$	$f(0) > 0$	$f(1) < 0$	$f(2) < 0$
$f(3) > 0$	$f(5) > 0$	$f(10) > 0$	$f(\infty) > 0$

Conclusão: há pelo menos uma raiz em cada um dos seguintes intervalos [-5 -3], [0, 1], [2, 3]

Zeros Reais de Funções Reais

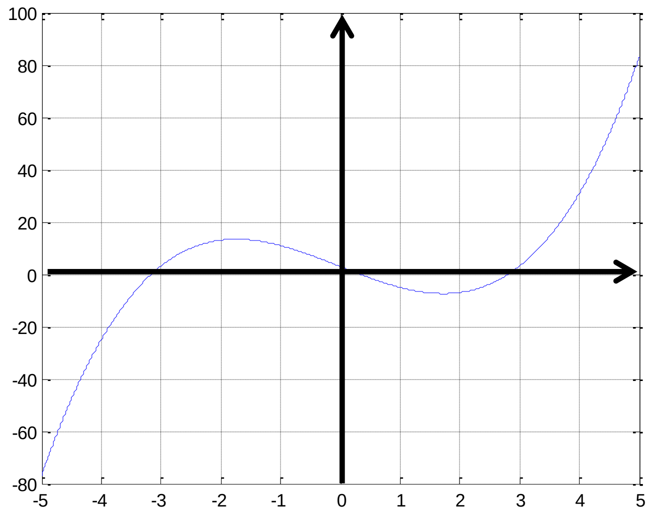
...continuação

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 2: Análise gráfica da função f(x).

<u>Exemplo</u>: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Conclusão: há pelo menos uma raiz em cada um dos seguintes intervalos [-4 -3], [0, 1], [2, 3]

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

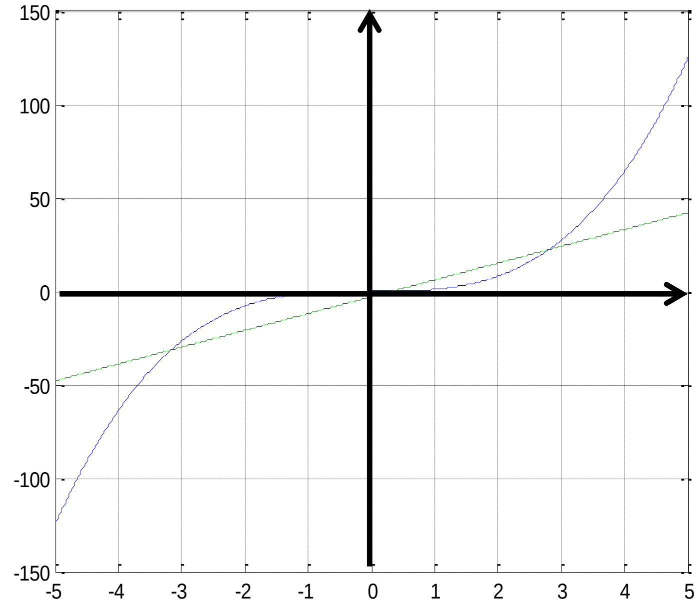
FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 3: Escrever a função como sendo soma de duas funções $f(x) = g(x) + h(x)$ e analisar para quais x, ocorre a igualdade $g(x) = h(x)$.

<ins>Exemplo</ins>: Seja $f(x) = x^3 – 9x + 3$

$g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x – 3$

$f(x) = g(x) – h(x) = 0$



Conclusão: há pelo menos uma raiz em cada um dos seguintes intervalos [-4 -3], [0, 1], [2, 3]

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 2 – Refinamento (via processo iterativo)

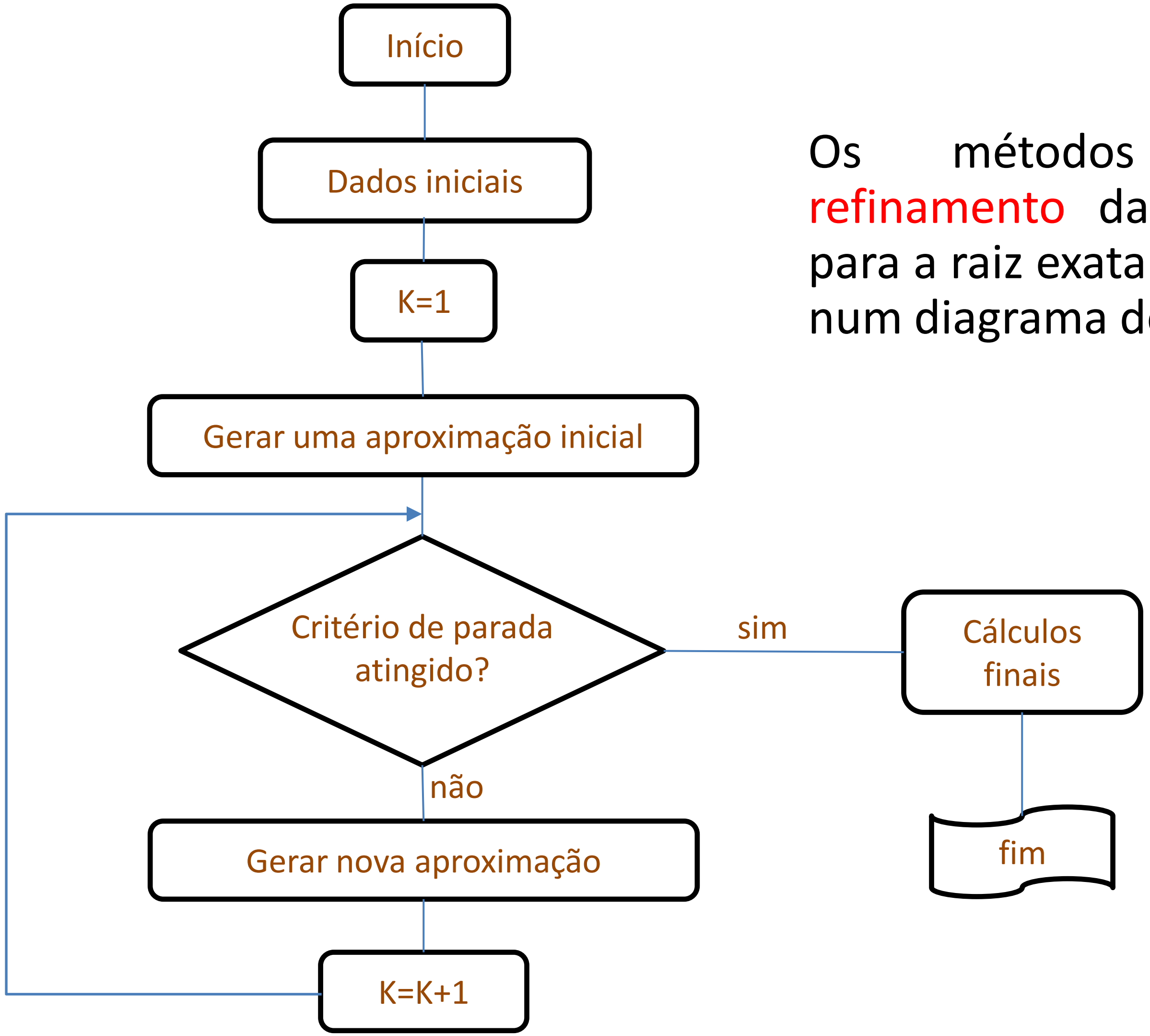
Existem diversos aspectos comuns a qualquer processo iterativo usado no refinamento.

- ✓ Estimativa inicial: Para iniciar um processo iterativo, é preciso ter uma estimativa/aproximação inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser obtida de diferentes formas (depende do problema).

- ✓ Convergência: Para obter um resultado próximo da solução real esperada, é necessário que a cada passo ou iteração, o resultado esteja mais próximo daquele esperado.

- ✓ Critério de parada: Obviamente não pode-se repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. O critério adotado para parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada (depende do problema e da precisão numérica desejada para a solução).

Zeros Reais de Funções Reais



Os métodos iterativos para refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num diagrama de fluxo.

Zeros Reais de Funções Reais

Critérios de Parada

- Existem duas interpretações para raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado.

- x' é raiz aproximada com precisão ε se:
  i) $|x' - \xi| < \varepsilon$ ou
  ii) $|f(x')| < \varepsilon$

- Como efetuar o teste i) se não conhecemos ξ?

  Uma forma é reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração. Ao gerar um intervalo $[a_k,b_k]$ tal que $\xi \in [a_k, b_k]$ e $|b_k - a_k| < \varepsilon$, então para-se.

Zeros Reais de Funções Reais

Processo de busca da raiz por um método iterativo

FASE 2 – Refinamento

Métodos que serão estudados:

- Método da Bissecção;
- Método da Posição Falsa;
- Método do Ponto Fixo;
- Método de Newton-Raphson;
- Método da Secante.