UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Zeros – Método da Bissecção

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção

- O processo consiste em ***dividir/particionar o intervalo que contém o zero ao meio*** e por ***aplicação*** do Teorema de Bolzano, aplicado aos ***subintervalos resultantes***, determinar qual deles ***contém o zero***.

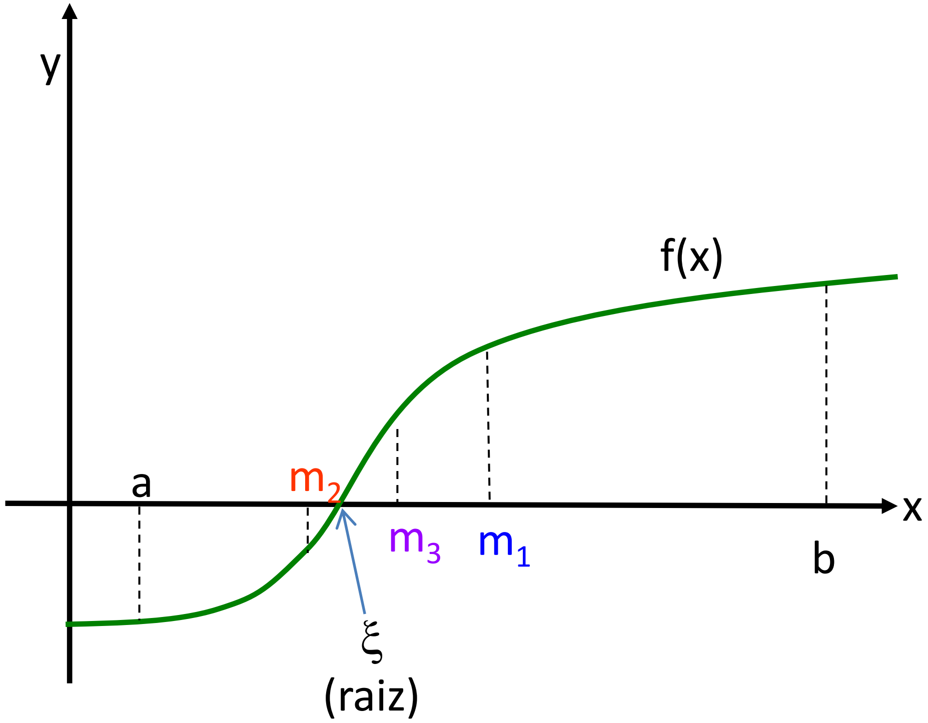
$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

- O processo é repetido para o novo subintervalo ***até que se obtenha uma precisão prefixada***. Desta forma, em cada iteração o zero da função é aproximado pelo ponto médio de cada subintervalo que o contém.

- Este método é normalmente utilizado para diminuir o intervalo que contém o zero da função, para a aplicação de outro método, pois o esforço computacional cresce demasiadamente quando se aumenta a precisão exigida.

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção



Continua até: $|m_i - m_j| < \varepsilon$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção

Critério de Convergência

Cada vez que dividirmos o intervalo reduzimos o intervalo de busca por um fator de 2 (dois).

A amplitude de cada intervalo gerado é metade da amplitude do intervalo anterior. Considerando $a < b$, temos

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \text{ logo } b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2}, \text{ logo } b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^3} \qquad \ldots$$

Ou seja, para qualquer termo de ordem k temos

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, k = 0,1,\ldots,n,\ldots$$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção

Número de Iterações

Sabemos que

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, k = 0,1,\ldots,n,\ldots$$

e como deseja-se obter k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$, então

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon \Rightarrow \ln\left(\frac{b-a}{2^k}\right) \leq \ln \varepsilon \Rightarrow \ln(b-a) - \ln\left(2^k\right) \leq \ln \varepsilon$$

$$\ln(b-a) - k \ln 2 \leq \ln \varepsilon \Rightarrow k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$

Portanto, para qualquer número de iterações k que satisfaz a última desigualdade, termos $b_k - a_k < \varepsilon$.

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção

Algoritmo

- O **método da bissecção** é um método de aproximação sucessiva que reduz o intervalo que contém uma raiz da função f(x).
- No **método da bissecção** é dado um intervalo inicial [a,b] que contém uma raiz (isolamento da raiz).
- O **método da bissecção** vai particionar o intervalo [a,b] em duas metades e verificar qual metade contém uma raiz da função.
- O **método da bissecção** irá manter o particionamento do intervalo em metades até o intervalo resultante ser extremamente pequeno.
- A **raiz é então aproximadamente igual a qualquer valor no intervalo** final (que é muito pequeno).

http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/170//Syllabus/PPT/The%20Bisection%20Method.ppt

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bissecção

Algoritmo

Seja f(x) com zero/raiz ξ em [a, b]

As iterações são realizadas da forma

1) $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ com $a = a_0$ e $b = b_0 \Rightarrow$ Se $\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}$ então $\begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$

2) $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \Rightarrow$ Se $\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases}$ então $\begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$

3) Continue o processo até que $| b_k - a_k | < \varepsilon$. A raiz ξ é qualquer $x \in [a_k, b_k]$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bisseção

Algoritmo (Octave, Matlab)

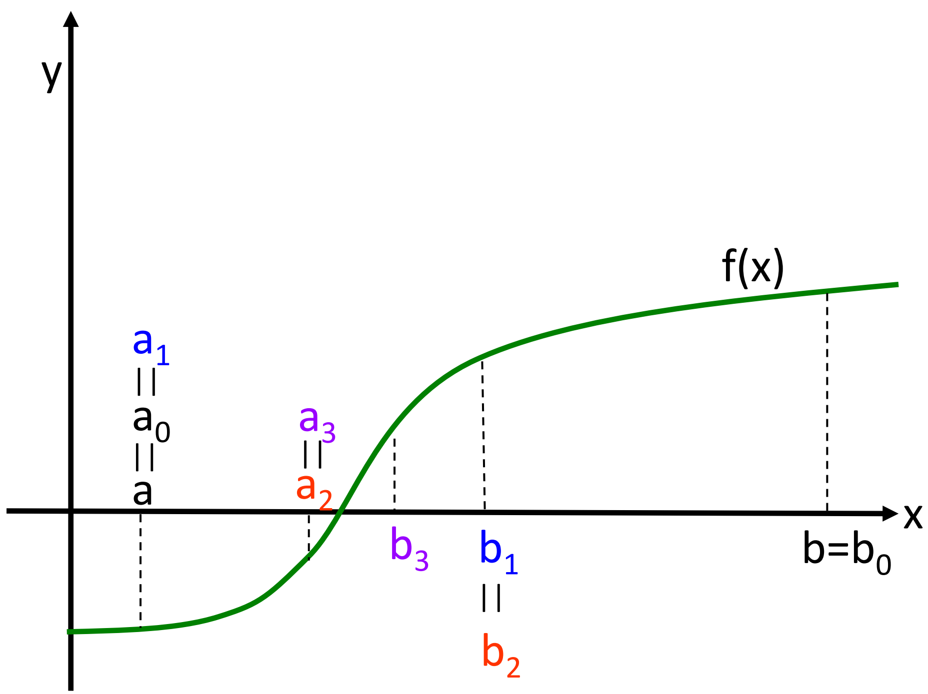
```
k = 0; a_0 = a; b_0 = b; x_0 = a;
x_{k+1} = (a_k + b_k)/2;
while critério de parada não satisfeito and k ≤ L
    if f(a_k)*f(x_{k+1}) < 0, %raiz em [a_k , x_{k+1}]
        a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_{k+1};
    elseif %raiz em [x_{k+1}, b_k]
        a_{k+1} = x_{k+1}; b_{k+1} = b_k ;
    end
    k = k +1; x_{k+1} = (a_k + b_k)/2;
end
if k > L %L numero maximo de iteracoes
     disp('numero maximo de iteracoes atingido'); return;
end
```

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Bisseção

Graficamente

Seja f(x) com raiz no intervalo [a b], f(a) < 0 < f(b)



Intervalo inicial: [a   b] = [a_0 b_0]

Novo intervalo: [a_1 b_1]

Novo intervalo: [a_2 b_2]

Novo intervalo: [a_3 b_3]

...

Novo intervalo: [a_{k-1} b_{k-1}]

Novo intervalo: [a_k b_k]

K iterações

raiz aproximada = $(a_k + b_k)/2$

solução aproximada = raiz aproximada

Zeros Reais de Funções Reais

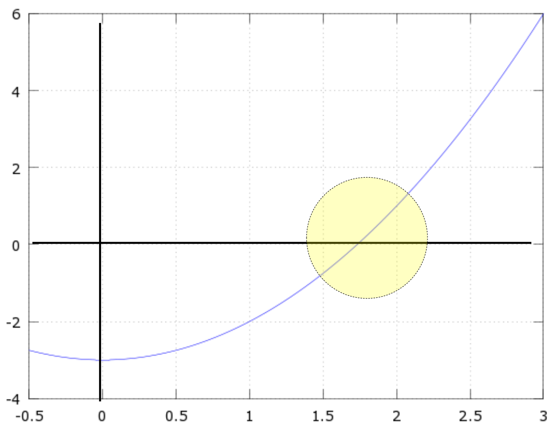
Método da Bisseção

Exemplo

$f(x) = x^2 - 3$

$[a, b] = [-0{,}5,\ 3]$

$\varepsilon = 10^{-5}$



Intervalo inicial: [-0,500000000000000   3,000000000000000]
Novo intervalo: [1,250000000000000   3,000000000000000]
Novo intervalo: [1,250000000000000   3,000000000000000]
Novo intervalo: [1,250000000000000   2,125000000000000]
Novo intervalo: [1,250000000000000   2,125000000000000]
...
Novo intervalo: [1,732040405273438   1,732053756713867]
Novo intervalo: [1,732040405273438   1,732053756713867]
Novo intervalo: [1,732047080993652   1,732053756713867]
Novo intervalo: [1,732047080993652   1,732053756713867]
Novo intervalo: [1,732050418853760   1,732053756713867]
40 iterações

Solução aproximada = (1,732050418853760 + 1,732053756713867)/2

solução aproximada = 1,73205208778381
sqrt(3) = 1,73205080756888
erro absoluto = 8,59598013436269×10^{-7}   (Octave)