UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Zeros – Posição Falsa e Ponto Fixo

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

Zeros Reais de Funções Reais

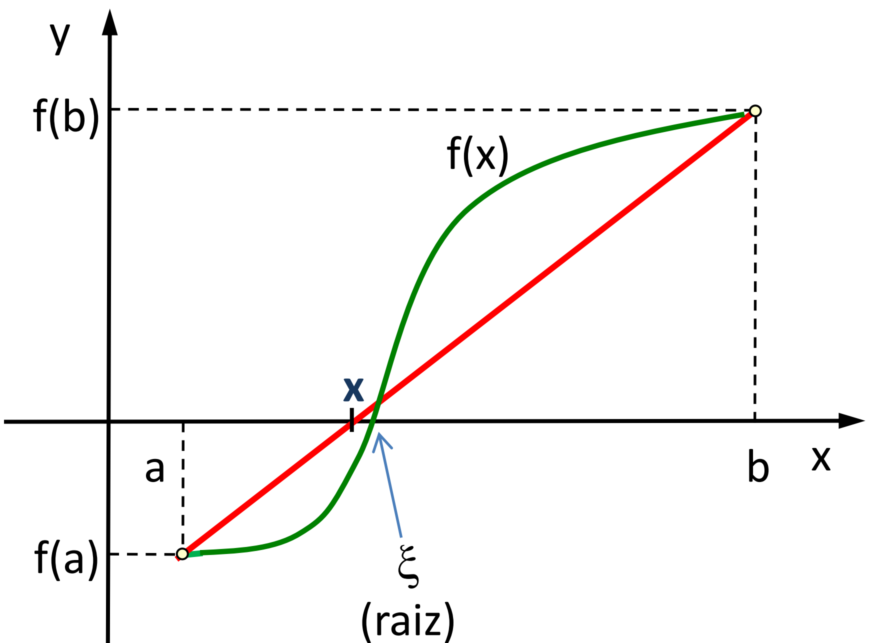
Método da Posição Falsa

O processo consiste em ***dividir/particionar o intervalo que contém o zero por meio de uma média aritmética*** e por ***aplicação*** do Teorema de Bolzano, aplicado aos ***subintervalos resultantes***, determinar qual deles ***contém o zero***.

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

Seja f(x) com raiz no intervalo [a b], f(a) < 0 < f(b)



$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

Algoritmo

Seja f(x) com zero ξ em [a, b]

As iterações são realizadas da forma

1) $x_0 = \dfrac{a_0\,|f(b_0)| + b_0\,|f(a_0)|}{|f(b_0)| + |f(a_0)|}$ com $a_0 = a$ e $b_0 = b \Rightarrow$ Se $\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}$ então $\begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$

2) $x_1 = \dfrac{a_1\,|f(b_1)| + b_1\,|f(a_1)|}{|f(b_1)| + |f(a_1)|} \Rightarrow$ Se $\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) > 0 \end{cases}$ então $\begin{cases} \xi \in (a_1, x_1) \\ a_2 = a_1 \\ b_2 = x_1 \end{cases}$

3) Continue o processo até que $|b_k - a_k| < \varepsilon$. A raiz ξ é qualquer $x \in [a_k, b_k]$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

Algoritmo (Octave, Matlab)

```
k = 0; a_0 = a; b_0 = b; x_0 = a; F_0 = |f(a_0)|; G_0 = |f(b_0)|;
x_{k+1} = (a_0G_0 + b_0F_0)/(G_0 + F_0);
while critério de convergência não satisfeito and k ≤ L
    if f(a_k)*f(x_{k+1}) ≤ 0 %raiz em [a_k , x_{k+1}]
        a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_{k+1};
    elseif  %raiz em [x_{k+1}, b_k]
        a_{k+1} = x_{k+1}; b_{k+1} = b_k ;
    end
    k = k +1;
    x_{k+1} = (a_k*|f(b_k)| + b_k*|f(a_k)| )/ (|f(b_k) + |f(a_k)|;
end
if k > L %L numero maximo de iteracoes
     disp('numero maximo de iteracoes atingido'); return;
end
```

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

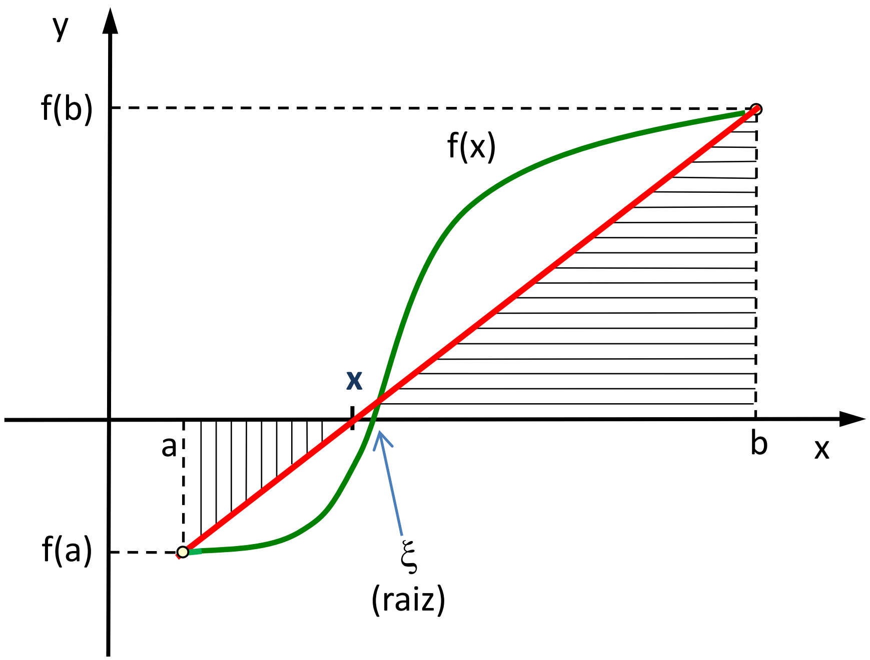
Critério de Convergência

Teorema: Se f(x) é contínua no intervalo [a, b] com $f(a)\times f(b) < 0$ então o método da posição falsa gera uma sequencia $\{x_k\}$ convergente.

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Posição Falsa

Graficamente



Por semelhança de triângulos

- $$\frac{|f(a)|}{x-a} = \frac{|f(b)|}{b-x}$$
- $f(a) < 0;\ x - a > 0$

  $f(b) > 0;\ x - b < 0$
- $(x-a)\,|f(b)| = (b-x)\,|f(a)|$
- $$x = \frac{-\left(b|f(a)| + a|f(b)|\right)}{-\left(|f(a)| + |f(b)|\right)}$$
- $$x = \frac{b\,|f(a)| + a\,|f(b)|}{|f(a)| + |f(b)|}$$

Zeros Reais de Funções Reais

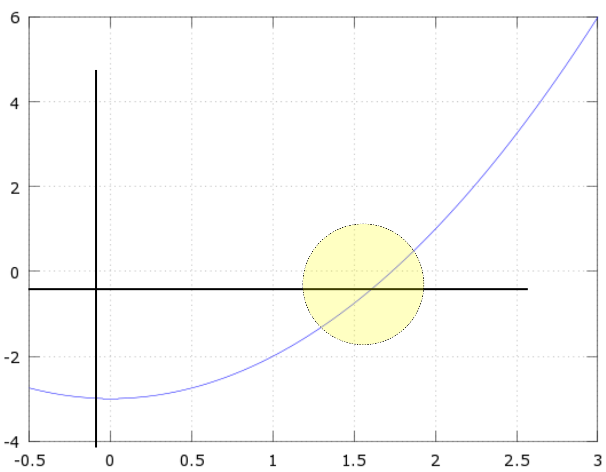
Método da Posição Falsa

Exemplo

$f(x) = x^2 - 3$

$[a, b] = [-0{,}5,\ 3]$

$\varepsilon = 10^{-5}$



$[a_0, b_0]$ = [-0,500000000000000 3,000000000000000]
$[a_1, b_1]$ =[0,600000000000000 3,000000000000000]
$[a_2, b_2]$ =[1,333333333333333 3,000000000000000]
$[a_3, b_3]$ =[1,615384615384615 3,000000000000000]
$[a_4, b_4]$ =[1,700000000000000 3,000000000000000]
$[a_5, b_5]$ =[1,723404255319149 3,000000000000000]
$[a_6, b_6]$ =[1,729729729729730 3,000000000000000]
$[a_7, b_7]$ =[1,731428571428571 3,000000000000000]
$[a_8, b_8]$ =[1,731884057971014 3,000000000000000]
$[a_9, b_9]$ =[1,732006125574273 3,000000000000000]
$[a_{10}, b_{10}]$ =[1,732038834951456 3,000000000000000]
$[a_{11}, b_{11}]$ =[1,732047599507591 3,000000000000000]
$[a_{12}, b_{12}]$ =[**1,732049947970864** 3,000000000000000]

12 iterações

solução aproximada = 1,732049947970864
sqrt(3) = 1,73205080756888
erro absoluto = 1,28021493628339×10^{-6} (Octave)

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Seja uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ onde existe uma raiz única, $f(x)=0$. Às vezes é possível transformar a função em uma equação equivalente $f(x)=g(x)-x$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_k\}$ de aproximações para a raiz ξ pela relação $x_{k+1}=g(x_k)$, uma vez que $g(x)$ é tal que $f(\xi)=0$ se e somente se $g(\xi)=\xi$.

Geralmente $g(x)$ é denominada de **função de iteração**.

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Considerações

- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] que contem uma raiz de f(x). O Método do Ponto Fixo inicia-se reescrevendo a função f(x) como,

$$f(x) = g(x) - x$$

- No ponto x que corresponde à raiz de f(x), isto é, f(x) = 0, teremos que:

$$f(x) = g(x) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g(x)$$

- Ou seja, no ponto x que corresponde à raiz de f(x), ao substituirmos o valor de x na função g(x), teremos como resultado o próprio valor de x.

- A raiz de f(x) é denominada de **Ponto fixo** de g(x), ou seja, o valor que ao ser substituído em g(x) retorna o próprio valor de x.

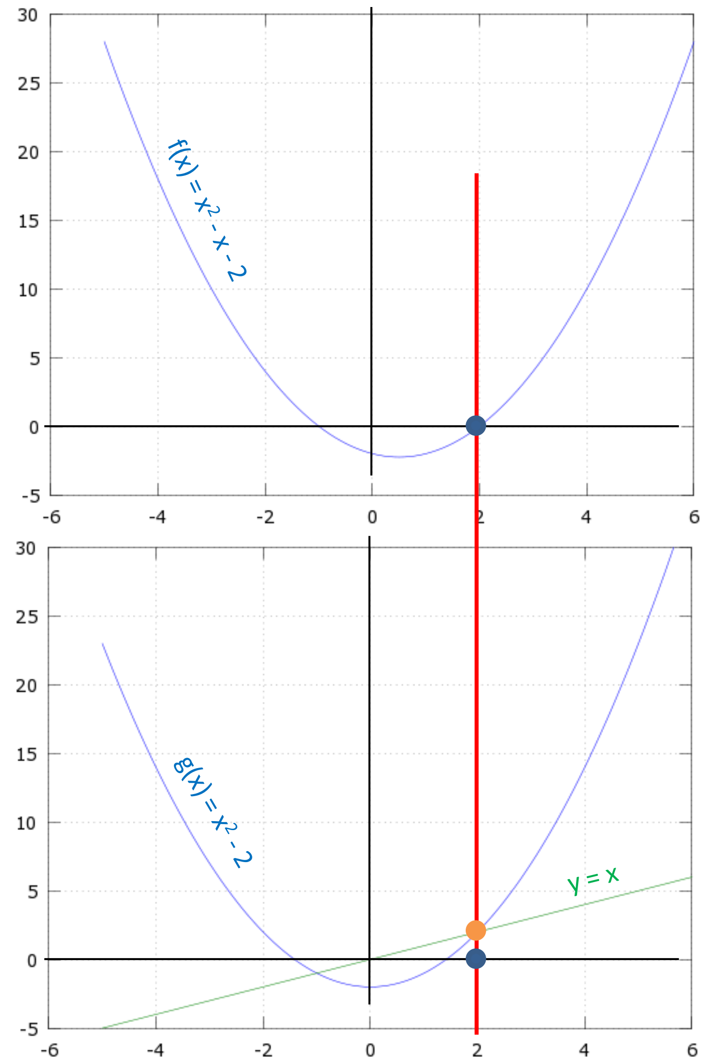
Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Exemplo

- Por exemplo, a função, $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser escrita como, $f(x) = (x^2 - 2) - x$. Ou seja, $f(x) = g(x) - x$, onde $g(x) = x^2 - 2$ (**função de iteração**).

- $g(x)$ função tem como ponto fixo o valor $x = 2$, pois $g(2) = 2^2 - 2 = 2$. E esse é exatamente a raiz de $f(x)$, pois $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$.



Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Problema de determinação de um zero de **f(x)**	➡	Problema de determinação de um **Ponto Fixo** de **g(x)**

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Algoritmo

Seja f(x) com zero ξ em [a, b]. Dada uma aproximação inicial $x \in [a, b]$, o método do Ponto Fixo consiste numa sucessão de aproximações $\{ x_k\} \rightarrow \xi$ tal que,

$$x_{k+1} = g(x_k) \text{ , } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Critério de Convergência

Teorema – Garantia de convergência

Seja ξ uma raiz de $f(x) = 0$, isolada em um intervalo $I=[a,b]$ centrado em ξ e $g(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$. Se

1. $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
2. $|g'(x)| < 1, \forall x \in I$ e
3. $x_0 \in I$ (x_0 é o ponto de partida da sequencia $\{x_k\}$)

então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1}= g(x_k)$ convergirá para ξ.

Escolha do x_0 (extremo que apresenta convergência mais rápida)

se $| g'(a) | < | g'(b) |$, então

$x_0 = a$

senão,

$x_0 = b$

fim

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Algoritmo (Octave, Matlab)

k = 0; x_0 = x; %x é a estimativa inicial
while critério de interrupção não satisfeito and k ≤ L
    k = k +1;
    $x_{k+1} = g(x_k)$;
end
if k > L %L numero maximo de iteracoes
    disp('numero maximo de iteracoes atingido'); return;
end

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1

Seja $x^2 + x - 6 = 0$.

Funções de iteração possíveis:

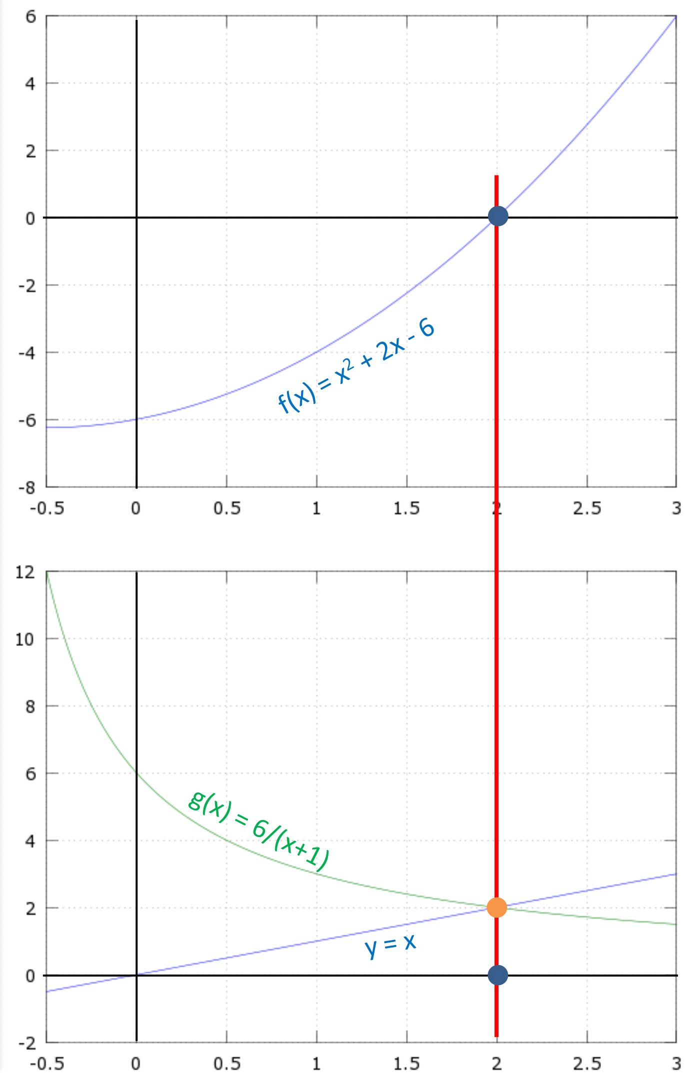
- $g_1(x) = 6 - x^2$
- $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
- $g_3(x) = 6/x - 1$
- $g_4(x) = 6/(x + 1)$

Para $g_4(x) = 6/(x + 1)$

$x_0 = 4,00000000000000$
$x_1 = 1,20000000000000$
$x_2 = 2,72727272727273$
$x_3 = 1,60975609756098$
...
$x_{25} = 1,99994342617150$
$x_{26} = 2,00003771659693$
$x_{27} = 1,99997485591816$
$x_{28} = 2,00001676286172$
$x_{29} = 1,99998882482130$
$x_{30} = 2,00000745014689$

octave – precisão: 10^{-5}

$g_4(x)$ tem como ponto fixo x=2, pois $g_4(2)=6/(x+1)=6/(2+1)=2$. E esse é a raiz de f(x), pois $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$.



Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Exemplo 2

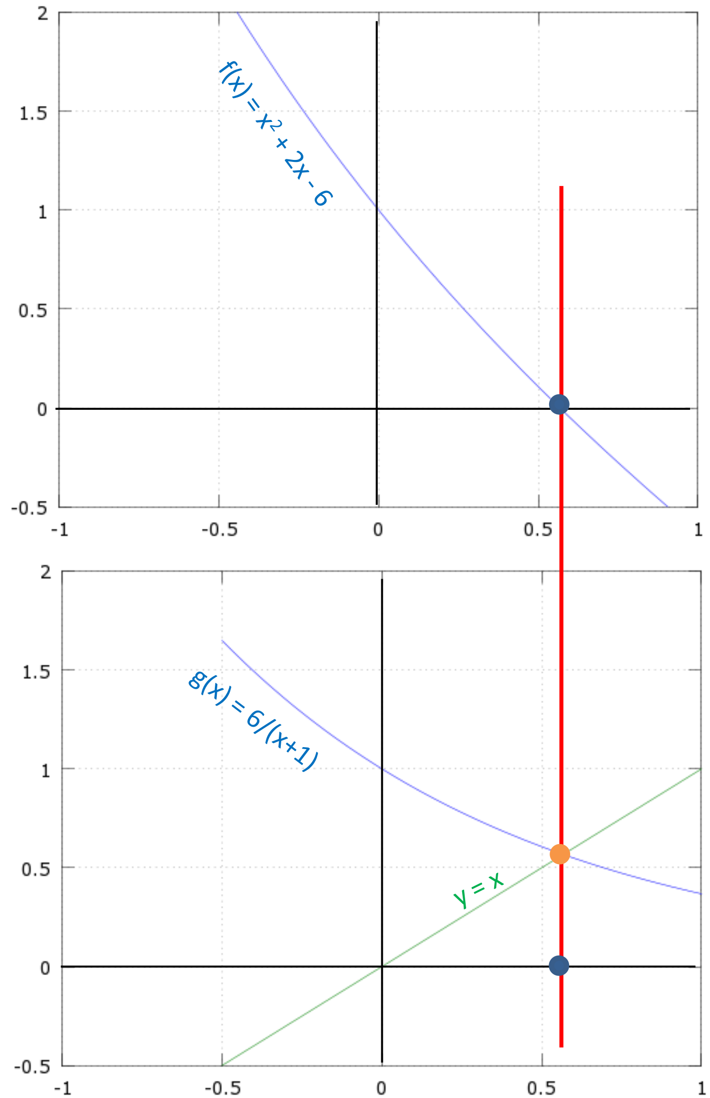
Seja a equação $f(x) = e^{-x} - x$ e seja

A função de iteração $g(x) = e^{-x}$.

$g(x)$ tem como ponto fixo o valor $x = 0{,}5671432904$.

$x_1 = 2{,}00000$
$x_2 = 0{,}13534$
$x_3 = 0{,}87342$
$x_4 = 0{,}41752$
...
$x_{16} = 0{,}56697$
$x_{17} = 0{,}56724$
$x_{18} = 0{,}56709$
$x_{19} = 0{,}56717$
$x_{20} = 0{,}56713$
$x_{21} = 0{,}56715$

octave – precisão: 10^{-5}



Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

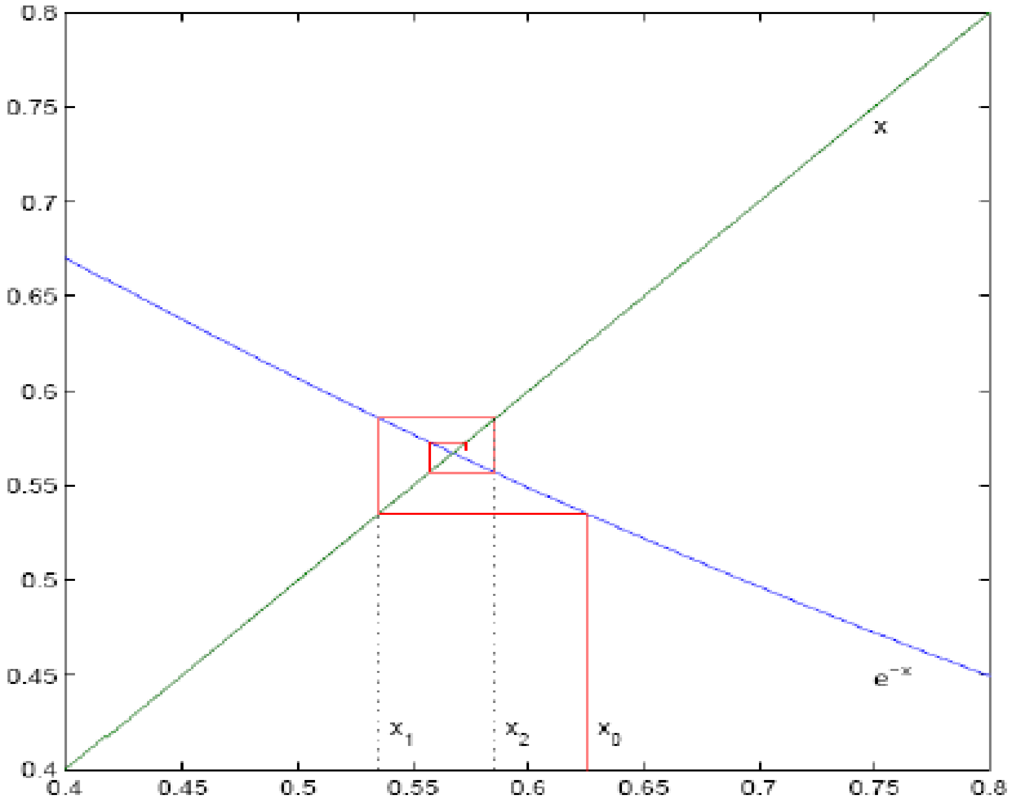
Graficamente – convergência

<u>Exemplo</u>: Seja a equação

$f(x) = e^{-x} - x$.

$[a, b] = [0{,}50 \;\; 0{,}75]$

$g(x) = e^{-x}$



http://www.icmc.usp.br/pessoas/andretta/ensino/aulas/sme0301-1-10/PontoFixo.pdf

$x_0 = (0{,}5 + 0{,}75)/2 = 0{,}625$
$x_1 = 0{,}5326$
$x_2 = 0{,}5855$
$x_3 = 0{,}5568$
$x_4 = 0{,}5730$
$x_5 = 0{,}5638$
$\mathbf{x_6 = 0{,}5690}$

convergente

Zeros Reais de Funções Reais

Método do Ponto Fixo

Graficamente – divergência

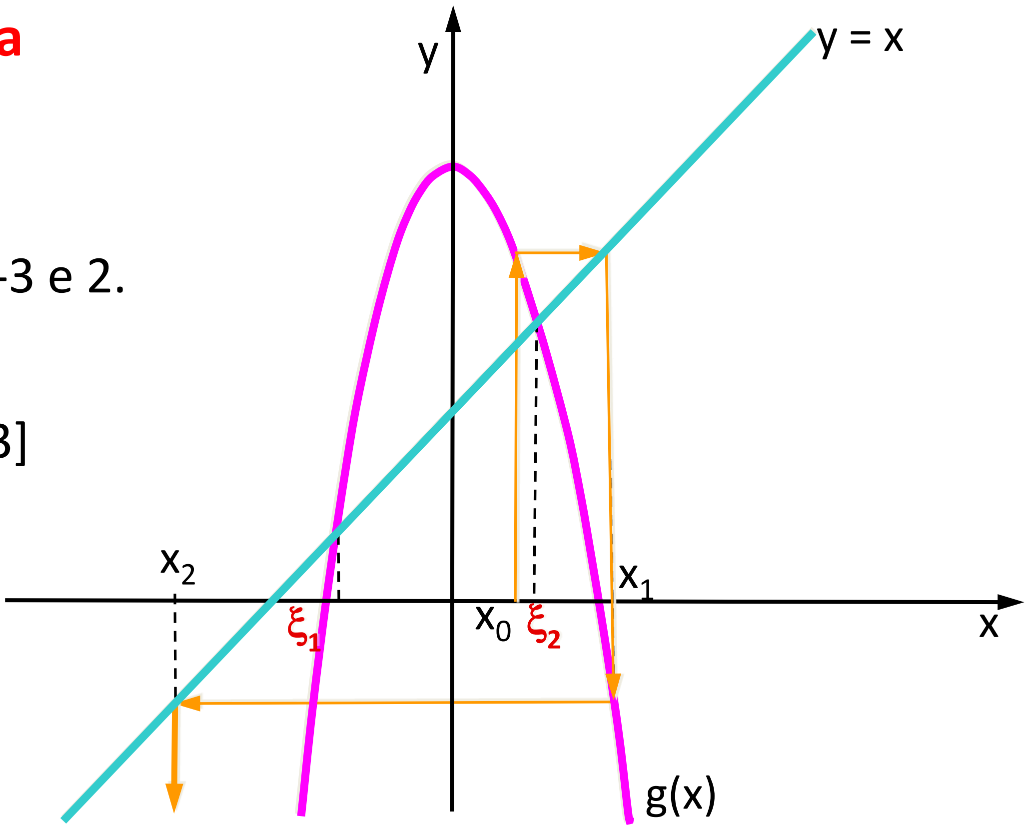
<u>Exemplo:</u> Seja a equação

$f(x) = x^2 + x - 6$. As raízes são -3 e 2.

Seja $g(x) = 6 - x^2$ e $[a\ b] = [1,\ 3]$

$x_0 = 1{,}50$
$x_1 = 3{,}75$
$x_2 = -8{,}0625$
$x_3 = -59{,}003906$
$x_4 = -3475{,}4609$
$x_5 = -1{,}2079 \times 10^7$
$\mathbf{x_6 = -1{,}4590 \times 10^{14} \rightarrow -\infty}$

divergente



http://www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/modulos/Modulo4/CN_Parte2_Metodos.ppt