
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Zeros – Newton-Raphson e Secante

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Zeros Reais de Funções Reais

Método Newton Raphson

Zeros Reais de Funções Reais

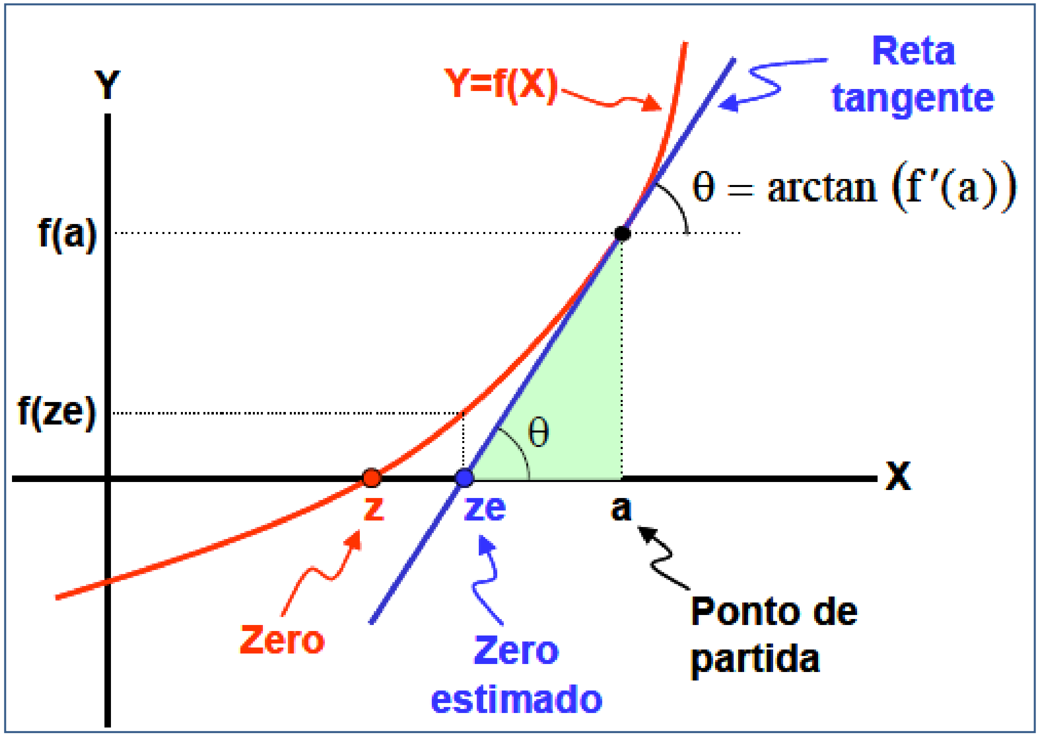
Método Newton-Raphson

Dada uma função f(x) contínua num intervalo fechado onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da **interseção da tangente à curva** em um ponto $x_0=a$ com o eixo das abscissas.

Zeros Reais de Funções Reais

Método Newton-Raphson

Derivação do método de Newton-Raphson.



$$f'(a) = \tan(\theta) = \frac{|f(a) - 0|}{|a - ze|}$$

$$f'(a) = \frac{f(a)}{a - ze}$$

$$ze = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Zeros Reais de Funções Reais

Método Newton-Raphson

Algoritmo

Seja f(x) com zero ξ em [a, b] e $f'(x) \neq 0$ em [a, b]

As iterações são realizadas da forma

1) $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, onde x_0 é uma aproximação inicial em [a, b]

2) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, ...

3) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

4) Continue o processo até que $| x_{k+1} - x_k | < \varepsilon$. A raiz é $\xi = x_{k+1}$

Zeros Reais de Funções Reais

Método Newton-Raphson

Algoritmo (Octave, Matlab)

```
k = 0; x_0 = x;
while critério de interrupção não satisfeito and k ≤ L
      k = k +1;
      x_{k+1} = x_k – f(x_k)/df(x_k) %df eh a derivada de f
end
if k > L %L numero maximo de iteracoes
      disp('numero maximo de iteracoes atingido'); return;
end
```

Zeros Reais de Funções Reais

Método Newton-Raphson

Convergência do método de Newton-Raphson.

A convergência no método de Newton-Raphson é **garantida** para um intervalo [a,b] que contém a raiz ξ de f(x), desde que f(x) e f'(x) **sejam contínuas** nesse intervalo e que $f'(\xi) \neq 0$.

Portanto, se **utilizarmos uma estimativa inicial** x_0 tal que $x_0 \in [a,b]$, a convergência **estará garantida**.

Zeros Reais de Funções Reais

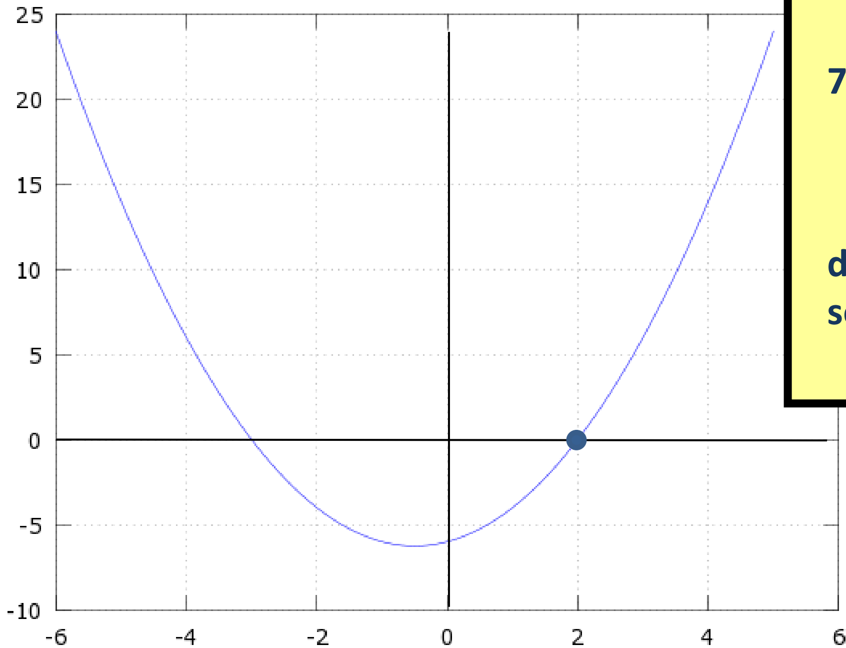
Método Newton-Raphson

Exemplo

$f(x) = y = x^2 + x - 6$

$x_0 = 15$

$\varepsilon = 10^{-5}$



$x_0 = 15{,}00000000000000$
$x_1 = 7{,}45161290322581$
$x_2 = 3{,}86880848001047$
$x_3 = 2{,}39970224729909$
$x_4 = 2{,}02754798128752$
$x_5 = 2{,}00015012400924$
$x_6 = 2{,}00000000450717$
$\mathbf{x_7 = 2{,}00000000000000}$

7 iterações

(Octave)

diferença entre as duas últimas soluções: $4{,}50717285715996 \times 10^{-9}$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

O método da secante é um método recursivo, utilizado para encontrar a solução para uma equação, semelhante ao método de Newton-Raphson.

A ideia é seguir a reta secante até sua intersecção com o eixo dos x e usar o ponto encontrado como uma aproximação para a raiz.

Isto é semelhante ao método de Newton (que segue a reta tangente), mas requer duas estimativas iniciais para a raiz.

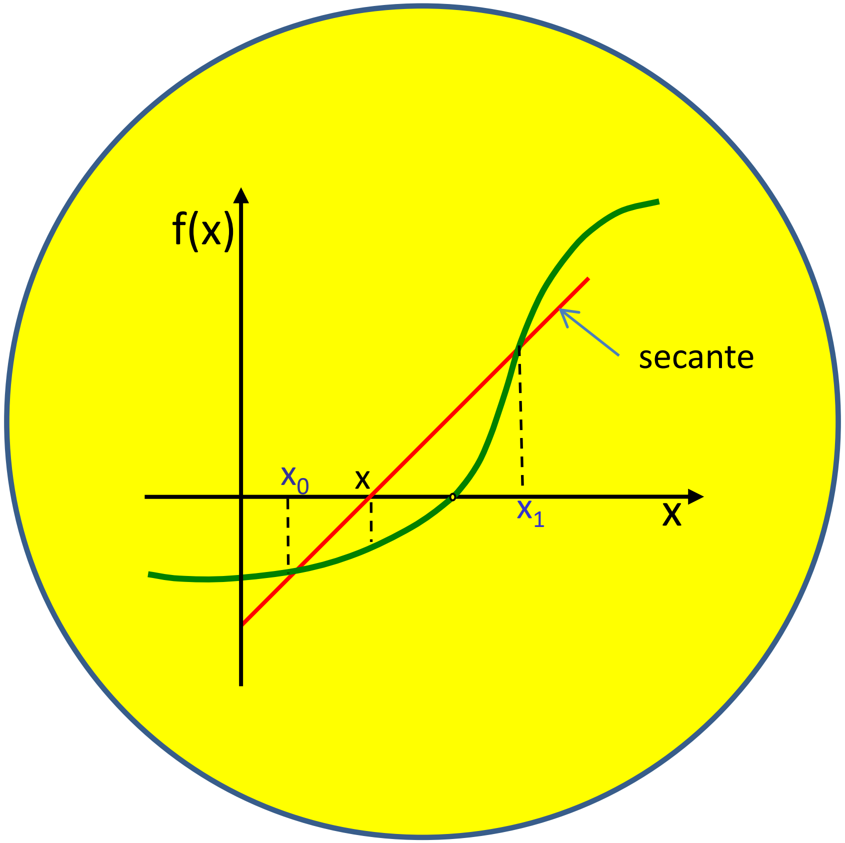
A grande vantagem do método da secante em relação ao método de Newton-Raphson é que não requer que a função f(x) seja diferenciável e o algoritmo não precisa calcular a derivada. Isso é um facilitador visto que às vezes as derivadas só podem ser estimadas.

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Derivação do método de Newton-Raphson.

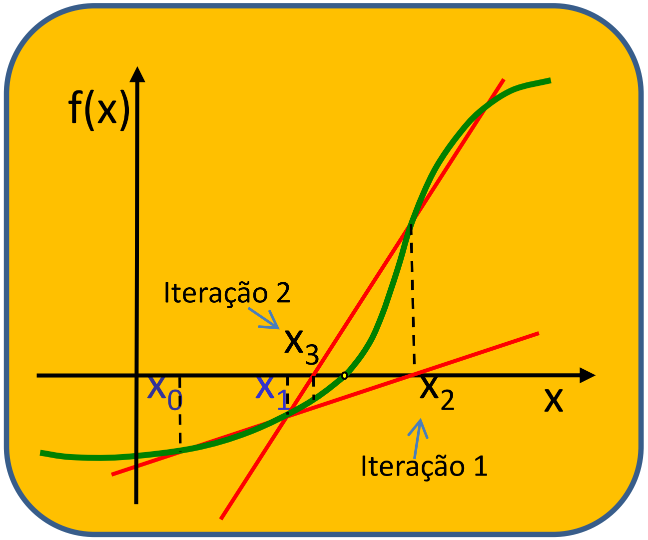
O processo iterativo depende de 2 parâmetros, x_0 e x_1, do eixo dos x.



Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Para gerar x_{k+1} a partir de x_k e x_{k-1}, escreve-se a equação da reta secante que passa pelos pontos x_k e x_{k-1}.



$$y - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

$$0 - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_{k+1} - x_k)$$

$$\frac{-f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_{k+1} - x_k$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Algoritmo

Seja f(x) com zero ξ em [a, b] e $f'(x) \neq 0$ em [a, b]

As iterações são realizadas da forma

1) $x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, onde x_1 e x_2 são valores em [a, b]

2) $x_3 = \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$, ...

3) $x_{k+1} = \dfrac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

4) Continue o processo até que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. A raiz é $\xi = x_{k+1}$

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Algoritmo (Octave, Matlab)

```
k = 0; x_0 = x_L; x_1 = x_S; % x_L e x_S são dois parâmetros/estimativas iniciais
while critério de interrupção não satisfeito and k ≤ L
        k = k +1;
        x_{k+1} = (x_{k-1}*f(x_k) – x_k*f(x_{k-1}))/(f(x_k) – f(x_{k-1}))
end
if k > L %L numero maximo de iteracoes
        disp('numero maximo de iteracoes atingido'); return;
end
```

Zeros Reais de Funções Reais

Método da Secante

Convergência do método da Secante

O número de iterações necessárias não pode ser determinado antes do algoritmo começar.

O algoritmo irá parar (interrupção da execução do programa se ocorrer divisão por zero) se uma reta secante horizontal é encontrado.

Zeros Reais de Funções Reais

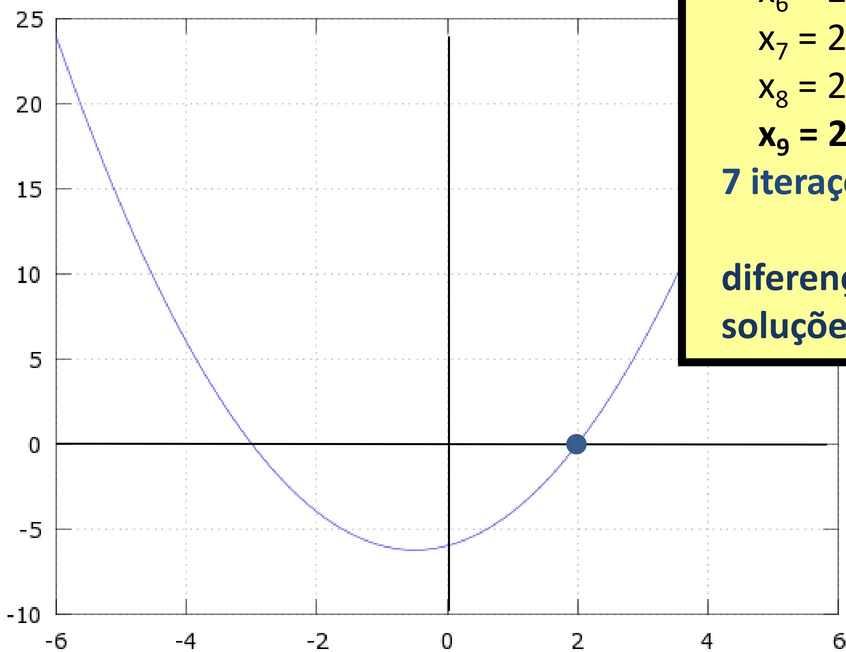
Método da Secante

Exemplo

$f(x) = y = x^2 + x - 6$

$x_0 = 10$
$X_1 = 15$

$\varepsilon = 10^{-5}$



$x_0 = 10$
$x_1 = 15$
$x_2 = 6{,}00000000000000$
$x_3 = 4{,}36363636363636$
$x_4 = 2{,}83200000000000$
$x_5 = 2{,}23995030614961$
$x_6 = 2{,}03287883540718$
$x_7 = 2{,}00149621510768$
$x_8 = 2{,}00000977158232$
$\mathbf{x_9 = 2{,}0000000292320}$

7 iterações

(Octave)

diferença entre as duas últimas soluções: $9{,}76865912738489 \times 10^{-6}$