Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Introdução

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Resolução de Sistemas Lineares

"75% dos problemas científicos envolvem a resolução de um sistema de equações lineares." (Salete Souza de Oliveira Buffoni, UFF)

Resolução de Sistemas Lineares

Introdução

- Um sistema linear é um conjunto de m equações lineares envolvendo n variáveis (x_i), i = 1,2, ... , n.

- Uma equação linear só apresenta termos proporcionais às variáveis na primeira potência (termos do tipo $a_i x_i$):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

não apresenta função aplicada à variável x_i, tipo x^n, $\ln(x)$, $\cos(x)$.

Resolução de Sistemas Lineares

Forma geral – Definição

Sistema com m equações e n variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema linear quadrado – Definição

Em um sistema linear quadrado o número de variáveis é igual ao número de equações (m=n).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo

Suponha que a velocidade de subida de um foguete em 3 momentos diferentes é dada por:

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
5	106,8
8	177,2
12	279,2

Em qualquer instante de tempo, a velocidade é aproximadamente $v(t)=at^2+bt+c$. Determinar os valores de a, b e c.

Pode-se configurar as equações na forma de um sistema de equações lineares para encontrar a, b e c.

$$v(5) = a(5^2) + b(5) + c = 25a + 5b + c = 106{,}8$$

$$v(8) = a(8^2) + b(8) + c = 64a + 8b + c = 177{,}2$$

$$v(12) = a(12^2) + b(12) + c = 144a + 12b + c = 279{,}2$$

continua...

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo

...continuação

$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 106{,}8 \\ 64a + 8b + c = 177{,}2 \\ 144a + 12b + c = 279{,}2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106{,}8 \\ 177{,}2 \\ 279{,}2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 106{,}8 \\ 177{,}2 \\ 279{,}2 \end{bmatrix}$$

Ax = b

Resolução de Sistemas Lineares

Resolução

- Resolver um sistema linear significa encontrar os valores numéricos das variáveis x_1, x_2, x_3,..., x_n que satisfazem todas as equações do sistema.

- A solução pode não existir, nem ser única

- Quanto a solução:
  I. Sistema possível determinado (uma única solução)
  II. Sistema possível indeterminado (infinitas soluções)
  III. Sistema Impossível (não possui solução)

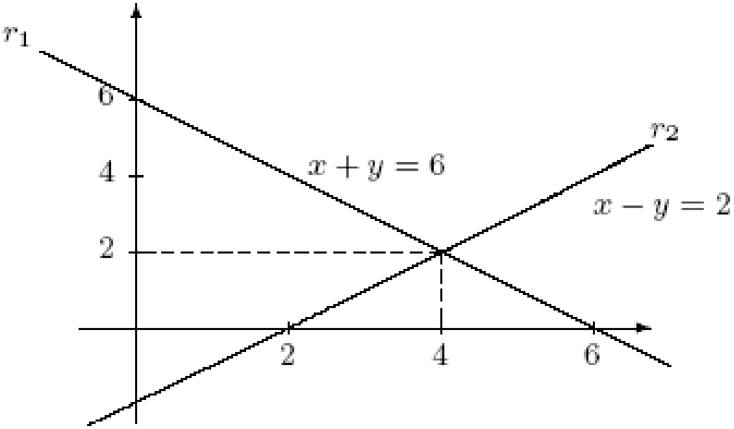
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

Exemplo: Sistema possível e determinado

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

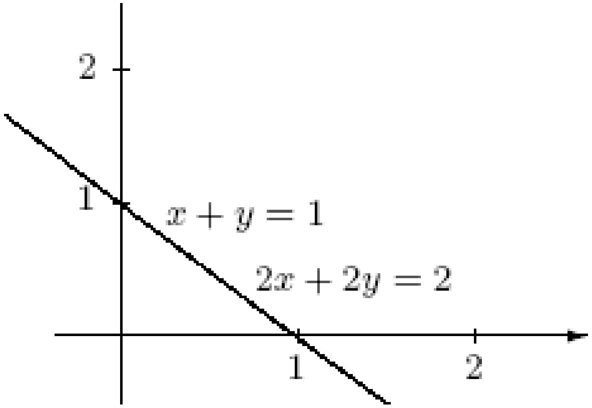


Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

<u>Exemplo</u>: Sistema possível mas indeterminado

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

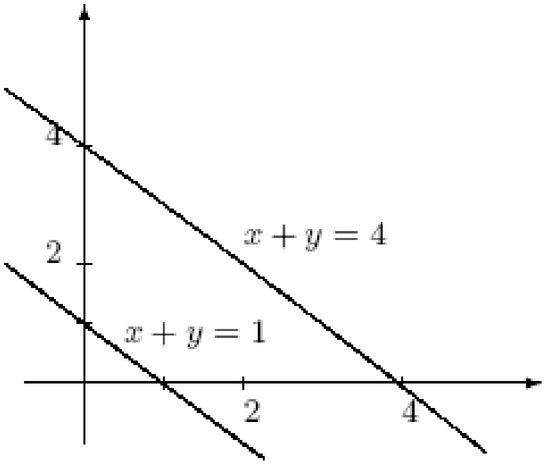


Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

<u>Exemplo</u>: Sistema impossível

$$(III) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$



Resolução de Sistemas Lineares

Métodos de Resolução

Os métodos numéricos para a resolução de um sistema linear podem ser divididos em métodos diretos e métodos iterativos.

<u>Métodos diretos (exatos)</u>: são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações.

- Método de Cramer (este método não faz parte da ementa da disciplina TP062)
- Eliminação de Gauss (ou triangulação)
- Fatoração LU (Decomposição LU)
- Fatoração de Cholesky (Decomposição Cholesky)

<u>Métodos iterativos</u>: são aqueles que permitem obter a solução de um sistema com uma dada precisão através de um processo iterativo convergente.

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel