Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Diretos

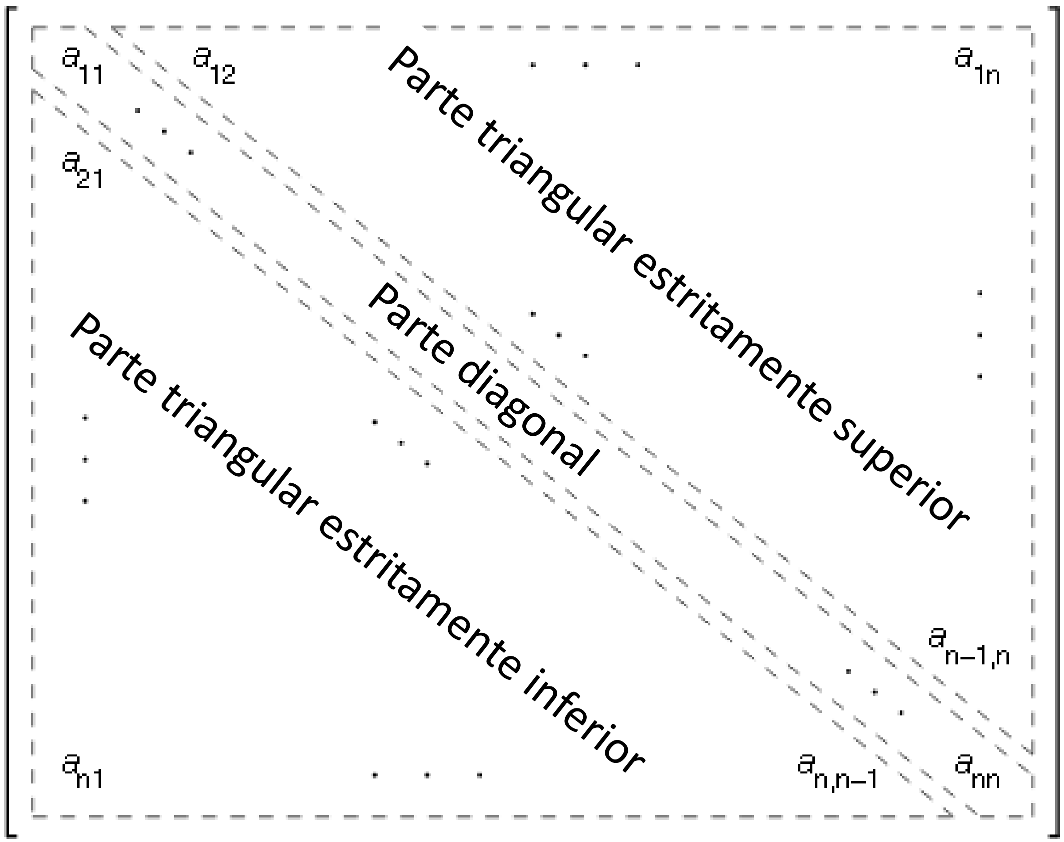
Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Resolução de Sistemas Lineares

- Eliminação de Gauss
- Decomposição LU
- Decomposição Cholesky

Resolução de Sistemas Lineares

Partição da matriz



Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Motivação

Qual sistema é mais fácil resolver?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathrm{K} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \mathrm{K} + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \mathrm{K} + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \mathrm{K} + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Introdução

Consiste em **transformar** o sistema a ser resolvido em um sistema triangular equivalente, por meio de operações elementares. A solução é então obtida, resolvendo-se um sistema triangular - resolução de forma retroativa.

Operações Elementares - Transformação do Sistema Linear:

- Trocar duas equações;
- Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Operações elementares garantem que o sistema obtido é equivalente ao original.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Construção da matriz aumentada [A b]

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}
\end{cases}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right]
$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Pivoteamento

pivô

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & K & a_{1n}^{(1)} & b_{1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & K & a_{2n}^{(1)} & b_{2}^{(1)} \\ M & M & O & M & M \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & K & a_{nn}^{(1)} & b_{n}^{(1)} \end{array}\right]$$

Zerar coeficientes de x_1 usando **operações elementares**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & K & a_{1n}^{(2)} & b_{1}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & K & a_{2n}^{(2)} & b_{2}^{(2)} \\ M & M & O & M & M \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & K & a_{nn}^{(2)} & b_{n}^{(2)} \end{array}\right]$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Pivoteamento

pivô

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \mathrm{K} & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \mathrm{K} & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \mathrm{K} & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & \mathrm{K} & a_{1n}^{(3)} & b_1^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & \mathrm{K} & a_{2n}^{(3)} & b_2^{(3)} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \mathrm{K} & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

Zerar coeficientes de x_2 usando **operações elementares**

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Estratégias práticas de pivoteamento.

O que acontece se o pivô for nulo?

- Pivô próximo de zero pode levar a resultados totalmente imprecisos.
- Para contornar este problema deve-se adotar uma estratégia para a escolha de um “bom” pivô.

Pivoteamento parcial

Escolher para pivô o elemento de maior módulo na coluna, dentre os que ainda irão atuar no processo de eliminação.

Pivoteamento completo

Escolher para pivô o elemento de maior módulo dentre todos os elementos que ainda irão atuar no processo de eliminação.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Resolução retroativa

Após a transformação do sistema a ser resolvido em um sistema triangular, resolve-se o sistema linear triangular de forma retroativa.

Suponha que após k iterações, alcançou-se a matriz triangular superior. Então a solução de forma retroativa do sistema triangular é dada pela fórmula.

$$x_i = \frac{b_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j}{a_{ii}^{(k)}}, \qquad \forall i = n, \ldots, 1$$

Da n-ésima equação calcule o valor de x_n; substitua este valor na equação de ordem $(n-1)$ e calcule o valor de x_{n-1}; substitua os dois valores na equação de ordem $(n-2)$ e obtenha o valor de x_{n-2}, ... , até chegar na primeira equação onde substituirá os valores de x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ... , x_4, x_3 e x_2 previamente calculados para obter o valor de x_1.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Resolução retroativa

$$\begin{cases} a_{11}^{(k)}x_1 = b_1^{(k)} - a_{12}^{(k)}x_3 - \ldots - a_{1(n-1)}^{(k)}x_{(n-1)} - a_{1n}^{(k)}x_n \\ a_{22}^{(k)}x_2 = b_2^{(k)} - a_{23}^{(k)}x_3 - \ldots - a_{2(n-1)}^{(k)}x_{(n-1)} - a_{2n}^{(k)}x_n \\ \ldots \\ a_{(n-1)(n-1)}^{(k)}x_{(n-1)}^{(k)} = b_{(n-1)}^{(k)} - a_{(n-1)n}^{(k)}x_n \\ a_{nn}^{(k)}x_n = b_n^{(k)} \end{cases}$$

Retroativa

Último

Penúltimo

...

2º

1º

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}^{(k)}}\left(b_1^{(k)} - a_{12}^{(k)}x_3 - \ldots - a_{1(n-1)}^{(k)}x_{(n-1)} - a_{1n}^{(k)}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(b_2^{(k)} - a_{23}^{(k)}x_3 - \ldots - a_{2(n-1)}^{(k)}x_{(n-1)} - a_{2n}^{(k)}x_n\right) \\ \ldots \\ x_{(n-1)}^{(k)} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}^{(k)}}\left(b_{(n-1)}^{(k)} - a_{(n-1)n}^{(k)}x_n\right) \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}^{(k)}}\left(b_n^{(k)}\right) \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$m_{21} = -\frac{1}{3}, \quad m_{31} = -\frac{4}{3}$$

duas operações elementares

$$L_2 \to L_2 + m_{21}L_1$$

$$L_3 \to L_3 + m_{31}L_1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{22}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$m_{32} = -1$$

uma operação elementar

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ -\frac{24}{3}x_3 = 1 \end{cases}$$

resolução retroativa

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Número de Operações

Seja um sistema de equações lineares Ax = b, com $A_{n \times n}$.

O número de operações para resolver o sistema via método de eliminação de Gauss é aproximadamente igual a

$$\frac{n^3}{3}$$

Por exemplo, se a matriz A possui dimensões 500×500, o total de operações para resolver o sistema Ax = b é aproximadamente

$$\frac{(500)^3}{3} = 4{,}2 \times 10^7 \quad (42 \text{ milhões})$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

Em muitas situações, é desejável resolver 2 sistemas lineares mais simples do que o original. Nesses caso, é indicado resolver o sistema linear Ax = b por uma técnica de decomposição da matriz A. Dentre as técnicas de decomposição mais utilizadas destaca-se a **Decomposição LU**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Procedimento

- Uma decomposição LU ou uma fatoração LU de uma matriz quadrada A é uma fatoração A = LU na qual L é triangular inferior e U triangular superior.

- Considere um sistema linear Ax = b onde A é uma matriz quadrada e inversível. Suponha que é possível obter uma Fatoração LU de forma que LU = A, tal que:
  - L seja quadrada, da mesma ordem de A e triangular inferior, inversível;
  - U seja quadrada, da mesma ordem de A e triangular superior, inversível.

- Assim, fazendo A = LU, temos LUx = b. Substituindo Ux por y (Ux = y), temos que Ly = b.
- Logo resolver o sistema Ax = b é equivalente a resolver o sistema Ux = y*, onde y* é a solução do sistema Ly = b.
- $x = U^{-1}y^* = U^{-1}L^{-1}b = (LU)^{-1}b = A^{-1}b$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo

$$A_{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad L_2^{(1)} = L_2^{(0)} + \left(-\frac{1}{3}\right) L_1^{(0)} \qquad A_{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + \left(-\frac{4}{3}\right) L_1^{(1)} \qquad A_{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix}$$

$$A_{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} \qquad L_3^{(3)} = L_3^{(2)} + (-1) L_2^{(2)} \qquad A_{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

continua ...

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo

... continuação

A matriz superior U foi determinada. <u>E a matriz inferior L?</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$E_2 \times E_1 \times E_0 \times A = U \qquad \Rightarrow \qquad (E_2 \times E_1 \times E_0)^{-1} \times (E_2 \times E_1 \times E_0) \times A = (E_2 \times E_1 \times E_0)^{-1} \times U$$

$$A = (E_2 \times E_1 \times E_0)^{-1} \times U \qquad \Rightarrow \qquad A = (E_0)^{-1} \times (E_1)^{-1} \times (E_2)^{-1} \times U$$

$$L = (E_0)^{-1} \times (E_1)^{-1} \times (E_2)^{-1} \text{ e } U = E_2 \times E_1 \times E_0 \times A \qquad \Rightarrow \qquad A = L \times U$$

continua ...

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo

... continuação

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (E_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (E_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = (E_0)^{-1} \times (E_1)^{-1} \times (E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo(Resumo)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} = A^{(1)} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

$m_{21}= -1/3$ e $m_{31}= -4/3$

$m_{32}=-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = U$$

continua ...

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo(Resumo)

... continuação

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Procedimento para resolução do sistema

O Método da Decomposição LU

Este método, também conhecido como Método de Doolittle, consiste na seguinte sequência de passos:

i. Obter a fatoração LU da matriz A;

ii. Substituir Ux por y (fazer $Ux = y \Rightarrow LUx = Ly \Rightarrow Ly = b$);

iii. Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$;

iv. Obtida a solução y^* do sistema $Ly = b$, resolver o sistema triangular superior $Ux = y^*$.

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo de Resolução de Sistema Linear

i. Obter a fatoração LU da matriz A

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii. Resolver o sistema triangular inferior Ly = b

$$\begin{cases} 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 2 \\ \frac{4}{3}y_1 + 1y_2 + 1y_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

iii. Resolver o sistema triangular superior Ux = y*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky

Quando a matriz é simétrica, positiva definida, então o método de decomposição Cholesky é mais apropriado que o método LU.

A fatoração LU requer aproximadamente $2n^3/3$ operações para ser concluída onde n é a ordem da matriz. A fatoração de Cholesky requer aproximadamente metade.

Requisitos

Para que a fatoração de Cholesky possa ser realizada é necessário que a matriz A seja **simétrica** e **definida positiva**.

Uma matriz A é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todo $x \in R^n$, $x \neq 0$. Se uma matriz A é definida positiva ela pode ser descrita na forma

$$\mathbf{A = G \times G^T}$$

onde **G** é triangular inferior. Os elementos da diagonal de **G** são estritamente positivos.

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{21} & \dots & g_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & g_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = GG^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

- $a_{11} = (g_{11})^2 \Rightarrow g_{11} = (a_{11})^{1/2}$
- $a_{12} = g_{21}\, g_{11} \Rightarrow g_{21} = a_{12}/g_{11}$
- $a_{13} = g_{31}\, g_{11} \Rightarrow g_{31} = a_{13}/g_{11}$
- $a_{22} = (g_{21})^2 + (g_{22})^2 \Rightarrow g_{22} = (a_{22} - (g_{21})^2)^{1/2}$
- ...

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky – Procedimento

- Suponha A definida positiva e simétrica, fatorada em $A = LU = GG^T$.

- Conhecido o fator G, temos $Ax = GG^Tx = b$. Estes sistema é resolvido em dois passos:

  i. Resolve-se o sistema $Gy = b$, obtendo y^* como solução;

  ii. A seguir, resolve-se o sistema $G^Tx = y^*$, obtendo os valores de x que são a solução do sistema $Ax = b$.

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky – Exemplo de Resolução de Sistema Linear

i. Obter a fatoração GG^T da matriz A;

$$\begin{cases} 5x_1 & +1x_2 & +7x_3 & =2 \\ 1x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =3 \\ 7x_1 & +2x_2 & 12x_3 & =3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = (g_{11})^2 \Rightarrow g_{11} = (5)^{1/2} = \sqrt{5}$

$a_{12} = g_{21}\, g_{11} \Rightarrow g_{21} = 1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$

$a_{13} = g_{31}\, g_{11} \Rightarrow g_{31} = 7/\sqrt{5} = 7\sqrt{5}/5$

$a_{22} = (g_{21})^2 + (g_{22})^2 \Rightarrow g_{22} = (2 - (\sqrt{5}\,/5)^2)^{1/2} = (2 - 1/5)^{1/2} = (9/5)^{1/2} = 3\sqrt{5}/5$

$a_{32} = g_{31} \times g_{21} + g_{22} \times g_{32} \Rightarrow g_{32} = (1/3\sqrt{5}/5) \times (2 - 7/\sqrt{5} \times \sqrt{5}/5) = \sqrt{5}/5$

$a_{33} = (g_{31})^2 + (g_{32})^2 + (g_{33})^2 \Rightarrow g_{33} = (12 - (7\sqrt{5}/5)^2 - (\sqrt{5}/5)^2)^{1/2} = \sqrt{2}$

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \sqrt{5}/5 & 3\sqrt{5}/5 & 0 \\ 7\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad G^T = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5}/5 & 7\sqrt{5}/5 \\ 0 & 3\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição Cholesky – Exemplo de Resolução de Sistema Linear

i. Obter a fatoração GG^T da matriz A

$$\begin{cases} 5x_1 & +1x_2 & +7x_3 & =2 \\ 1x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =3 \\ 7x_1 & +2x_2 & +12x_3 & =3 \end{cases} \Rightarrow G=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \sqrt{5}/5 & 3\sqrt{5}/5 & 0 \\ 7\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad G^T=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5}/5 & 7\sqrt{5}/5 \\ 0 & 3\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ii. Resolver o sistema triangular inferior Gy = b

$$\begin{cases} \sqrt{5}y_1 & +0y_2 & +0y_3 & =2 \\ \frac{\sqrt{5}}{5}y_1 & +\frac{3\sqrt{5}}{5}y_2 & +0y_3 & =3 \\ \frac{7\sqrt{5}}{5}y_1 & +\frac{\sqrt{5}}{5}y_2 & +\sqrt{2}y_3 & =3 \end{cases} \Rightarrow \quad y^*=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{13\sqrt{5}}{15} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

iii. Resolver o sistema triangular superior $G^Tx = y^*$

$$\begin{cases} \sqrt{5}x_1 & +\frac{\sqrt{5}}{5}x_2 & +\frac{7\sqrt{5}}{5}x_3 & =\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0x_1 & +\frac{3\sqrt{5}}{5}x_2 & +\frac{\sqrt{5}}{5}x_3 & =\frac{13\sqrt{5}}{15} \\ 0x_1 & +0x_2 & +\sqrt{2}x_3 & =-\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Revisão dos métodos diretos

Eliminação de Gauss com pivotamento

- Custo de memória: $O(n^2)$
- Custo computacional: $O(n^3)$
- Só pode ser utilizado para n pequeno, p. ex., n <= 1000

Decomposição LU

- Custo de memória: $O(n^2)$
- Custo computacional: $O(n^2)$
- Só pode ser utilizado para n pequeno, p. e.x., n <= 1000
- Bom para resolver problema para os quais o sistema linear assume valores diferente no lado direito (termos independentes diferentes)

www.math.nus.edu.sg/~bao/teach/ma5233/lect3.ppt