UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Introdução

- É bastante comum encontrar sistemas lineares que envolvem uma grande porcentagem de coeficientes nulos. Esses sistemas são chamados de sistemas esparsos. Para esses tipos de sistemas, o método de Eliminação de Gauss não é o mais apropriado, pois ele não preserva essa esparsidade, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema.
- Métodos iterativos são mais econômicos no que tange a memória dos computadores
- Podem ser usados para reduzir os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos
- Em alguns casos podem ser aplicados para resolver conjuntos de equações não lineares

(Ruggiero, página 154)

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Introdução

- Um método é iterativo quando fornece uma sequência de aproximações da solução.

- Cada uma das aproximações é obtida das anteriores pela repetição do mesmo processo.

- Precisamos sempre saber se a sequência obtida está convergindo ou não para a solução desejada.

- Dada uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$, dizemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para x se $||x^{(k)} - x|| \to 0$, quando $k \to \infty$.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Introdução

- Portanto, como todo processo iterativo, estes métodos sempre apresentarão um resultado aproximado, que será tão próximo do resultado real conforme o número de iterações realizadas.

- Para determinar a solução de um sistema linear por métodos iterativos, precisamos transformar o sistema dado em um outro sistema onde possa ser definido um processo iterativo.

- A solução obtida para o sistema transformado deve ser também solução do sistema original (sistemas lineares devem ser equivalentes).

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Algoritmo

- Escrever o sistema $Ax = b$, de forma equivalente $x = Fx + d$ (tal como $f(x) = x - g(x)$ para iterações de ponto fixo).
- Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$.
- Começando com $x^{(0)}$, gerar uma sequência de aproximações $\{x^k\}$ de forma iterativa através de

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d$$

fazendo $x^{(1)} = Fx^{(0)} + d$, $x^{(2)} = Fx^{(1)} + d$ e assim sucessivamente.

Observação

- A representação de F e d depende do tipo de método usado.
- Assim, para métodos iterativos diferentes, F e d são obtidos a partir de A e b de formas diferentes.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Algoritmo

- Como $k \to \infty$, a seqüência $\{x^{(k)}\}$ converge para o vetor solução sob algumas condições da matriz F.
- Isto impõe condições diferentes na matriz A para diferentes métodos.
- Para a mesma matriz A, um método pode convergir, enquanto outro pode divergir.
- Portanto, para cada processo, a relação entre A e F deve ser encontrada para decidir sobre a convergência.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Algoritmo

Quando Parar?

- Se a sequência $\{x^{(k)}\}$ estiver suficientemente próximo de $x^{(k-1)}$ paramos o processo.
- Dada um precisão ε, quando $||x^{(k)} - x|| < \varepsilon$ então $x^{(k)}$ é a solução do sistema linear.
- Computacionalmente, um número máximo de iterações também é critério de parada.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Resolução de Sistemas Lineares

Corollary 7.20 If $\|T\| < 1$ for any natural matrix norm and $\mathbf{c}$ is a given vector, then the sequence $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ defined by $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ converges, for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, to a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, with $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$, and the following error bounds hold:

(i) $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$; **(ii)** $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$. ■

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Motivação

Seja um sistema com n variáveis e n equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \mathrm{M} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - \left(a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n\right) \\ a_{22}x_2 = b_2 - \left(a_{21}x_1 + \mathrm{K} + a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \\ a_{nn}x_n = b_n - \left(a_{n1}x_1 + \mathrm{K} + a_{nn\text{-}1}x_{n\text{-}1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2 + \mathrm{K} + a_{1n}x_n\right)\right] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1 + \mathrm{K} + a_{2n}x_n\right)\right] \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1 + \mathrm{K} + a_{nn\text{-}1}x_{n\text{-}1}\right)\right] \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Seja $x^{(0)}$ uma solução inicial para este sistema . Calculando o segundo valor, $x^{(1)}$, da sequência $\{x^{(k)}\}$ a partir de $x^{(0)}$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right)\right] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n\right)\right] \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(0)}\right] \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(0)}\right] \\ \ldots \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}\right] \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Calculando o valor de ordem (k+1) da sequência $\{x^{(k)}\}$ a partir de $x^{(k)}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \Lambda - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right] \end{cases}$$

Equação geral

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

- Seja o sistema

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \Lambda - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \Lambda - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right] \end{cases}$$

- Considerando que $\mathbf{x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d}$, então temos

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots\dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots\dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots\dots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

A iteração $x^{k+1} = Fx^k + d$ para o método Gauss-Jacobi

A matriz A pode ser rescrita como A=L+D+U (não é decomposição)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$Ax = b \Rightarrow (L + D + U)x = b$ $\qquad Dx^{k+1} = [b-(L+U)x^k]$ $\qquad x^{k+1} = (1/D)*[b-(L+U)x^k]$

$D_{n\times n}$ é matriz diagonal formado pelos elementos da diagonal de A

$U_{n\times n}$ matriz triangular superior formada pelos elementos acima da diagonal de A

$L_{n\times n}$ matriz triangular inferior formada pelos elementos abaixo da diagonal de A

Fazendo $Q_{n\times n} = (U_{n\times n} + L_{n\times n})$, e considerando $D_{n\times n}$ tal que $A = (L + D + U)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{D_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Pseudo-Algoritmo

1. Sejam $A_{n\times n}$ e $b_{n\times 1}$
2. Construa as matrizes Q e D tal que Q = (U + L) e A = (L + D + U)
3. Faça $x^{(0)} = 0$; k = 0; Erro = Inf; Tolerancia = 10^{-5};
4. while Erro > Tolerancia

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{D_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

   k = k + 1;

   Erro = $||b - Ax^k||$;

   end

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Critério de Convergência das linhas

Critério das linhas.

Dado o sistema Ax = b, seja $\alpha_k = \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{n} | a_{kj} | \right) / | a_{kk} |$

Se $\alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma série convergente para a solução do sistema independentemente da escolha de $x^{(0)}$.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \text{ (matriz diagonalmente dominante)}$$

Se A é uma matriz diagonalmente dominante, então o método Jacobi converge para qualquer vetor inicial $x^{(0)}$.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Critério das linhas – Exemplo

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 7 \\ 1\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 = -8 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 10\,x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0{,}3 < 1 \qquad \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0{,}4 < 1 \qquad \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0{,}5 < 1$$

Como $\alpha = \max\limits_{1 \le k \le 4} \alpha_k = 0{,}5 < 1$ $\Rightarrow$ **logo, a sequência converge**

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Exemplo 1

$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$ A matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante	$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b - Ax^{(0)} \right\Vert = 26{,}7395$
$x_1^{(1)} = \dfrac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$ $x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(0)} + x_3^{(0)}}{8} = \dfrac{21}{8} = 2{,}625$ $x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{5} = \dfrac{15}{5} = 3{,}0$	$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}750 \\ 2{,}625 \\ 3{,}000 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b - Ax^{(1)} \right\Vert = 10{,}0452$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Exemplo 1

$x_1^{(2)} = \dfrac{7 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{4} = \dfrac{7 + 2{,}625 - 3}{4} = 1{,}65625$ $x_2^{(2)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(1)} + x_3^{(1)}}{8} = \dfrac{21 + 4 \times 1{,}75 + 3}{8} = 3{,}875$ $x_3^{(2)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{5} = \dfrac{15 + 2 \times 1{,}75 - 2{,}625}{5} = 4{,}225$	$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}6562 \\ 3{,}8750 \\ 4{,}2250 \end{bmatrix}$	$\left\lVert b - Ax^{(2)} \right\rVert = 6{,}7413$
$x_1^{(3)} = \dfrac{7 + 3{,}875 - 4{,}225}{4} = 1{,}6625$ $x_2^{(3)} = \dfrac{21 + 4 \times 1{,}65625 + 4{,}225}{8} = 3{,}98125$ $x_3^{(3)} = \dfrac{15 + 2 \times 1{,}65625 - 3{,}875}{5} = 2{,}8875$	$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}66250 \\ 3{,}98125 \\ 2{,}88750 \end{bmatrix}$	$\left\lVert b - Ax^{(3)} \right\rVert = 1{,}9534$

A matriz é uma diagonalmente dominante, então o método Jacobi converge.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Exemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Ax = b \Rightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Solução exata

$$F = \begin{pmatrix} 0{,}0000 & -0{,}2000 & -0{,}2000 \\ -0{,}2000 & 0{,}0000 & -0{,}2000 \\ -0{,}2000 & -0{,}2000 & 0{,}0000 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{d_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j^{(k)} \right] \\ x^{(k+1)} = d + F_i x^{(k)} \end{array} \right)$$

$$d = b/D = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 7/5 \\ 7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4000 \\ 1{,}4000 \\ 1{,}4000 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{pmatrix}$$

Erro: $\left\| b - Ax^{(0)} \right\| = 12{,}124$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Exemplo 2

$x^{(1)} = Fx^{(0)} + d = \begin{pmatrix} 1{,}4000 \\ 1{,}4000 \\ 1{,}4000 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(1)} \right\rVert = 4{,}8497$	$x^{(2)} = Fx^{(1)} + d = \begin{pmatrix} 0{,}8400 \\ 0{,}8400 \\ 0{,}8400 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(2)} \right\rVert = 1{,}9399$
$x^{(3)} = Fx^{(2)} + d = \begin{pmatrix} 1{,}0640 \\ 1{,}0640 \\ 1{,}0640 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(3)} \right\rVert = 0{,}77596$	$x^{(4)} = Fx^{(3)} + d = \begin{pmatrix} 0{,}9744 \\ 0{,}9744 \\ 0{,}9744 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(4)} \right\rVert = 0{,}31038$
$x^{(5)} = Fx^{(4)} + d = \begin{pmatrix} 1{,}0102 \\ 1{,}0102 \\ 1{,}0102 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(5)} \right\rVert = 0{,}12367$	$x^{(6)} = Fx^{(5)} + d = \begin{pmatrix} 0{,}9959 \\ 0{,}9959 \\ 0{,}9959 \end{pmatrix}$ $\left\lVert b - Ax^{(6)} \right\rVert = 0{,}04971$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel

Resolução de Sistemas Lineares

Calculando o valor $x^{(k+1)}$ da sequência $\{x^{(k)}\}$ a partir de $x^{(k)}$

Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \Lambda - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right] \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \Lambda - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right] \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \Lambda\ - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda\ - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \Lambda\ - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases} \Bigg\rangle$$

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \Lambda - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \Lambda - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

$Ax = b \Rightarrow (L + D + U)x = b$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1}}_{Lx^{k+1}} - \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k}}_{Ux^{k}}\right]$$

Dx^{k+1}

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Pseudo-Algoritmo

1. Sejam $A_{n \times n}$ e $b_{n \times 1}$
2. Construa as matrizes D, L e U tal que A = (L + D + D)
3. Faça $x^{(0)} = 0$; k = 0; Erro = Inf; Tolerancia = 10^{-5};
4. while Erro > Tolerancia

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{D_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} L_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{j=n} U_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

K = k + 1;

Erro = $||b - Ax^k||$;

end

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência

- Gauss-Jacobi converge para qualquer vetor inicial, se a matriz A é uma matriz diagonal dominante.
- Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial se A é uma matriz definida positiva.
- A Matrix é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todo x diferente do vetor nulo.
- A matriz é definida positiva, se todos os autovalores são positivos.
- Mas o critério a ser adotado para convergência do método Gauss-Seidel será o de SASSENFELD.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência

Critérios de Convergência;

1) Critério das linhas –para o método GAUSS-JACOBI;

2) Critério de Sassenfeld – para o método GAUSS-SEIDEL.

Os critérios acima estabelecem condições suficientes para a convergência.

Critério de Sassenfeld

Sejam as quantidades β_i dadas por:

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \qquad \beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \left[\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right], \; i = 2,3,\ldots,n$$

Se $\beta = \max_{1 \le i \le n}\{\beta_i\}$ o método de Gauss-Seidel convergirá. Quanto menor β, mais rápida é a convergência.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Sassenfeld

Sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}$$

e

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \ldots + |a_{ii-1}|\beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \ldots |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

$$= [\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|] / |a_{ii}| \quad i = 2,3,\ldots n$$

Seja $\beta = \max_{1 \le i \le n}\{\beta_i\}$. Se $\beta < 1$, o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para qualquer $x^{(0)}$. Quanto menor β, mais rápida a convergência.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência de Sassenfeld – Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \left(| a_{12} + | a_{13} | + | a_{14} \right)$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{a_{22}}\right| \left(|a_{21}| \beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}| \right)$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{a_{33}}\right| \left(|a_{31}| \beta_1 + |a_{32}| \beta_2 + |a_{34}| \right)$$

$$\beta_4 = \left|\frac{1}{a_{44}}\right| \left(|a_{41}| \beta_1 + |a_{42}| \beta_2 + |a_{43}| \beta_3 \right)$$

Seja $\beta = \max\limits_{1 \le i \le 4} \{\beta_i\}$. Se β é menor que 1 então o método iterativo Gauss-Seidel irá convergir para a solução do sistema.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Sassenfeld – Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 0{,}4 \\ 0{,}6x_1 + 3x_2 - 0{,}6x_3 - 0{,}3x_4 = -7{,}8 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}2x_4 = 1 \\ 0{,}4x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 3 & -0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 1{,}2 & 0{,}8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + 0{,}2 + 0{,}2) = 0{,}7 \\ \beta_2 = \frac{1}{3}(0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}3) = 0{,}44 \\ \beta_3 = \frac{1}{1}(0{,}1 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}44 + 0{,}2) = 0{,}358 \\ \beta_4 = \frac{1}{4}(0{,}4 \times 0{,}7 + 1{,}2 \times 0{,}44 + 0{,}8 \times 0{,}358) = 0{,}2736 \end{cases}$$

$$\beta = \max_{1 \le i \le 4}\{\beta_i\} = \max\{0{,}7,\ 0{,}44,\ 0{,}358,\ 0{,}2736\} = 0{,}7$$

Como $\beta < 1$, a sequência gerada pelo método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema Ax = b.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 1

$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$ A matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante	$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b - Ax^{(0)} \right\Vert = 26{,}7395$
$x_1^{(1)} = \dfrac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$ $x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{8} = \dfrac{21 + 4 \times 1{,}75}{8} = 3{,}5$ $x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{5} = \dfrac{15 + 2 \times 1{,}75 - 3{,}5}{5} = 3{,}0$	$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}750 \\ 3{,}500 \\ 3{,}000 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b - Ax^{(1)} \right\Vert = 3{,}0414$ $\left(GJ : \left\Vert b - Ax^{(1)} \right\Vert = 10{,}0452 \right)$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 1

$x_1^{(2)} = \dfrac{7+x_2^{(1)}-x_3^{(1)}}{4} = \dfrac{7+3{,}5-3}{4} = 1{,}875$ $x_2^{(2)} = \dfrac{21+4x_1^{(2)}+x_3^{(1)}}{8} = \dfrac{21+4\times 1{,}875+3}{8} = 3{,}9375$ $x_3^{(2)} = \dfrac{15+2x_1^{(2)}-x_2^{(2)}}{5} = \dfrac{15+2\times 1{,}875-3{,}9375}{5} = 2{,}9625$	$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}8750 \\ 3{,}9375 \\ 2{,}9625 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b-Ax^{(2)}\right\Vert = 0{,}4765$ $\left(GJ : \left\Vert b-Ax^{(2)}\right\Vert = 6{,}7413\right)$
$x_1^{(3)} = \dfrac{7+3{,}9375-2{,}9625}{4} = 1{,}9937$ $x_2^{(3)} = \dfrac{21+4\times 1{,}9937+2{,}9625}{8} = 3{,}9921$ $x_3^{(3)} = \dfrac{15+2\times 1{,}9937-3{,}9922}{5} = 2{,}9991$	$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}9937 \\ 3{,}9921 \\ 2{,}9991 \end{bmatrix}$	$\left\Vert b-Ax^{(3)}\right\Vert = 0{,}0408$ $\left(GJ : \left\Vert b-Ax^{(3)}\right\Vert = 1{,}9534\right)$

Quando ambos Jacobi e Gauss-Seidel convergem, Gauss-Seidel converge mais rápido.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 2

$x^{(1)} = Fx^{(0)} + d = \begin{pmatrix} 1,4000 \\ 1,1200 \\ 0,8960 \end{pmatrix}$	$x^{(2)} = Fx^{(1)} + d = \begin{pmatrix} 0,9968 \\ 1,0214 \\ 0,9964 \end{pmatrix}$
$x^{(3)} = Fx^{(2)} + d = \begin{pmatrix} 0,9964 \\ 1,0014 \\ 1,0004 \end{pmatrix}$	$x^{(4)} = Fx^{(3)} + d = \begin{pmatrix} 0,9996 \\ 1,0000 \\ 1,0001 \end{pmatrix}$
$x^{(5)} = Fx^{(4)} + d = \begin{pmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ 1,0000 \end{pmatrix}$	

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel – Comparação

Implementação paralela: Gauss-Jacobi

$$\text{Gauss}-\text{Jordan}: \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{D_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} L_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{j=n} U_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$\text{Gauss}-\text{Seidel}: \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{D_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} L_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{j=n} U_{ij} x_j^{(k)} \right]$$