UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

# Métodos Numéricos

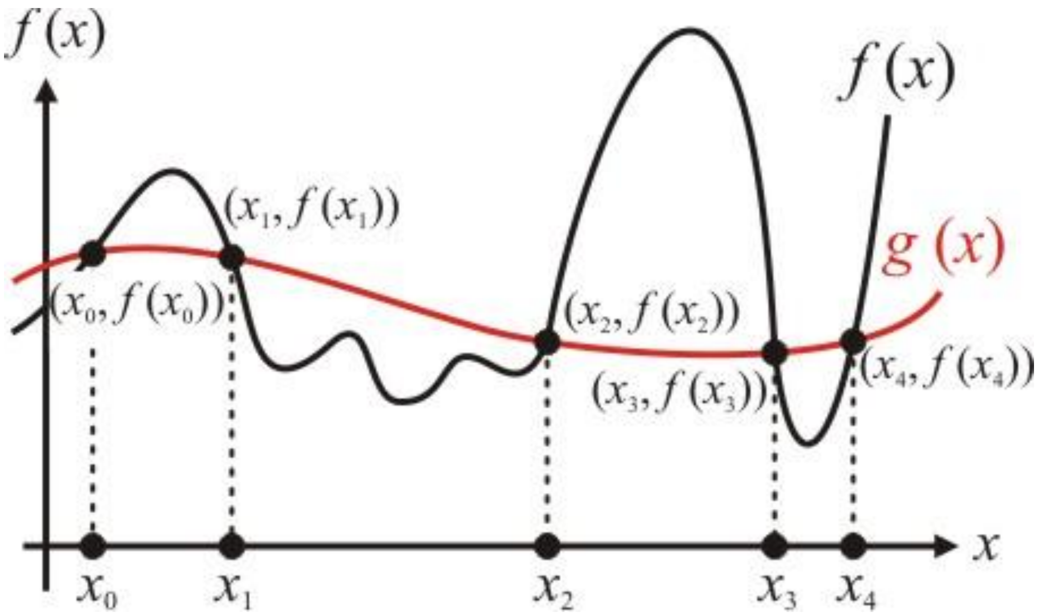
## Interpolação – Métodos de Lagrange

**Professor Volmir Eugênio Wilhelm**
**Professora Mariana Kleina**

# Interpolação

Consiste em determinar uma função $g(x)$ que descreve de forma aproximada o comportamento de outra função $f(x)$ que não se conhece. São conhecidos alguns valores tabelados do tipo $(x, f(x))$.

# Interpolação




- No exemplo só se conhece a função para 5 valores de $x$ - **nós de interpolação**
- Deseja-se conhecer o valor da função em pontos intermediários

# Interpolação

## Interpolação e Extrapolação

- O método para estimar valores entre dois pontos conhecidos é chamado de **<u>interpolação</u>**.

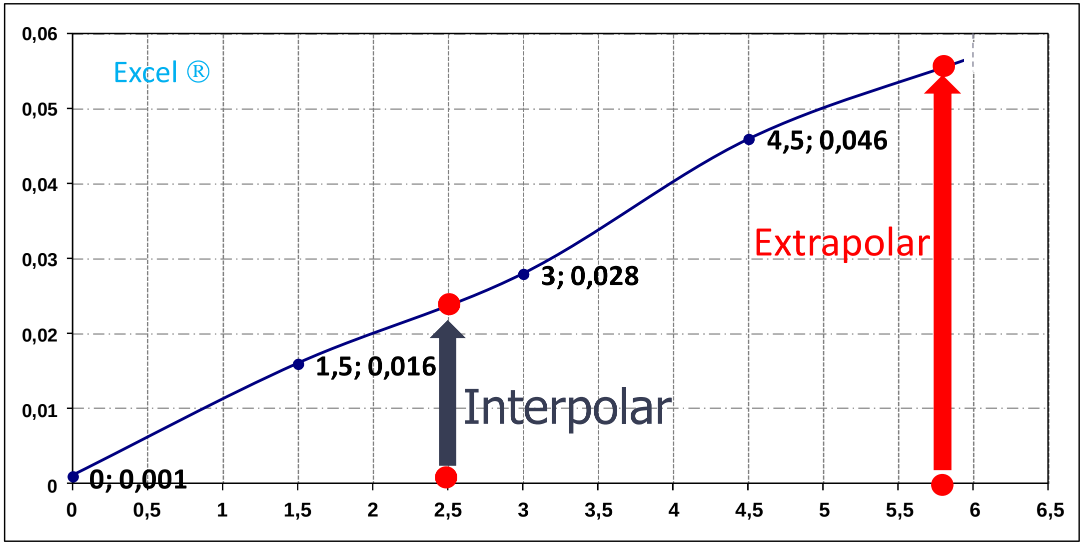
  **<u>Interpolar</u>** um ponto x a um conjunto de n + 1 dados $\{x_i, f(x_i)\}$**,** significa calcular o valor de f(x)**,** sem conhecer a forma analítica de f(x) ou ajustar uma função analítica aos dados.

- O método para estimar valores “fora” de pontos conhecidos é a **<u>extrapolação</u>**.

# Interpolação

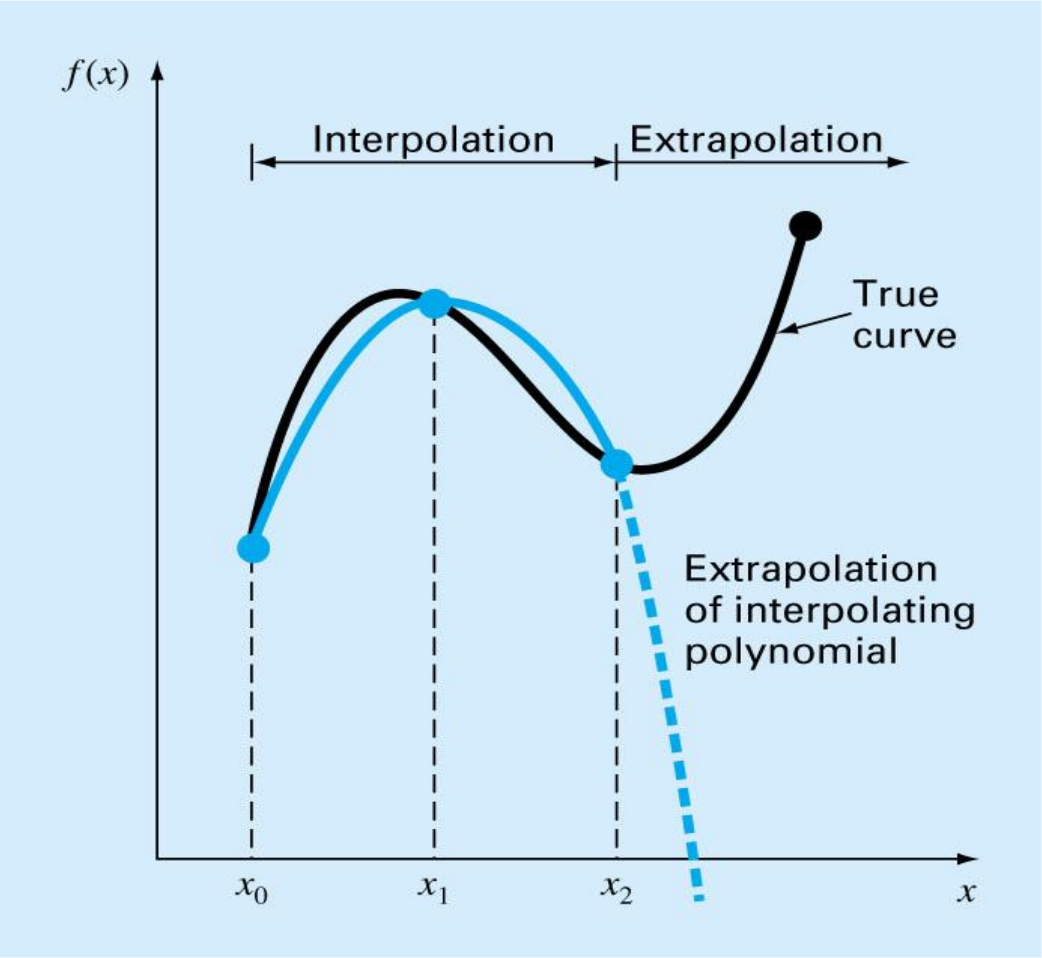
## Interpolação e Extrapolação

| x | f(x) |
|---|---|
| 0,0 | 0,001 |
| 1,5 | 0,016 |
| 3,0 | 0,028 |
| 4,5 | 0,046 |



# Interpolação

## Interpolação e Extrapolação



# Interpolação

## Interpolação – Motivação

- Seja um conjunto de dados $\{x_i, f(x_i)\}$ tal como na tabela abaixo:

| Temperatura – t | 0,000 | 5,000 | 10,000 | 15,000 |
|---|---|---|---|---|
| Viscosidade – v(t) | 1,792 | 1,519 | 1,308 | 1,140 |

- Como obter a viscosidade (v(t)) para uma dada temperatura (t) que não tenha sido medida? Por exemplo, v(8) vale quanto?

- Quando se deseja conhecer o valor de f(x) para x entre dois valores conhecidos, isto é, $x_i < x < x_{i+1}$, pode-se usar diferentes técnicas de interpolação.

# Interpolação

## Interpolação – Técnicas

- A classe de funções escolhida para a interpolação é *a priori* arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

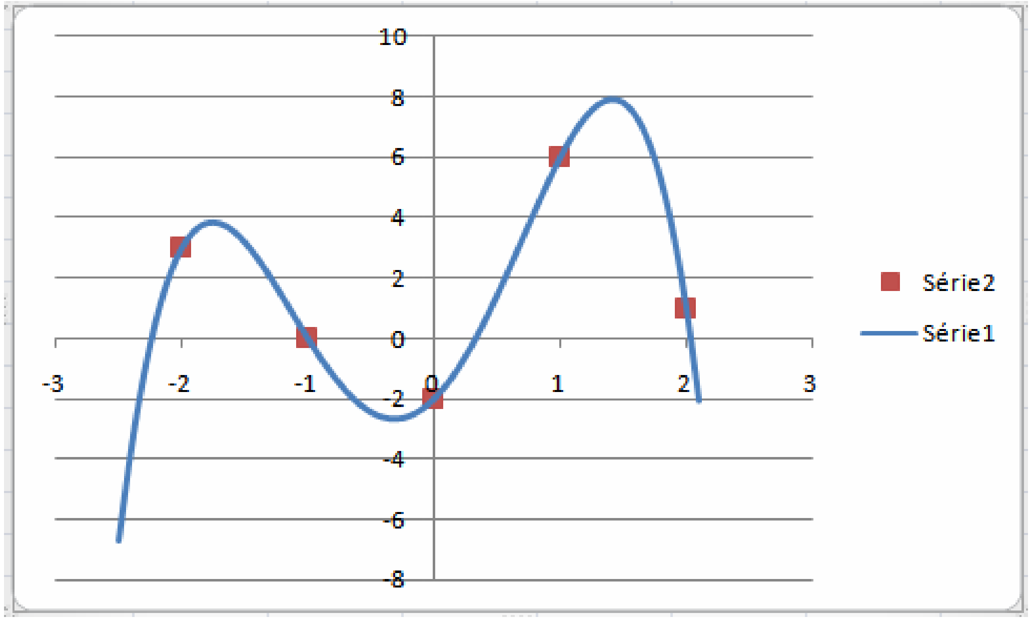
- A interpolação é executada usando funções aproximadas, tais como:

1. Funções trigonométricas
2. Funções exponenciais
3. Série de Fourier
4. Wavelets
5. Splines
6. **Polinômios – Interpolação Polinomial**

# Interpolação

## Interpolação Polinomial

A **interpolação polinomial** consiste em determinar um **polinômio**, que assume valores conhecidos nos **nós de interpolação**.



# Interpolação

## Interpolação Polinomial – Vantagens

Polinômios são a escolha mais comum de interpolação porque eles são fáceis de:

- Avaliar;
- Diferenciar; e
- Integrar.

# Interpolação

## Interpolação Polinomial

- Polinômios satisfazem o <u>teorema de unicidade</u>: um polinômio de grau menor ou igual a n passando exatamente por n + 1 pontos é único.
- O polinômio ajustado a um conjunto específico de pontos pode assumir diferentes formas, mas todas as formas são equivalentes.
- Qualquer forma pode ser transformada em outra através de simples rearranjo algébrico.

# Interpolação

## Interpolação Polinomial

- Quando um polinômio de grau menor ou igual a n, $p_n(x)$, é ajustado exatamente a um conjunto de n + 1 pontos discretos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$, o polinômio não tem erro nos pontos dados. Ou seja, o polinômio “passa” pelos pontos dados.

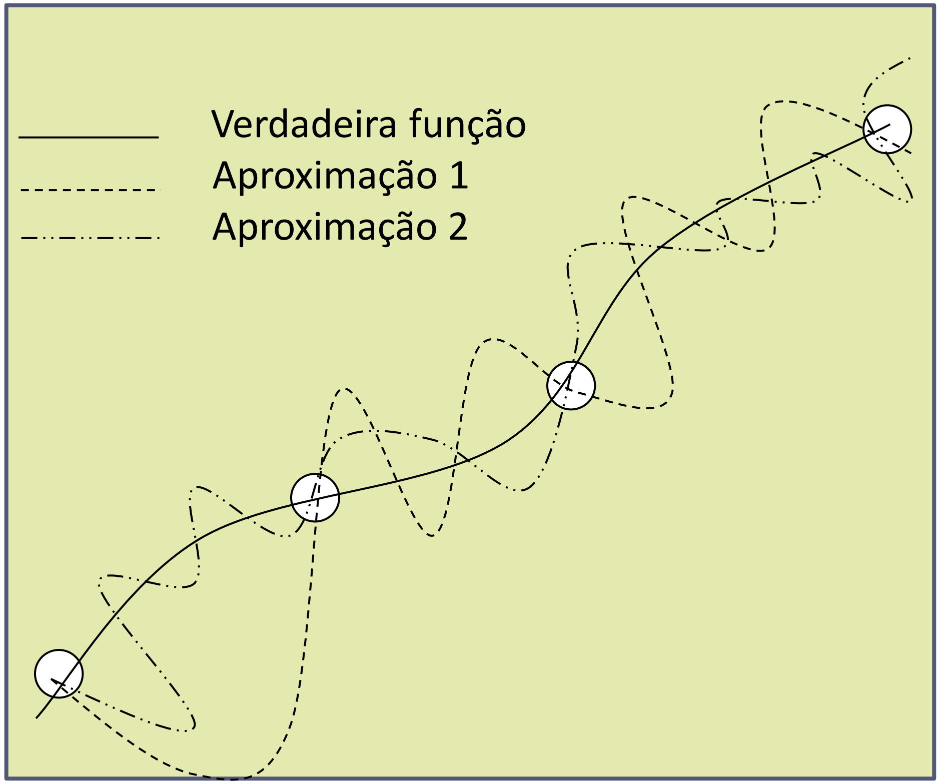
- No entanto, nos pontos intermediários há erros em relação ao verdadeiro valor de $f(x)$ e $p_n(x)$, o qual é dado por

$$E(x) = f(x) - p_n(x)$$

# Interpolação

**Interpolação Polinomial**

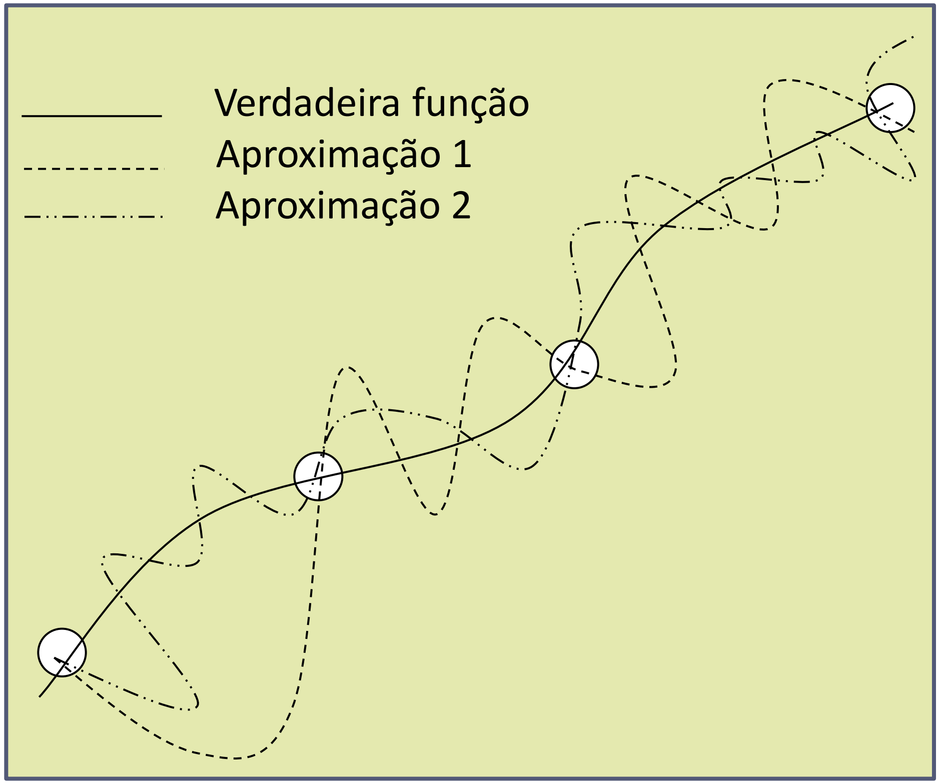
- O polinômio estimado (aproximado a partir da interpolação polinomial) deve passar por todos os pontos conhecidos.
- Nos pontos intermediários deverá passar próximo.



# Interpolação

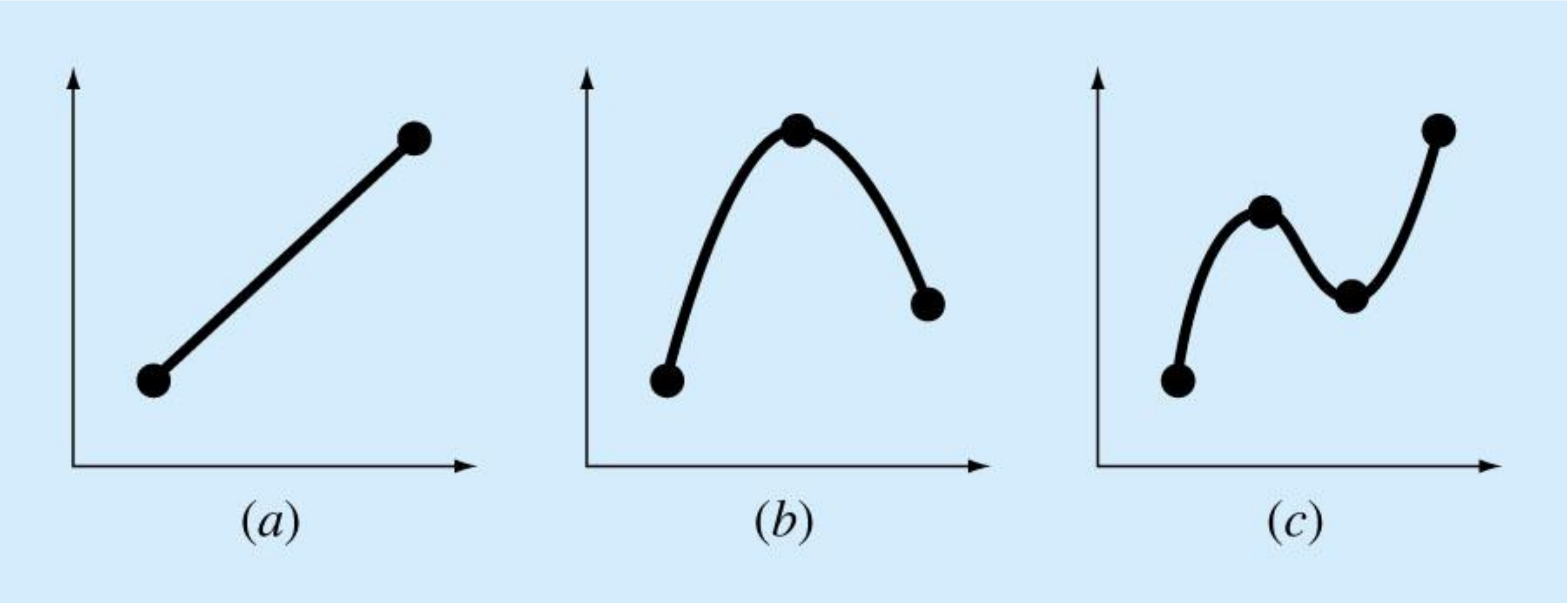
## Interpolação Polinomial

- O polinômio de interpolação pode perder pontos de descontinuidade.
- Existe apenas uma interpolação polinomial $p_n(x)$ que coincide com os valores exatos, $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ em n + 1 **nós de interpolação** distintos.



# Interpolação

**Interpolação Polinomial**




1ª ordem (linear) 2ª ordem (quadrática) 3ª ordem (cúbica)

# Interpolação

## Interpolação Polinomial

**Interpolação polinomial** consiste em se obter um polinômio $p_n(x)$ que passe por todos os n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$ dados, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x_0)=f(x_0) \\ \\ p_n(x_1)=f(x_1) \\ \ldots \\ p_n(x_n)=f(x_n) \end{array}\right\} \quad \textbf{(Equação 1)}$$

(n + 1 pontos)

# Interpolação

## Interpolação Polinomial – Polinômio Interpolador

$p_n(x)$ é denominado de **polinômio interpolador**

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \Lambda + a_n x^n \approx f(x)$$

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \Lambda + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \Lambda + a_n x_1^n = f(x_1)$$

...

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \Lambda + a_n x_n^n = f(x_n)$$

# Interpolação

## Interpolação Polinomial - Formas

Há uma variedade de formas matemáticas em que o polinômio pode ser expresso.

Estudaremos somente duas formas:

1. **o polinômio de Lagrange** (Ruggiero, seção 5.3.2)
2. **o polinômio de Newton** (Ruggiero, seção 5.3.3)

# Interpolação

## **Forma de Lagrange**

# Interpolação

**Forma de Lagrange – Forma Geral**

- Seja um conjunto de n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que satisfaça a Equação (1), isto é, passe por todos os pontos.

- A forma geral para n + 1 pontos é

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \Lambda + L_n(x) f(x_n)$$

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Forma Geral

- $p_n(x)$ passa exatamente sobre $\{x_i, f(x_i)\}$, ou seja,

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

- Pode-se verificar isso facilmente, pois:

$$\begin{aligned} L_k(x_k) &= 1 \quad \text{e} \\ L_k(x_i) &= 0 \quad \text{se}, i \neq k \end{aligned}$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot\Lambda\cdot(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdot\Lambda\cdot(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdot\Lambda\cdot(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot\Lambda\cdot(x_k - x_n)}$$

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Forma geral de 1ª ordem

Forma linear (n=1). Usado para 2 pontos dados: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$,

$$p_1(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} f(x_0) + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)} f(x_1)$$

# Interpolação

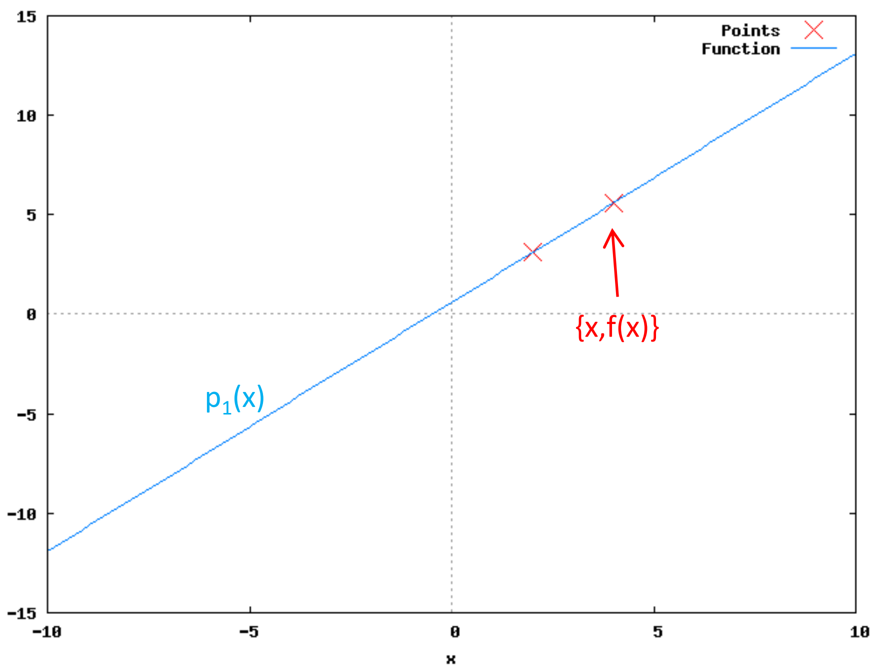
## Forma de Lagrange – Exemplo de 1ª ordem

Ajuste uma reta aos seguintes pontos {x, f(x)}: {(2; 3,1) (4; 5,6)}

$$p_1(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)f(x_0)+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)f(x_1) \qquad p_1(x)=\left(\frac{x-4}{2-4}\right)\times 3{,}1+\left(\frac{x-2}{4-2}\right)\times 5{,}6=-1{,}55\times(x-4)+2{,}8\times(x-2)$$

$$p_1(x)=\frac{1}{20}\left[25x+12\right]$$

$$p_1(x)=1{,}25x+0{,}6$$




http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/interpolation.php

# Interpolação

**Forma de Lagrange – Forma geral de 2ª ordem**

Forma quadrática (n=2).

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$L_0(x)\,,\ j \neq 0$ $\qquad$ $L_1(x)\,,\ j \neq 1$ $\qquad$ $L_2(x)\,,\ j \neq 2$

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Exemplo de 2ª ordem

Ajuste uma parábola aos seguintes pontos {x,f(x)}: {(1/3; 2), (1/4; -1), (1, 7)}

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$\Rightarrow L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \times \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1/4)}{(1/3 - 1/4)} \times \frac{(x - 1)}{(1/3 - 1)}$$

$$\Rightarrow L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \times \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1/3)}{(1/4 - 1/3)} \times \frac{(x - 1)}{(1/4 - 1)}$$

$$\Rightarrow L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \times \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1/3)}{(1 - 1/3)} \times \frac{(x - 1/4)}{(1 - 1/4)}$$

$$p_2(x) = 2[-18(x - 1/4)(x - 1)] - 1[16(x - 1/3)(x - 1)] + 7[2(x - 1/3)(x - 1/4)]$$

continua ...

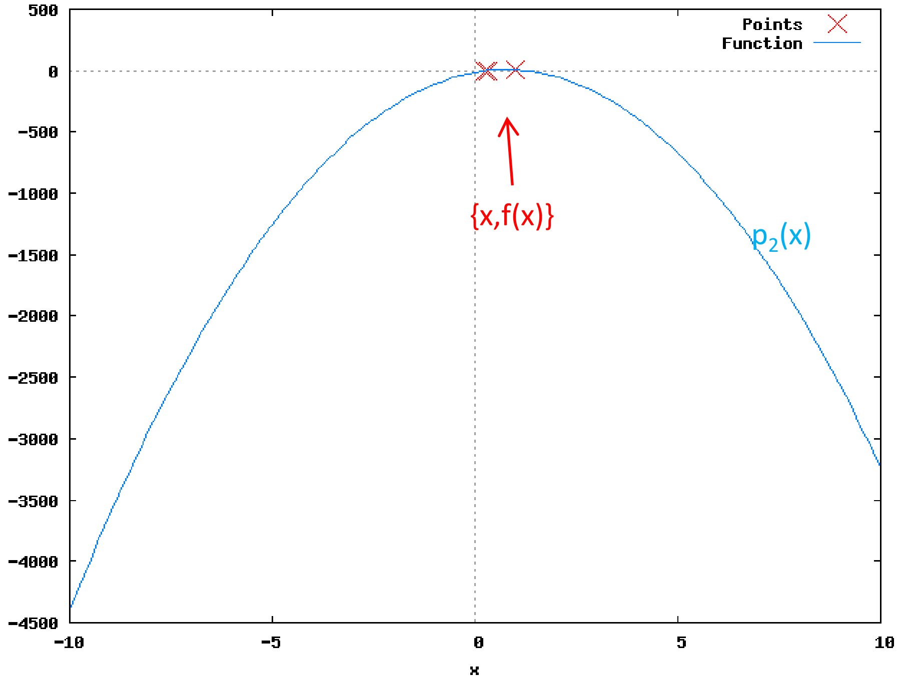
# Interpolação

## Forma de Lagrange – Exemplo de 2ª ordem

... continuação

$$p_2(x) = 2\left[-18(x-1/4)(x-1)\right] - 1\left[16(x-1/3)(x-1)\right] + 7\left[2(x-1/3)(x-1/4)\right]$$

$$p_2(x) = \frac{-1}{6}\left[228x^2 - 349x + 79\right]$$




http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/interpolation.php

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Exemplo de 4ª ordem

Ajuste um polinômio para interpolar:

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |
| 4 | 4 |

continua ...

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Exemplo de 4ª ordem

... continuação

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\, L_i = L_0 + 3L_1 + 2L_2 + 5L_3 + 4L_4$$

$$L_0 = \frac{(x-1)}{(0-1)}\,\frac{(x-2)}{(0-2)}\,\frac{(x-3)}{(0-3)}\,\frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$$

$$L_1 = \frac{(x-0)}{(1-0)}\,\frac{(x-2)}{(1-2)}\,\frac{(x-3)}{(1-3)}\,\frac{(x-4)}{(1-4)} = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

$$L_2 = \frac{(x-0)}{(2-0)}\,\frac{(x-1)}{(2-1)}\,\frac{(x-3)}{(2-3)}\,\frac{(x-4)}{(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$L_3 = \frac{(x-0)}{(3-0)}\,\frac{(x-1)}{(3-1)}\,\frac{(x-2)}{(3-2)}\,\frac{(x-4)}{(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}$$

$$L_4 = \frac{(x-0)}{(4-0)}\,\frac{(x-1)}{(4-1)}\,\frac{(x-2)}{(4-2)}\,\frac{(x-3)}{(4-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

continua ...

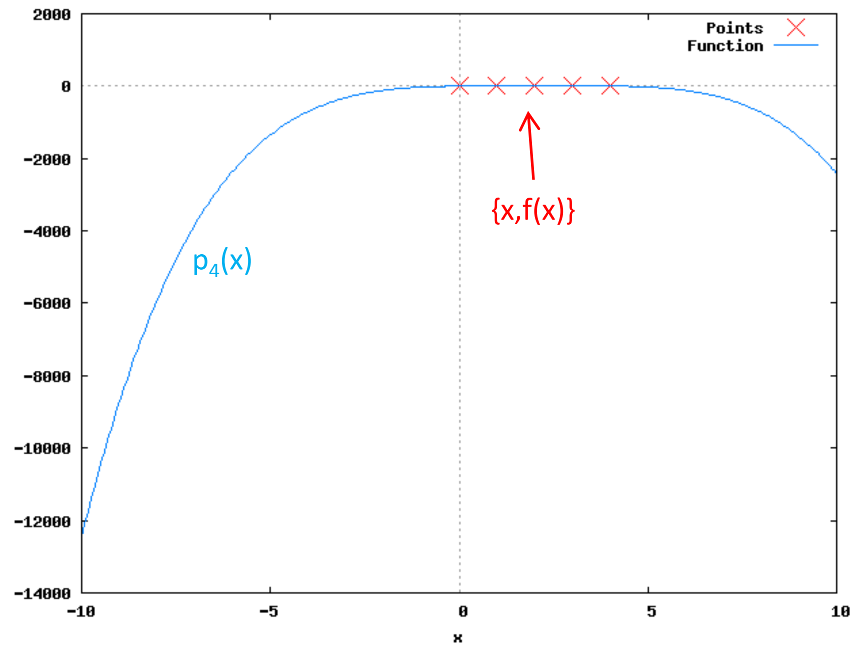
# Interpolação

## Forma de Lagrange – Exemplo de 4ª ordem

... continuação

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\, L_i = L_0 + 3L_1 + 2L_2 + 5L_3 + 4L_4$$

$$p_4(x) = \frac{-1}{24}\left[15x^4 - 118x^3 + 285x^2 - 230x - 24\right]$$




http://www.solvemymath.com/online_math_calculator/interpolation.php

# Interpolação

## Forma de Lagrange – Vantagens

- A fórmula de Lagrange é popular, pois é bem conhecida e é fácil de codificar.
- Além disso, os dados não são obrigados a ser especificado com x em ordem crescente ou decrescente.

# Interpolação

**Forma de Lagrange – Desvantagens**

- Embora o cálculo de $p_n(x)$ é simples, o método ainda não é eficiente para grandes valores de n.
- A interpolação polinomial de ordem alta é instável!
- ...