UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

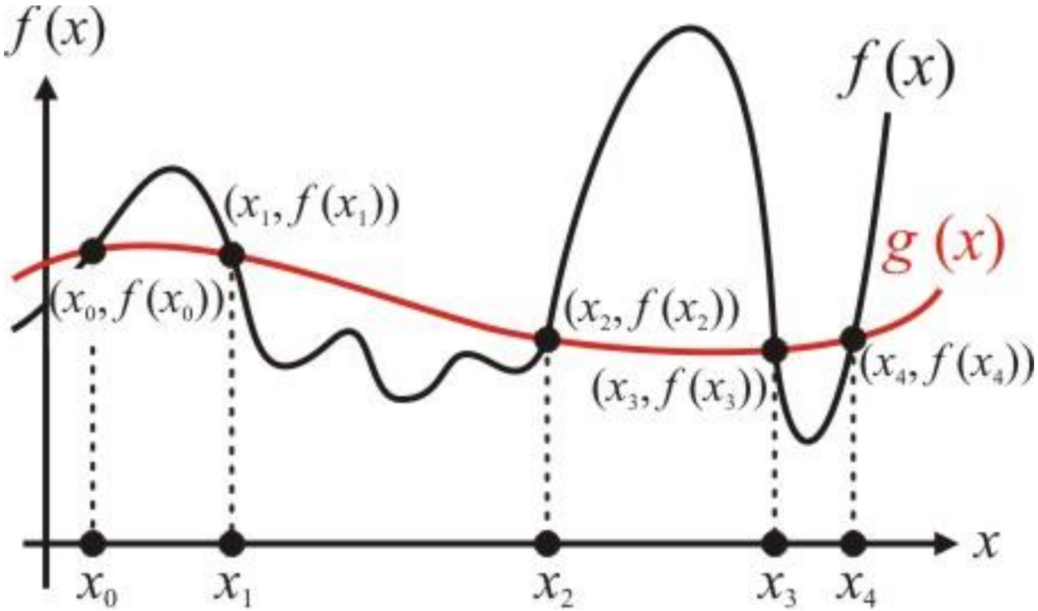
Métodos Numéricos

Interpolação – Métodos de Newton

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Interpolação

Interpolação Polinomial – Revisão



- No exemplo só se conhece a função para 5 valores de x - **nós de interpolação**
- Deseja-se conhecer o valor da função em pontos intermediários

Interpolação

Interpolação Polinomial – Revisão

- **Interpolação polinomial** consiste em se obter um polinômio $p_n(x)$ que passe por todos os n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$ dados, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} p_n(x_0)=f(x_0) \\ \\ p_n(x_1)=f(x_1) \\ \ldots \\ p_n(x_n)=f(x_n) \end{array}\right\} \quad \textbf{(Equação 1)}$$

(n + 1 pontos)

Interpolação

Interpolação Polinomial – Revisão

$p_n(x)$ é denominado de **polinômio interpolador**

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \Lambda + a_n x^n \approx f(x)$$

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \Lambda + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \Lambda + a_n x_1^n = f(x_1)$$

...

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \Lambda + a_n x_n^n = f(x_n)$$

Interpolação

Interpolação Polinomial – Formas – Revisão

Há uma variedade de formas matemáticas em que o polinômio pode ser expresso.

Estudaremos somente duas formas:

1. **o polinômio de Lagrange** (Ruggiero, seção 5.3.2) (já estudado)

2. **o polinômio de Newton** (Ruggiero, seção 5.3.3)

Interpolação

Forma de Newton

Interpolação

Forma de Newton – Forma Geral

- Seja um conjunto de n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que satisfaça a Equação (1), isto é, passe por todos os pontos.

- A forma geral para n + 1 pontos é

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

- Também denominado de **Diferenças Divididas**

Interpolação

Forma de Newton – Forma geral de 1ª ordem

Forma linear (n = 1). Conhecendo 2 pontos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

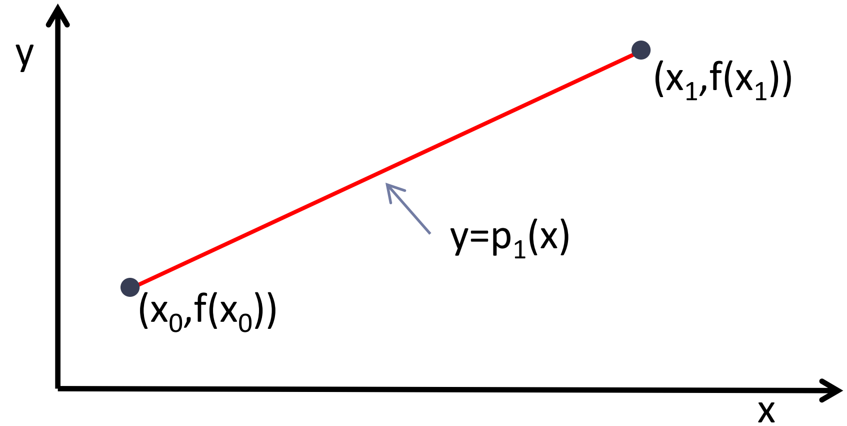
$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\boxed{p_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)}$$

onde

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Interpolação

Forma de Newton – Forma geral de 2ª ordem

Forma quadrática (n=2). Conhecendo 3 pontos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

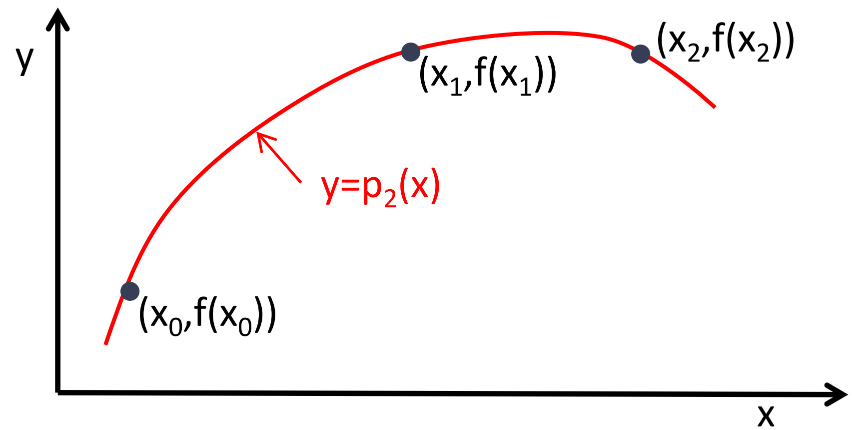
$$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

onde

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



Interpolação

Forma de Newton – Forma geral de 2ª ordem – dedução de b_2

$b_0 = f(x_0)$ $\qquad b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ $\qquad f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

$x = x_2$ $\qquad b_2 = \dfrac{f(x_2) - f(x_0) - b_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$ $\qquad b_2 = \dfrac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

$x = x_2$ $\qquad b_2 = \dfrac{\dfrac{(f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

$$b_2 = \frac{\dfrac{(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} + (f(x_1) - f(x_0)) - \dfrac{(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1) + (f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \qquad b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

Interpolação

Forma de Newton – Obtendo a forma geral de 2ª ordem

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

onde

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Diferenças Divididas

(Diferenças Divididas Finitas)

rescrevendo

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Interpolação

Forma de Newton – Obtendo a forma geral

Dados n + 1 pontos.

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + ... + b_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

onde

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{Ordem zero}$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \qquad \text{Ordem 1}$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{Ordem 2}$$

•••

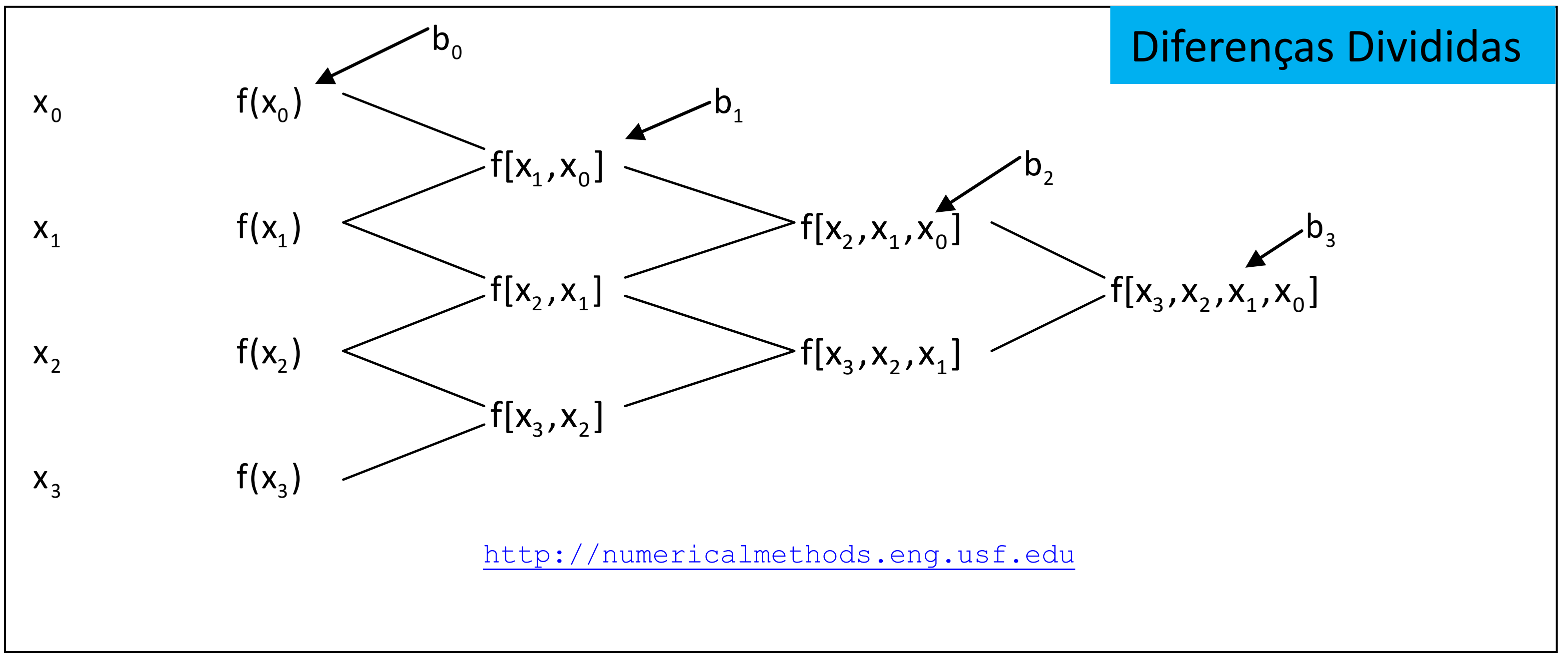
$$b_n = f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad \text{Ordem n}$$

Interpolação

Forma de Newton – Método prático para obter a forma de 3ª ordem

Dados 4 pontos.

$$p_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$



Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 1 – 3ª ordem

Dados 4 pontos.

Profundidade z (m) (x)	Temperatura T (°C) (y)
-9	9,9
-8	11,7
-7	17,6
-6	18,2

$$T(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)(z - z_1) + b_3(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$$

Diferenças Divididas

$z_0 = -9,$	9,9 (b_0)			
		1,8 (b_1)		
$z_1 = -8,$	11,7		2,05 (b_2)	
		5,9		$-1,5667$ (b_3)
$z_2 = -7,$	17,6		$-2,65$	
		0,6		
$z_3 = -6,$	18,2			

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$b_0 = 9,9$ $\quad b_1 = 1,8$ $\quad b_2 = 2,05$ $\quad b_3 = -1,5667$

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 1 – 3ª ordem

... continuação

$$T(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)(z-z_1) + b_3(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)$$

$b_0 = 9{,}9 \quad b_1 = 1{,}8 \quad b_2 = 2{,}05 \quad b_3 = -1{,}5667$

$$T(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)(z-z_1) + b_3(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)$$

$$= 9{,}9 + 1{,}8(z+9) + 2{,}05(z+9)(z+8) - 1{,}5667(z+9)(z+8)(z+7)\,,\ -9 \le z \le -6$$

$$T(z) = -615{,}9 - 262{,}58z - 35{,}55z^2 - 1{,}5667z^3\ ,\ -9 \le z \le -6$$

Para $z = -7{,}5$,

$$T(-7{,}5) = 9{,}9 + 1{,}8(-7{,}5+9) + 2{,}05(-7{,}5+9)(-7{,}5+8)$$

$$1{,}5667(-7{,}5+9)(-7{,}5+8)(-7{,}5+7) = 14{,}725\ \ ^{o}C$$

... Continuação INCLUIR GRAU DO PLINOMIO

O erro $|\in_a|$ obtido entre os resultados dos polinômios de 2º e 3º graus é

$$|\in_a| = \left|\frac{14{,}725 - 14{,}138}{14{,}725}\right| \times 100 = 3{,}9898\%$$

http://numericalmethods.eng.usf.edu

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 1 – 3ª ordem

... continuação

Tabela de erros para z = -7,5 m

Grau do Polinômio	1	2	3
T(-7,5)	14,65	14,138	14,725
Erro Absoluto Relativo Aproximado	----------	3,6251 %	3,9898 %

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 2 – 3ª ordem

Dados 4 pontos.

Temperatura T (°C) (x)	Concentração Cp(T) (y)
42	4179
52	4186
82	4199
100	4217

$$C_p(T) = b_0 + b_1(T - T_0) + b_2(T - T_0)(T - T_1) + b_3(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2)$$

Diferenças Divididas

$$\begin{array}{lllll}
 & & b_0 & & \\
T_0 = 42, & 4179 & & b_1 & \\
 & & 0{,}7 & & b_2 \\
T_1 = 52, & 4186 & & -6{,}6667 \times 10^{-3} & b_3 \\
 & & 0{,}43333 & & 3{,}1849 \times 10^{-4} \\
T_2 = 82, & 4199 & & 0{,}011806 & \\
 & & 1 & & \\
T_3 = 100, & 4217 & & &
\end{array}$$

http://numericalmethods.eng.usf.edu

$b_0 = 4179 \quad b_1 = 0{,}7 \quad b_2 = -6{,}6667 \times 10^{-3} \quad b_3 = 3{,}1849 \times 10^{-4}$

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 2 – 3ª ordem

... continuação

$$C_p(T) = b_0 + b_1(T - T_0) + b_2(T - T_0)(T - T_1) + b_3(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2)$$

$$b_0 = 4179 \quad b_1 = 0{,}7 \quad b_2 = -6{,}6667 \times 10^{-3} \quad b_3 = 3{,}1849 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} C_p(T) &= b_0 + b_1(T - T_0) + b_2(T - T_0)(T - T_1) + b_3(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2) \\ &= 4179 + 0{,}7(T - 42) - 6{,}6667 \times 10^{-3}(T - 42)(T - 52) \\ &\quad + 3{,}1849 \times 10^{-4}(T - 42)(T - 52)(T - 82) \quad 42 \le T \le 100 \end{aligned}$$

Para $T = 61$,

$$C_p(61) = 4179 + 0{,}7(61 - 42) - 6{,}6667 \times 10^{-3}(61 - 42)(61 - 52)$$

$$+ 3{,}1849 \times 10^{-4}(61 - 42)(61 - 52)(61 - 82) = 4190{,}0 \ \frac{J}{kg - {}^{o}C}$$

O erro $|\in_a|$ obtido entre os resultados dos polinômios de 2º e 3º graus é

$$|\in_a| = \left| \frac{4190{,}0 - 4191{,}2}{4190{,}0} \right| \times 100 = 0{,}027295\%$$

http://numericalmethods.eng.usf.edu

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 2 – 3ª ordem

... continuação

Tabela de erros para T = 61

Grau do Polinômio	1	2	3
$C_p(61)$	$4189{,}9$	$4191{,}2$	$4190{,}0$
Erro Absoluto Relativo Aproximado	----------	$0{,}030063\,\%$	$0{,}027295\,\%$

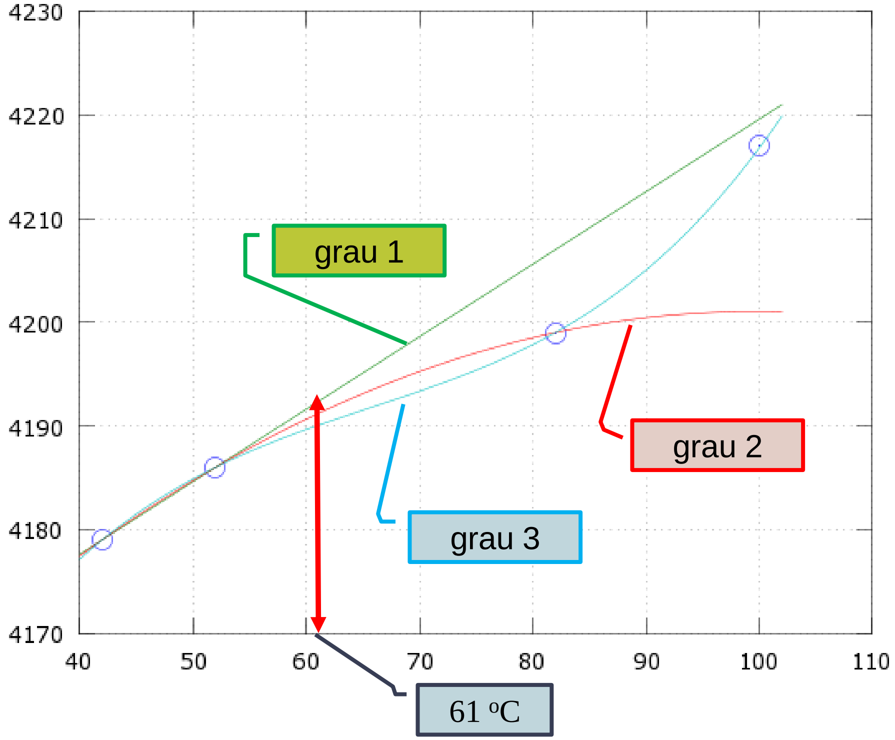
http://numericalmethods.eng.usf.edu

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 2 – Diferentes Graus/Ordens

... continuação



Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 3 – 4ª ordem

Dados 5 pontos.

x	y
0	1
1	3
2	2
3	5
4	4

Diferenças Divididas

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
x=0	y=**1**	(3-1)/(1-0)=**2**	(-1-2)/(2-0)=**-3/2**	(2 - -3/2)/(3-0)=**7/6**	(-4/3 – 7/6)/(4-0)=**-5/8**
x=1	y=3	(2-3)/(2-1)=-1	(3 - -1)/(3-1)=2	(-2-2)/(4-1)=-4/3	
x=2	y=2	(5-2)/(3-2)=3	(-1-3)/(4-2)=-2		
x=3	y=5	(4-5)/(4-3)=-1			
x=4	y=4				

continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 3 – 4ª ordem

... continuação

$$y(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)+b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+b_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$b_0=1\ \ b_1=2\quad b_2=-\tfrac{3}{2}\quad b_3=\tfrac{7}{6}\quad b_4=-\tfrac{5}{8}$$

$$y(x)=p_4(x)=1+2(x)-\frac{3}{2}x(x-1)+\frac{7}{6}x(x-1)(x-2)-\frac{5}{8}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\boxed{y(x)=p_4(x)=1+\frac{115}{12}x-\frac{95}{8}x^2+\frac{59}{12}x^3-\frac{5}{8}x^4}$$

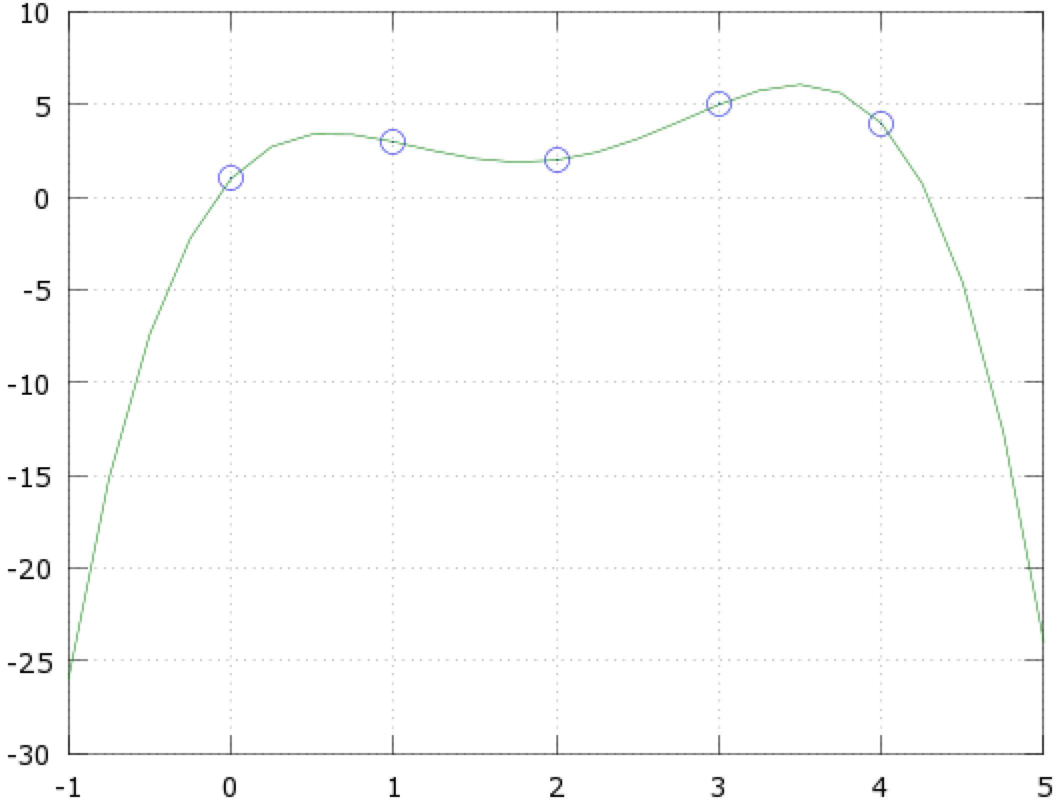
continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 3 – 4ª ordem

... continuação

$$y(x) = p_4(x) = 1 + \frac{115}{12}x - \frac{95}{8}x^2 + \frac{59}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^4$$

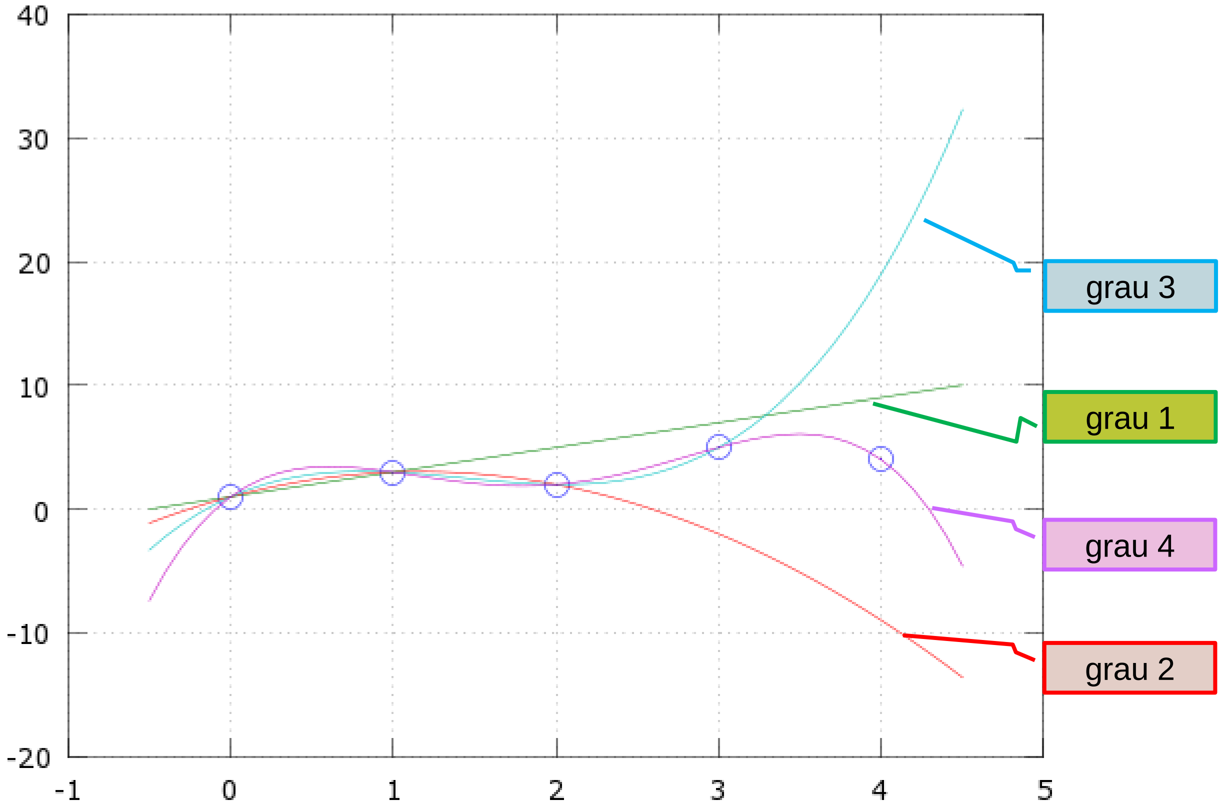


continua ...

Interpolação

Forma de Newton – Exemplo 3 – Diferentes Graus/Ordens

... continuação



Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial

Interpolação

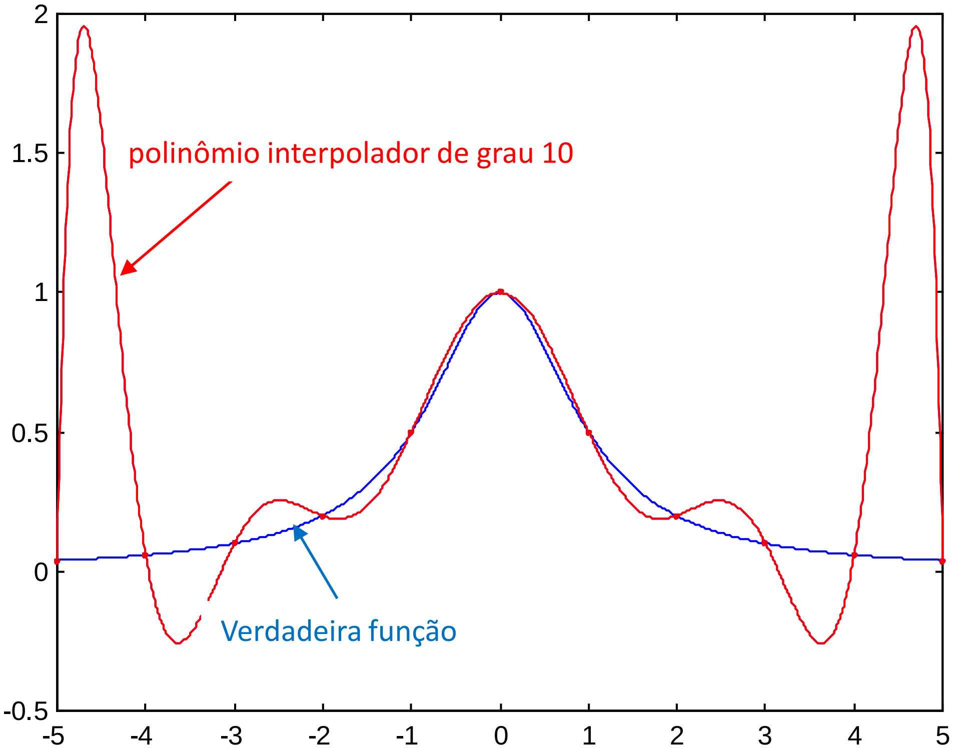
Erros na Interpolação Polinomial

- **Sim**, aproximado!!!, mas o que é uma boa aproximação?
- É evidente que uma boa aproximação deve ser tal que o erro entre a verdadeira função e a função aproximação deve ser muito pequeno.
- Além disso, a função aproximada deve ter as seguintes propriedades:
  1. A função deve ser fácil de determinar
  2. Deve ser fácil de diferenciar
  3. Deve ser fácil de avaliar
  4. Deve ser fácil de integrar

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial

- Interpolação polinomial pode levar a grandes erros (especialmente para polinômios de alto grau).



Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema

- Quando um polinômio de interpolação de n-ésimo grau é usado, o erro está relacionado com a (n-1)-ésima derivada.
- **Teorema**

Seja f(x) uma função tal que $f^{(n+1)}(x)$ é contínua em $[a,b]$ e $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$.

Seja $p(x)$ qualquer polinômio de grau $\leq n$ interpolador de f em $n+1$ pontos *igualmente espaçados* em $[a,b]$ (incluindo os pontos extremos).

Então:

$$\left|f(x)-p(x)\right| = |\,\text{Erro}\,| \leq \frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

Fazendo $h = \dfrac{b-a}{n}$

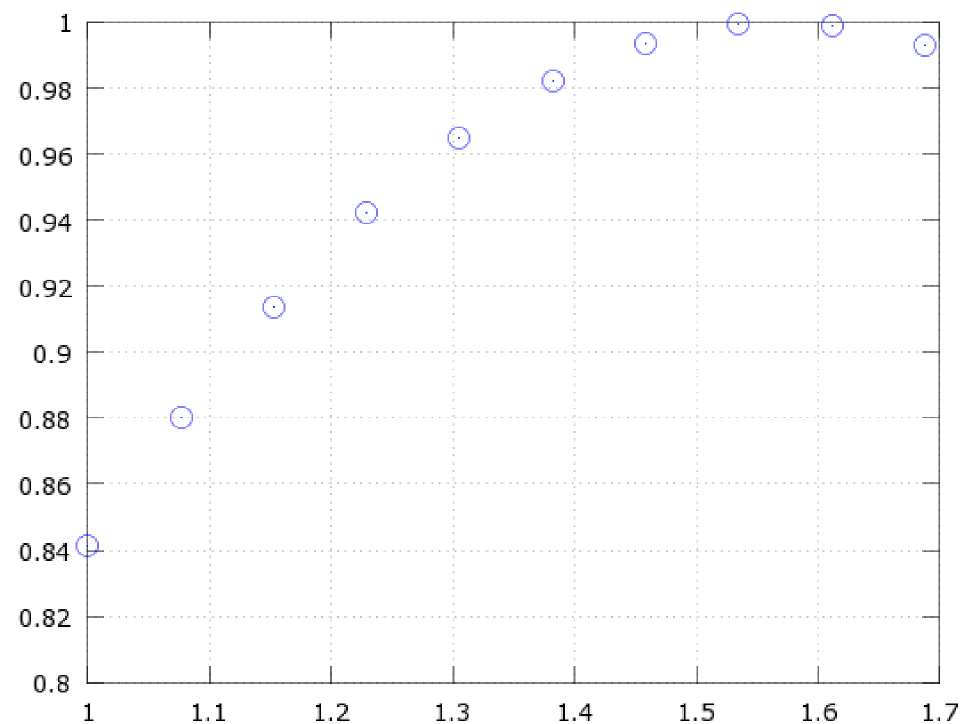
$$\left|\text{Erro}\right| \leq \frac{Mh^{n+1}}{4(n+1)} \qquad \rightarrow \text{tome} \quad M = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema – Exemplo

Exemplo – Suponha que temos 10 pontos com igual espaçamento no intervalo [1 1,6875] e que desejamos ajustar um polinômio de grau 9 nestes 10 pontos ($p_9(x)$).

x	Y
1,00000	0,84147
1,07639	0,88025
1,15278	0,91390
1,22917	0,94221
1,30556	0,96503
1,38194	0,98222
1,45833	0,99368
1,53472	0,99935
1,61111	0,99919
1,68750	0,99320



continua ...

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema – Exemplo

... continuação

Exemplo – Usando as diferenças divididas para determinar o polinômio $p_9(x)$

$p_9(x)$ = 0,84147 + 0,5076580704280658(x-1) + (-0,43955613843916197)(x-1)(x-1,07639) +

+ (-0,07851606290075713)(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278) +

+ 0,07341654938156819(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917) +

+ (-0,15417151743980845)(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917)(x-1,30556) +

+ 0,48830693358092236(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917)(x-1,30556)(x-1,38194) +

+ (-1,0205313909552518)(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917)(x-1,30556)(x-1,38194)(x-1,45833) +

+ 0,9196964194214167(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917)(x-1,30556)(x-1,38194)(x-1,45833)(x-1,53472) +

+ 2,7301416019988434(x-1)(x-1,07639)(x-1,15278)(x-1,22917)(x-1,30556)(x-1,38194)(x-1,45833)...

...(x-1,53472)(x-1,61111)

http://www.math.ucla.edu/~ronmiech/YAN/ndivdiff.html

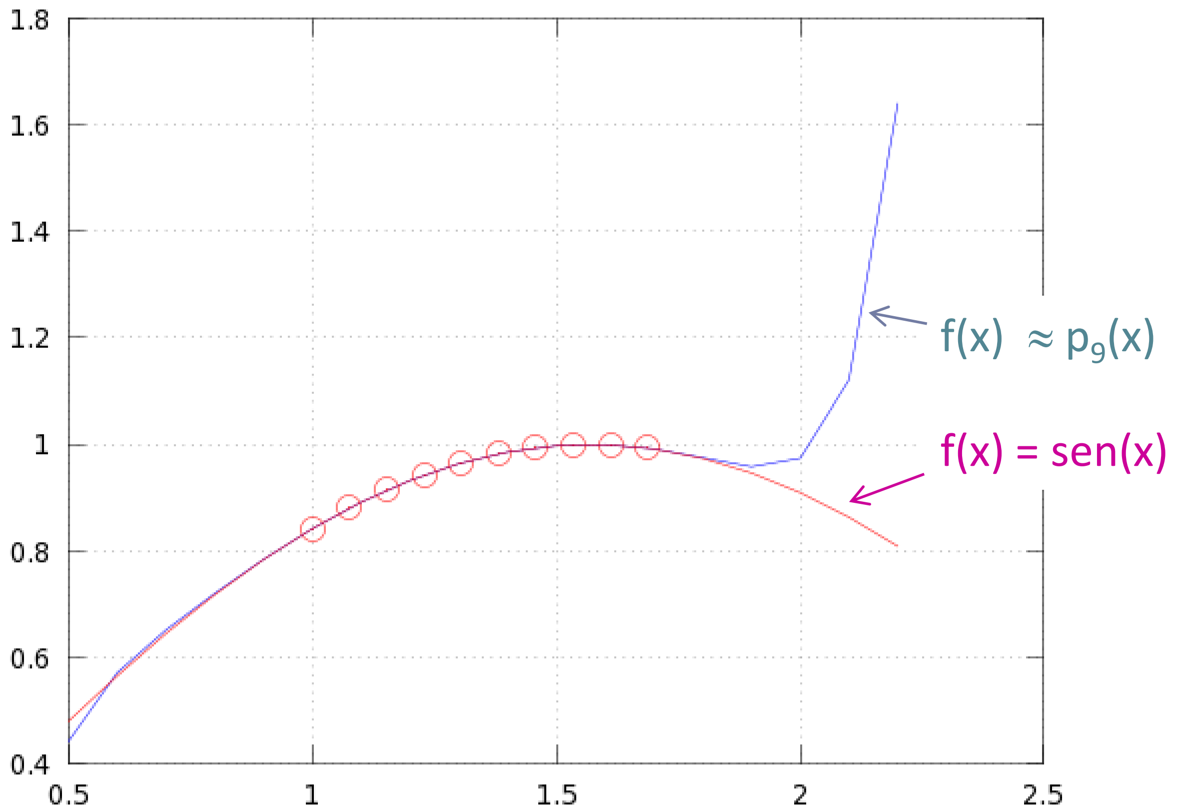
continua ...

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema – Exemplo

... continuação

Exemplo – Gráfico de $p_9(x)$, sen(x) e os 10 pontos observados.



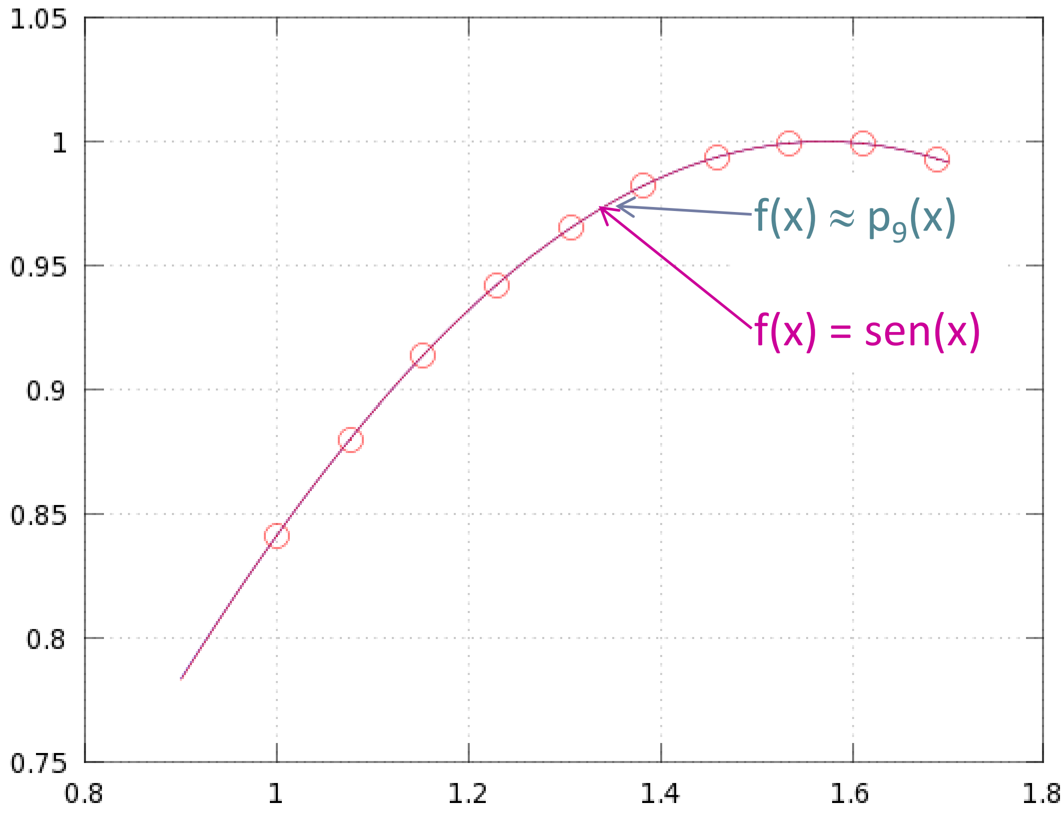
continua ...

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema – Exemplo

... continuação

Exemplo – Gráfico de $p_9(x)$, sen(x) e os 10 pontos observados.



continua ...

Interpolação

Erros na Interpolação Polinomial – Teorema – Exemplo

... continuação

Exemplo – Suponhamos que a verdadeira função seja f(x) = sen(x).

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1 \quad \text{para } n > 0$$

$$\left|f(x)\text{-}p_9(x)\right| \leq \frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \qquad M = 1,\ n = 9$$

$$\left|f(x)\text{-}p_9(x)\right| \leq \frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \qquad \left|f(x) - p_9(x)\right| \leq \frac{1}{4(10)}\left(\frac{1{,}6875}{9}\right)^{10} = 1{,}34 \times 10^{-9}$$

O maior erro entre o valor calculado a partir de $p_9(x)$ e sen(x) é $1{,}34 \times 10^{-9}$.

Interpolação

Interpolação Polinomial – Sumário

- O polinômio interpolador é único.
- Diferentes métodos podem ser usados para obter o polinômio interpolador.
  - Método de Newton (Newton's divided difference)
  - Método de Lagrange
  - Outros
- O polinômio interpolador pode ser sensível aos dados.
- **Sejamos cuidadosos**, quando polinômios de alto grau são usados.

Interpolação

Interpolação Polinomial – Sites Interessantes

http://nm.mathforcollege.com/topics/newton_divided_difference_method.html

http://nm.mathforcollege.com/topics/lagrange_method.html

http://nm.mathforcollege.com/topics/direct_method.html

http://www.iitg.ac.in/kartha/CE601/LectureSlides.htm

http://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/projectile-motion

http://faculty.kfupm.edu.sa/COE/mudawar/cise301/lectures/index.htm

http://www.math.ucla.edu/~ronmiech/YAN/ndivdiff.html