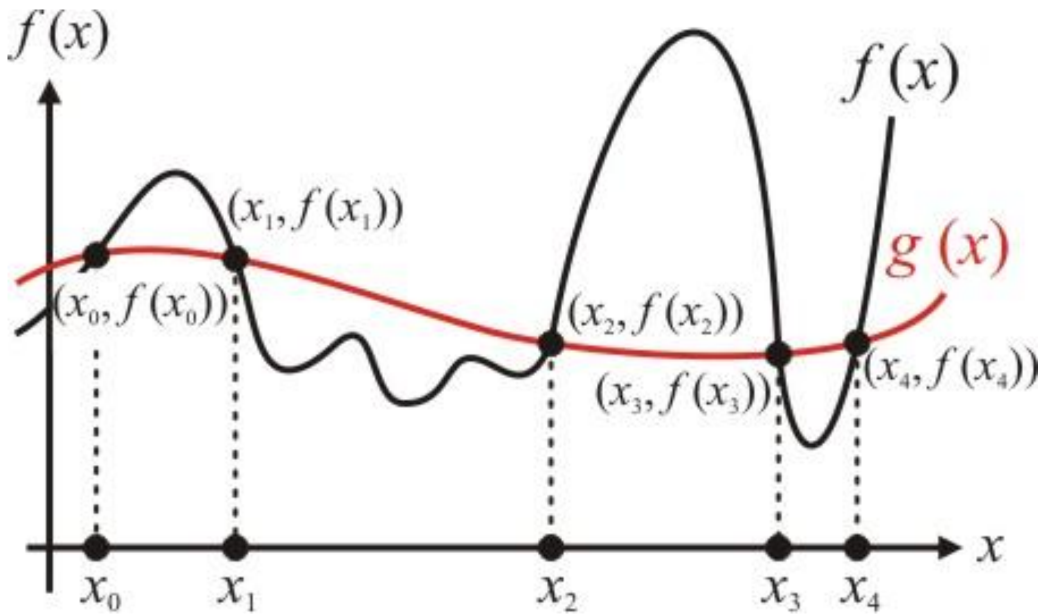
Métodos Numéricos

Interpolação – Spline

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Interpolação

Interpolação Polinomial



- No exemplo só se conhece a função para 5 valores de x - **nós de interpolação**
- Deseja-se conhecer o valor da função em pontos intermediários

Interpolação

Forma de Lagrange – Forma Geral

- Seja um conjunto de n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que satisfaça a Equação (1), isto é, passe por todos os pontos.

- A forma geral para n + 1 pontos é

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$p_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \Lambda + L_n(x) f(x_n)$$

Interpolação

Forma de Newton – Forma Geral

- Seja um conjunto de n + 1 pontos $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p_n(x)$ que satisfaça a Equação (1), isto é, passe por todos os pontos.

- A forma geral para n + 1 pontos é

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Também denominado de **Diferenças Divididas**

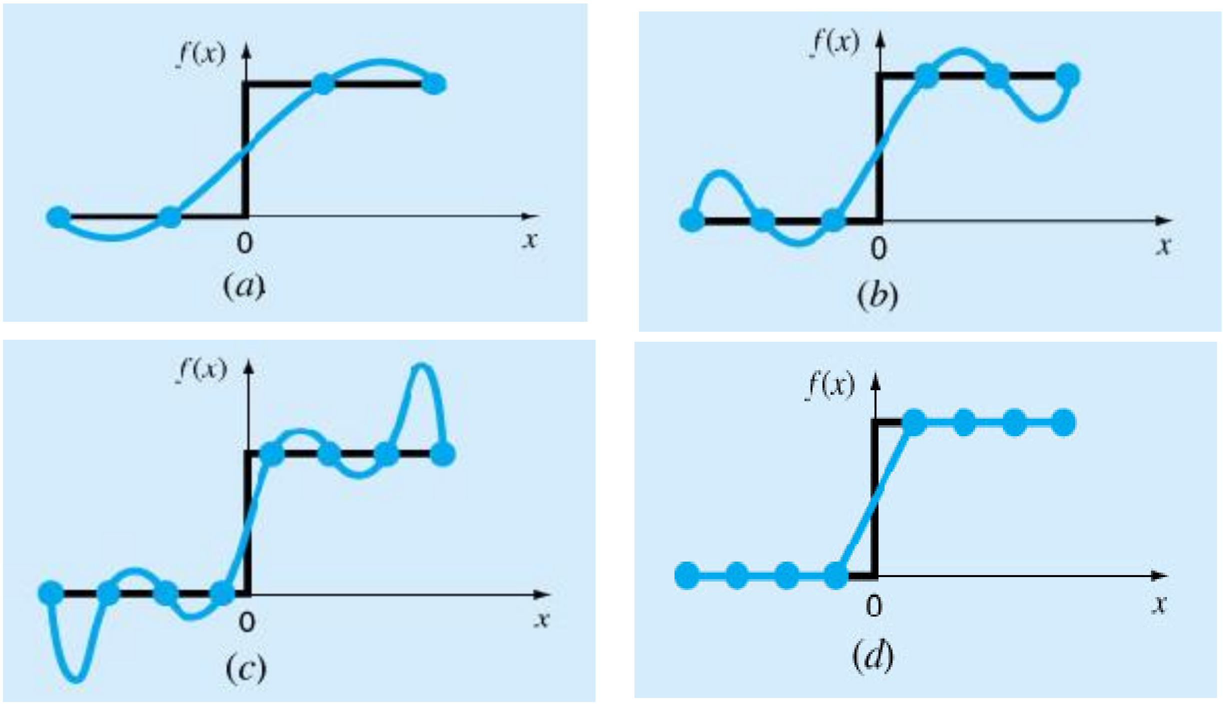
Interpolação

Spline

Interpolação

Interpolação Polinomial – Porque Interpolação Spline?

- Aplica polinômios de ordem inferior a subconjuntos de pontos de dados. Spline fornece uma aproximação superior do comportamento das funções que têm, mudanças locais abruptas.



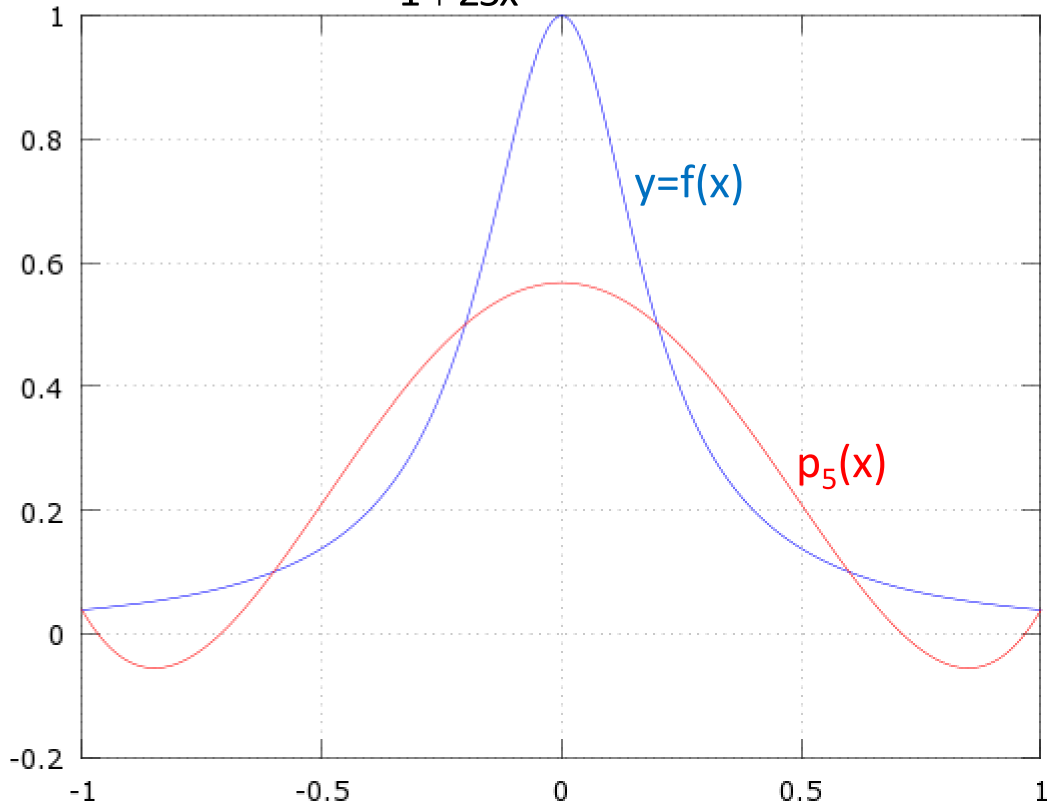
http://site.iugaza.edu.ps/emasry/courses/numerical-analysis/

Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Motivação

Suponha que a verdadeira função seja $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$

x	y
-1	0,0384615
-0,6	0,1
-0,2	0,5
0,2	0,5
0,6	0,1
1	0,0384615



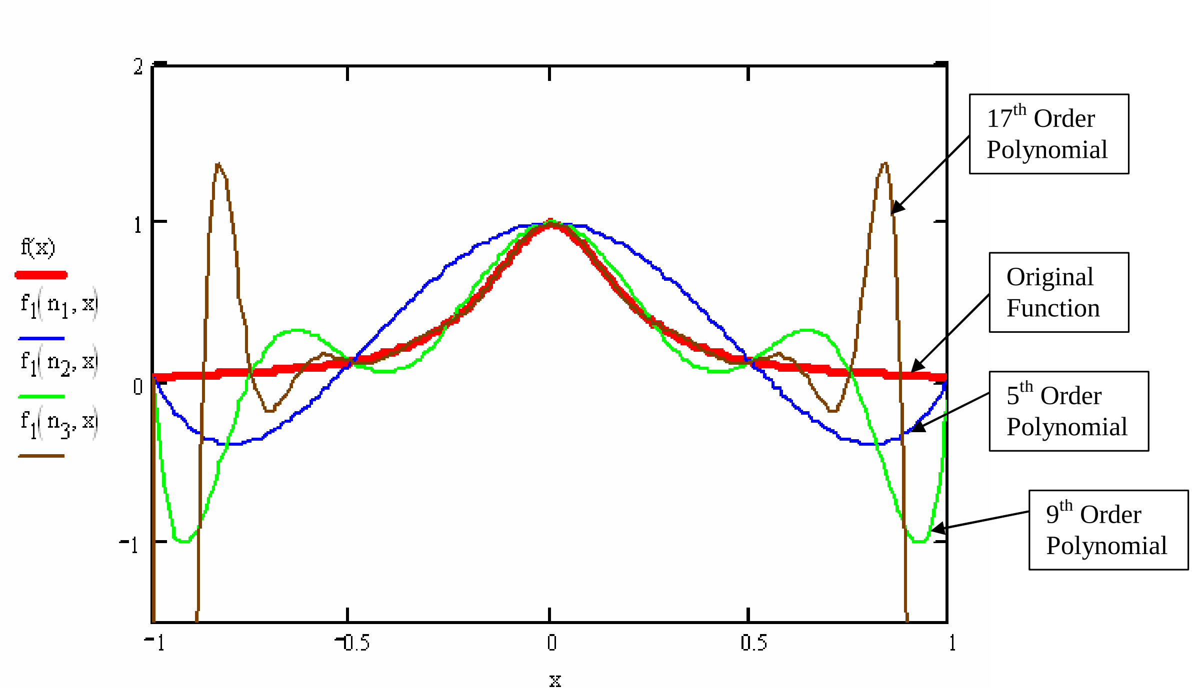
$p_5(x) = 0{,}038462 + 0{,}153845(x+1) + 1{,}05769375(x+1)(x+0{,}6) + (-1{,}9230781250000004)(x+1)(x+0{,}6)(x+0{,}2) + 1{,}2019238281250002(x+1)(x+0{,}6)(x+0{,}2)(x-0{,}2)$ http://www.math.ucla.edu/~ronmiech/YAN/ndivdiff.html continua ...

Professor Volmir Eugênio Wilhelm – Professora Mariana Kleina

Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Motivação

... continuação



http://site.iugaza.edu.ps/emasry/courses/numerical-analysis/

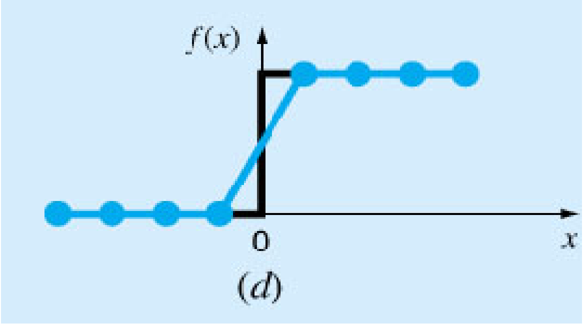
Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Motivação

- Polinômios são a escolha mais comum para interpolar.

- Há casos em que os polinômios podem levar a resultados errados por causa de erros de arredondamento e *overshoot*.

- Abordagem alternativa é a aplicação de polinômios de ordem inferior a subconjuntos de pontos de dados. Tais polinômios são chamados de **funções spline**.

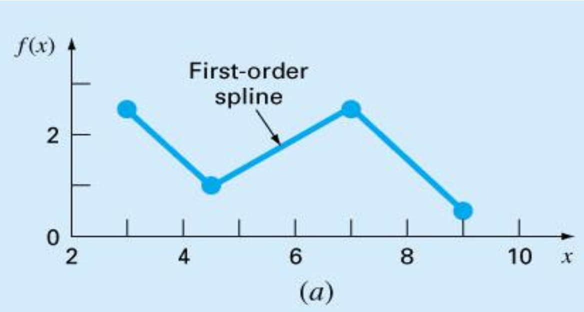


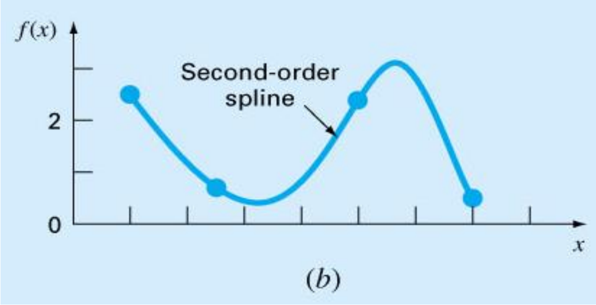
- Spline fornece uma aproximação superior do comportamento das funções que têm, mudanças abruptas locais.

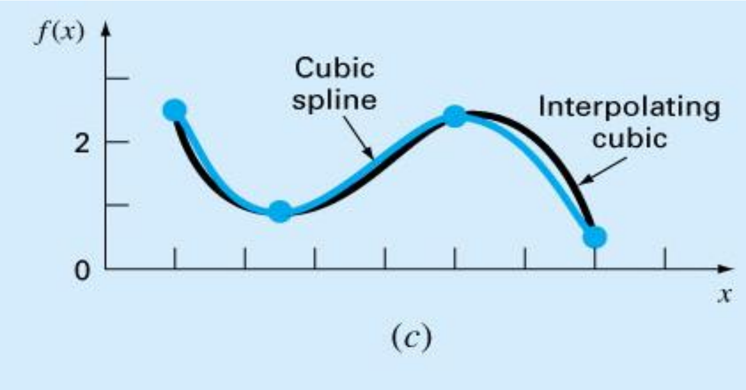
Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Ordens

- Diferentes ordens/graus das splines – Linear (a), Quadrática (b), Cubica (c)







Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Linear

- As splines de primeira ordem um grupo de pontos ordenados podem ser definidas como um conjunto de funções lineares:

$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0), \qquad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1), \qquad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}), \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Interpolação

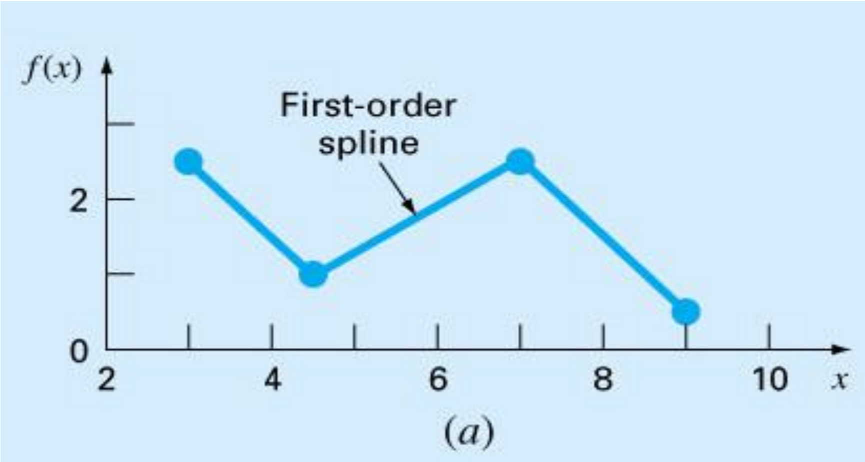
Interpolação Polinomial – Spline – Linear – Exemplo

- Ajuste os seguintes dados numa spline de primeira ordem. Avaliar a função x=5.

x	f(x)
3,0	2,5
4,5	1,0
7,0	2,5
9,0	0,5

$$m = \frac{2{,}5 - 1}{7 - 4{,}5} = 0{,}6 \qquad f(x) = f(4{,}5) + 0{,}6(x - 4{,}5), \qquad 4{,}5 \leq x \leq 7{,}0$$

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4{,}5) + m(5 - 4{,}5) \\ &= 1{,}0 + 0{,}6 \times 0{,}5 \\ &= 1{,}3 \end{aligned}$$



Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Linear – Considerações

- A principal **desvantagem** da spline linear é que elas não são suaves. Nos pontos dados ocorre o encotnro de duas splines (chamados de **nós**), e ocorre variações abruptas.

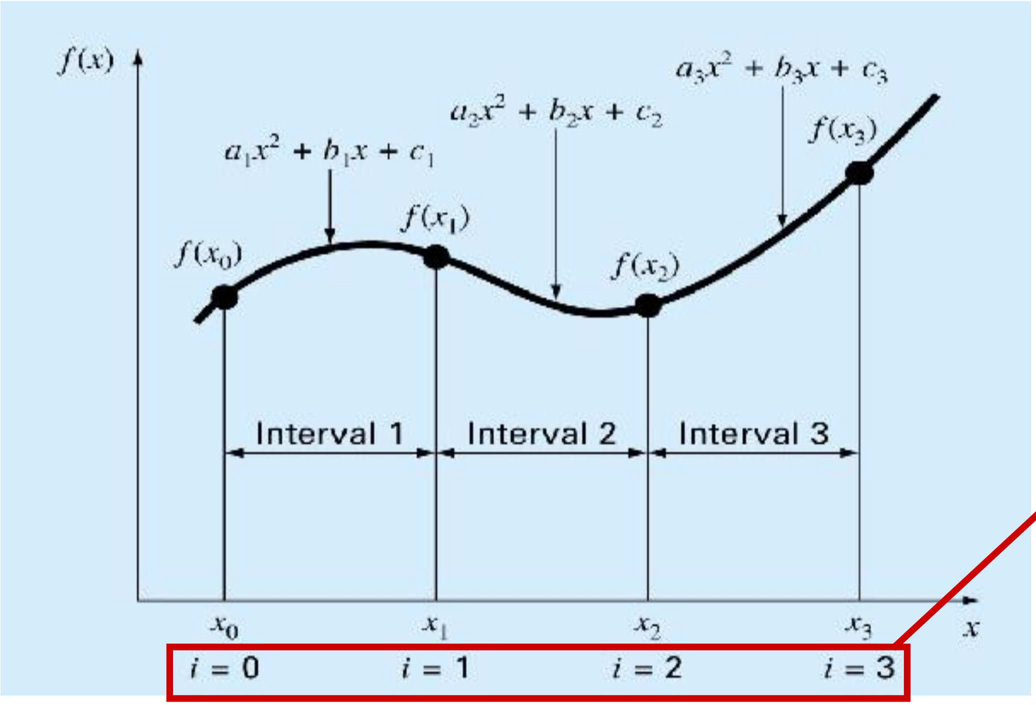
- A primeira derivada da função é descontínua nos **nós**.

- Usando splines polinomiais de ordem superior garante suavidade nos **nós** igualando derivados nesses pontos.

Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Quadrática

- **Objetivo**: determinar um polinômio de segunda ordem para cada intervalo entre os pontos de dados.
- **Termos**: nós interiores e pontos finais/extremidades



Para n+1 pontos dados:

- i $\in$ { 0, 1, 2, …n},
- **n** intervalos,
- **3n** constantes desconhecidas (a's, b's, c's)

Interpolação

Interpolação Polinomial – Spline – Quadrática

- Os valores das funções polinomiais adjacentes tem de ser igual ao dos nós interiores **2(n-1)**.

$$a_{i-1}x_{i-1}^{2} + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \quad i = 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$a_{i}x_{i-1}^{2} + b_{i}x_{i-1} + c_{i} = f(x_{i-1}) \quad i = 2, 3, 4, \ldots, n$$

- A primeira função e a última função devem passar pelos pontos das extremidades (**2**).

$$a_1x_0^{2} + b_1x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_nx_n^{2} + b_nx_n + c_n = f(x_n)$$

- As derivadas de primeira ordem nos nós interiores deve ser igual a **(n-1)**.

$$f_i^{'}(x) = 2a_ix + b_i$$

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i$$

- Suponhamos que a segunda derivada é zero no primeiro ponto (**1**)

$$a_1 = 0$$

(Os dois primeiros pontos serão conectados por uma linha reta)