UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

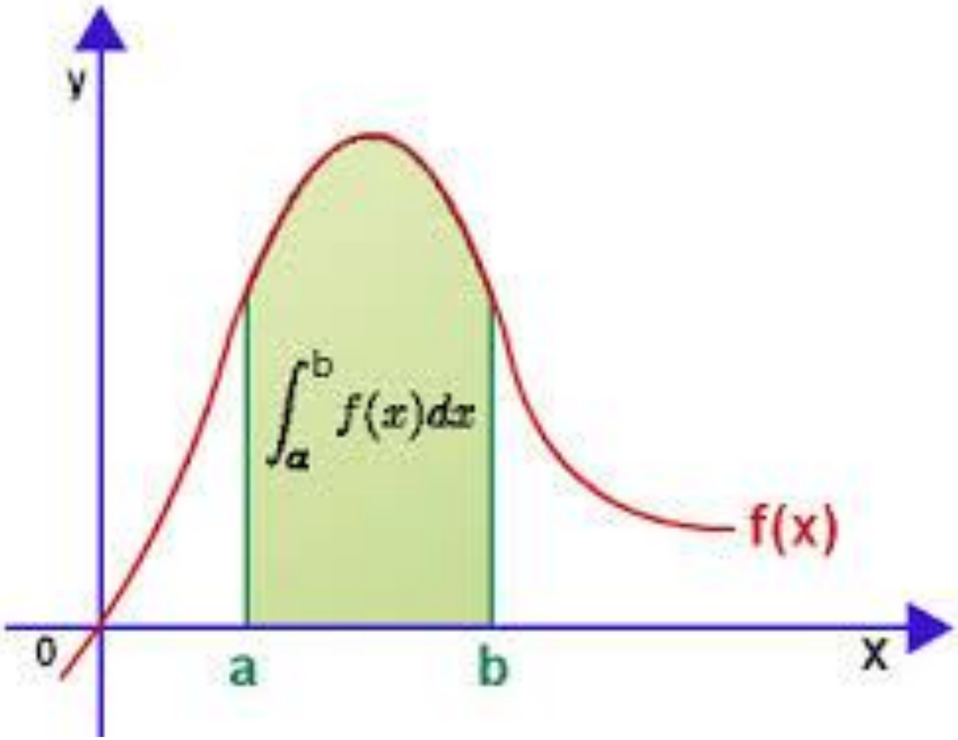
Métodos Numéricos

Integração Numérica – Regra dos Trapézio

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Integração Numérica

Integração Definida



Integração Numérica

Integração Definida

- Há duas situações em que é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.

- A **primeira situação** decorre do fato de que, a fim de avaliar $\int_a^b f(x)dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos conhecer uma antiderivada de f.

  No entanto, às vezes, é difícil, ou mesmo impossível, encontrar uma antiderivada.

- A **segunda situação** ocorre quando a função é determinada a partir de um experimento científico e/ou através de leituras de instrumentos ou dados coletados.

- **Em ambos os casos, iremos encontrar valores aproximados de integrais definidas.**

Integração Numérica

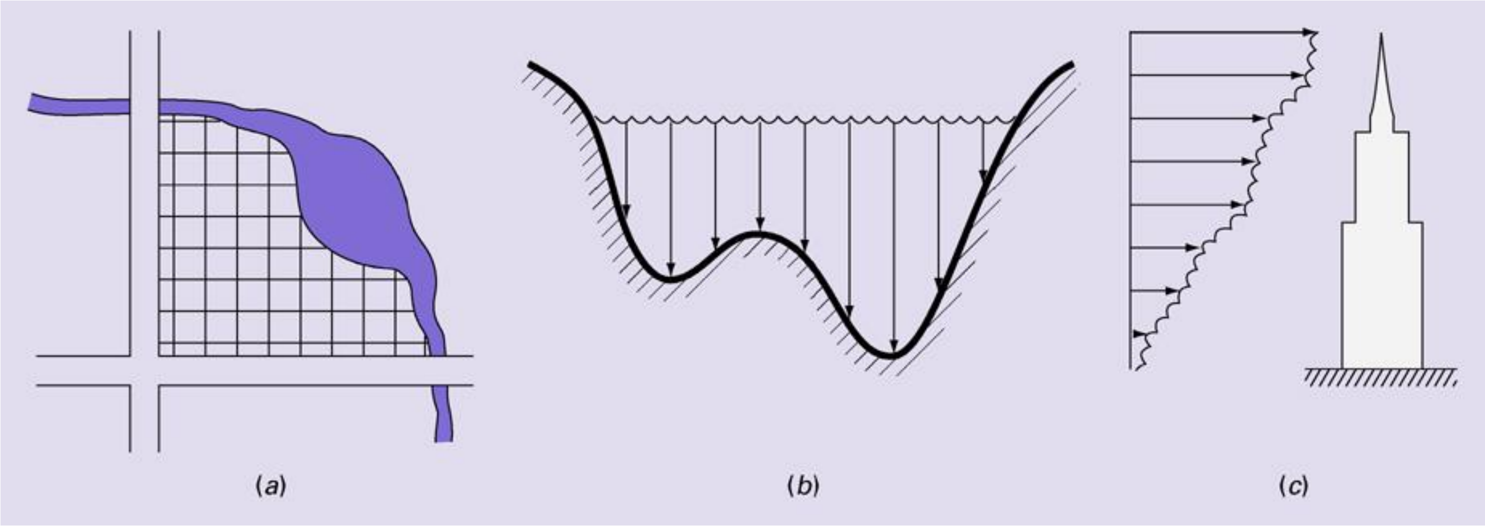
Integração Numérica – Aplicações

- Exemplos de como a integração numérica é usado em aplicações científicas e de engenharia.

  (a) Um topógrafo quer conhecer a área de um campo delimitado por um córrego sinuoso e duas estradas.

  (b) Um hidrólogo deseja calcular a área da seção transversal de um rio.

  (c) Um engenheiro estrutural necessita determinar a força resultante devido a um vento não uniforme soprando contra a lateral de um arranha-céu.



Integração Numérica

Integral Numérica – Teorema de Rieman

- A integração é um processo de soma. Assim, na prática todas as aproximações numéricas podem ser representadas pela soma

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)+E_t$$

onde w_i são os pesos, x_i são os pontos da amostra, e E_t é o erro de truncamento

- A fórmula é válida para qualquer função contínua e limitada no intervalo fechado de integração.
- Existem diversas regras (formas analíticas) para determinar integrais de funções e que podem ser utilizadas na prática.

Integração Numérica

Integração Numérica – Terminologia

- Uma **partição** (de tamanho n) de um intervalo [a,b] é um conjunto de pontos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$$

- Uma **partição regular** possui todos pontos igualmente espaçados.

- Cada par de pontos consecutivos forma um **subintervalo** $[x_i, x_{i+1}]$.

Integração Numérica

Integração Numérica

- A fórmula de integração numérica mais comum é baseado em pontos igualmente espaçados.

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

- Dividindo [a,b] = [x_0, x_n] em n intervalos ($n \geq 1$)

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Integração Numérica

Integração Numérica – Técnicas Clássicas

- Quando técnicas de integração analítica não podem ser usadas para resolver alguma integral, então dentro de cada intervalo de intergração aproximamos f(x) por um polinômio de ordem m.

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

- O grau/ordem m do polinômios pode ser a mesma ou diferente para diferentes intervalos de integração da mesma função. Suponha a partição do intervalo em $\{a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b\}$. Então a intergral I,

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$, será substituída por

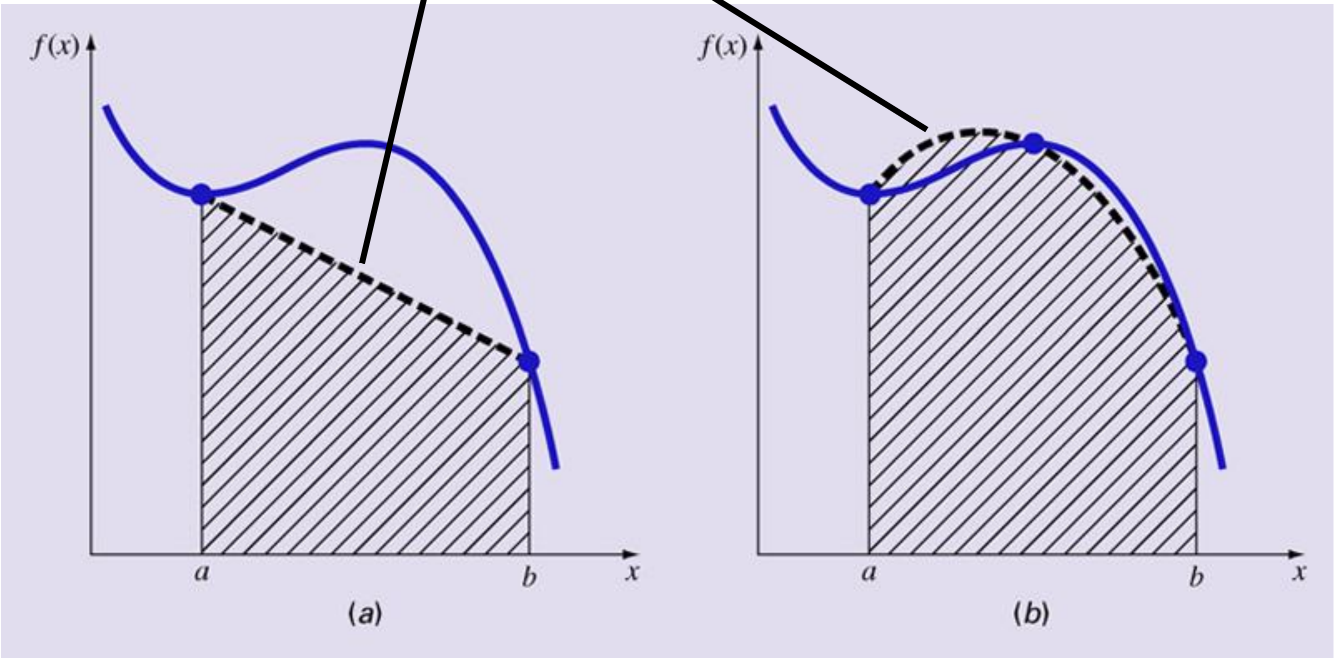
$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_{m_1}(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_{m_2}(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} p_{m_n}(x)dx$$

Integração Numérica

Integração Numérica – Técnicas Clássicas

- As técnicas mais comuns de integração numérica são:

m	Polinômio	Fórmula	Erro
1	linear	Trapezoidal	$O(h^2)$
2	quadrático	Simpson1/3	$O(h^4)$
3	cubico	Simpson3/8	$O(h^4)$



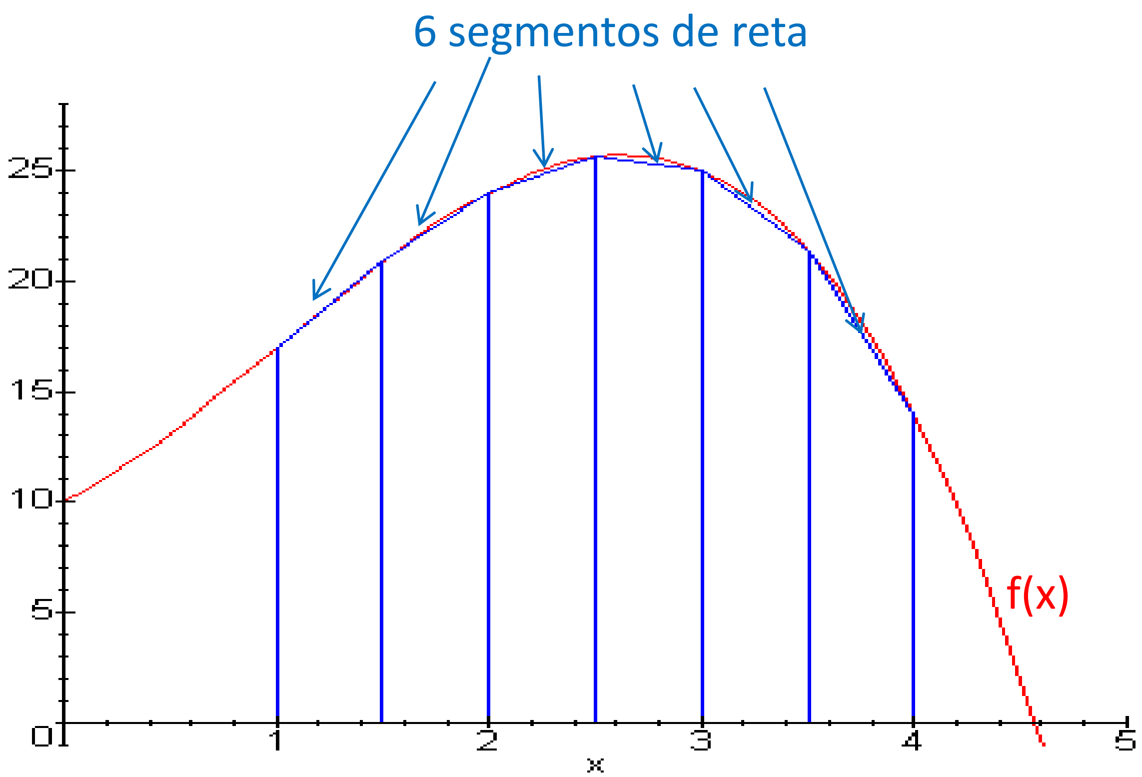
Integração Numérica

Regra dos Trapézios

Integração Numérica

Regra dos Trapézios

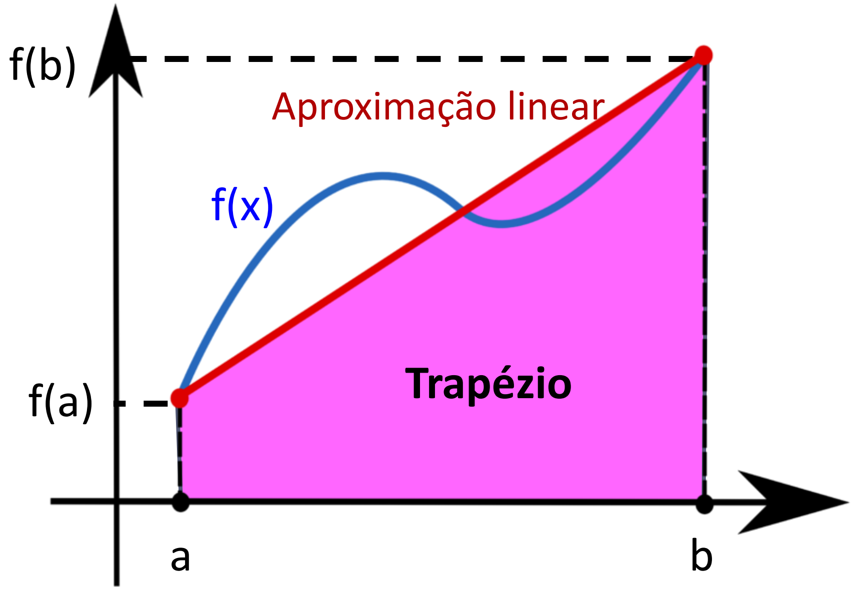
- Exemplo de aproximação do gráfico da função f(x) por 6 segmentos de reta.



Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Definições

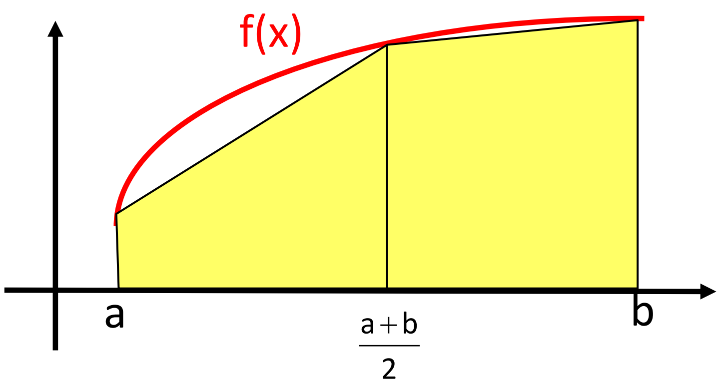
- Numericamente a regra dos trapézios é obtida aproximando-se f por um polinômio interpolador de 1° grau.
- Em seguida calcula-se a área do trapézio cuja base está sobre o eixo dos x.



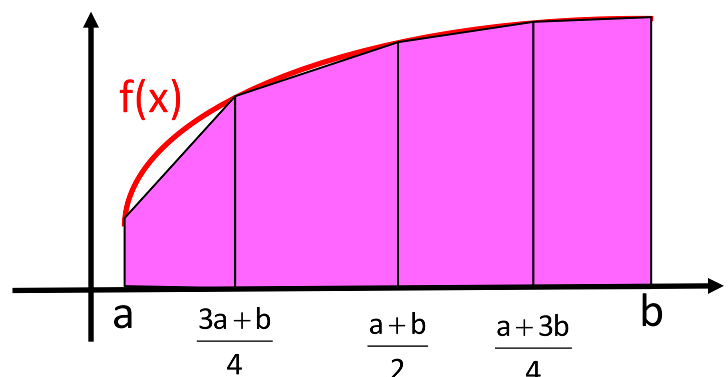
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Dedução da Fórmula

- Gera-se vários trapézios e soma-se as áreas dos mesmos.
- Quanto mais trapézios, mais próxima a área total está da área real.
- Em geral, qualquer conjunto de pontos que particiona o intervalo [a, b] pode ser utilizado como uma aproximação trapezoidal.
- Sugere-se usar **partição regular** (pontos igualmente espaçados) pois permitirá um processo de cálculo mais fácil.



Área aproximada usando 2 trapezoides.



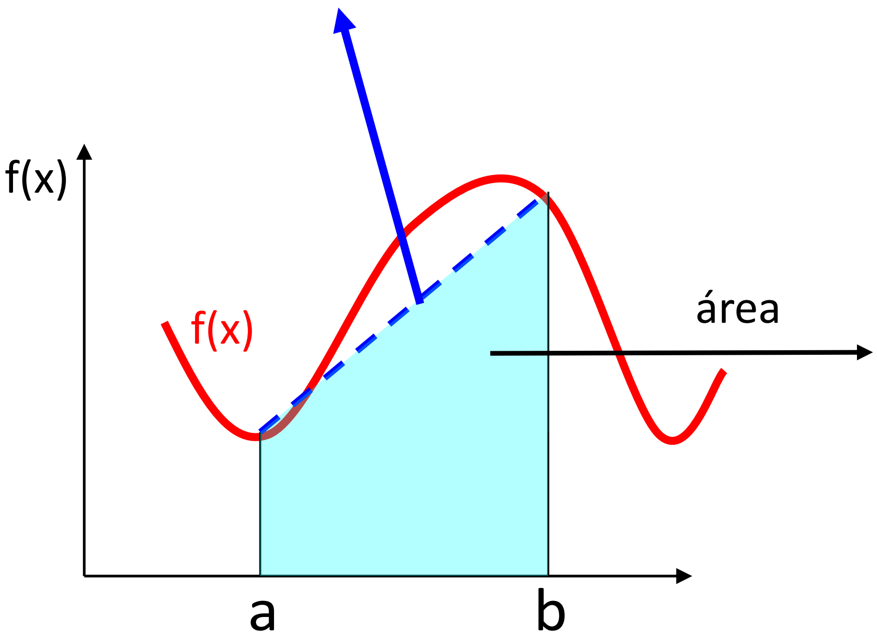
Área aproximada usando 4 trapezoides.

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Para 1 Subintervalos

- <u>n = 1 → 1 intervalo</u>

$$\boxed{y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$I \approx \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) dx$$

$$= \left(f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right) x \Big|_a^b$$

$$+ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b =$$

$$\boxed{= (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}}$$

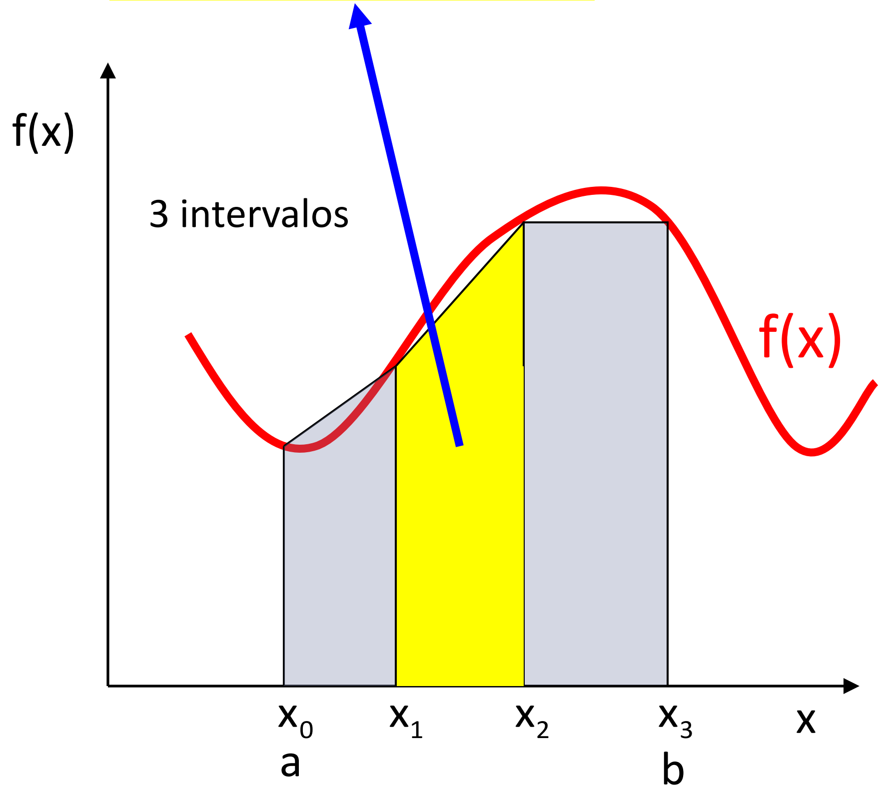
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Para n Subintervalos

- <u>$n > 1 \rightarrow$ n intervalos</u>

O intervalo $[a,b]$ é particionado em n segmentos $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$ então $\int_a^b f(x)dx$ é igual a soma das áreas dos n trapézios.

$$\text{Área} = \frac{x_2 - x_1}{2}\left(f(x_2) + f(x_1)\right)$$



Integração Numérica

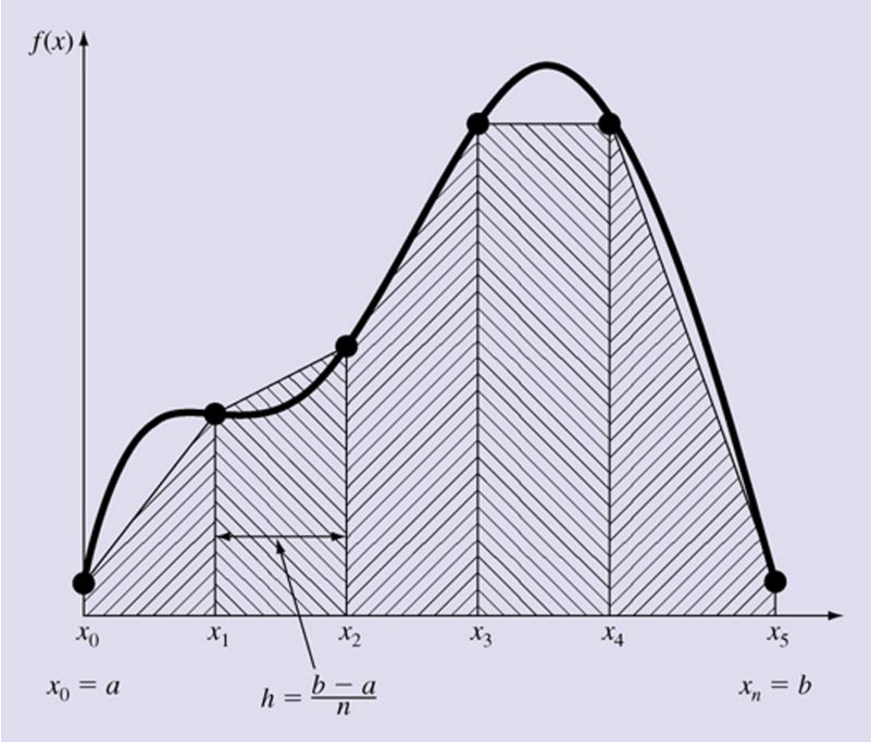
Regra dos Trapézios – Para n Subintervalos

- n intervalos – intervalos igualmente espaçados

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+\Lambda\ +2f(x_{n-1})+f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{4} f(x_i)+f(b)\right),\ x_i=(a+i\times h)$$



Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Teorema

- Se definirmos $\Delta x = (b - a)/n$, e considerando que $x_0=a$ e $x_n=b$, pode-se tomar o limite quando $n\to\infty$ para obter

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2n}\right)\left[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a)-f(b)\Delta x}{2}+\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a)-f(b)(b-a)}{2n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right]=$$

$$=0+\int_a^b f(x)dx$$

- Isso pode ser resumido no seguinte **Teorema**.

Seja f contínua em [a, b]. A regra do Trapézio para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

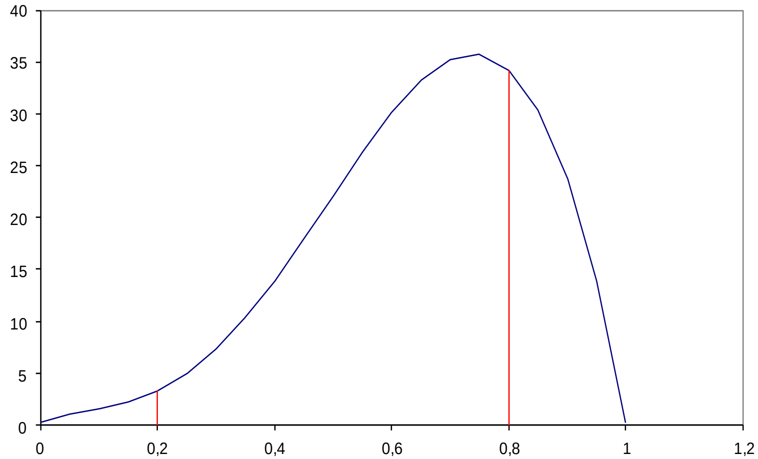
Além disso, como $n\to\infty$, o lado direito se aproxima de $\int_a^b f(x)dx$

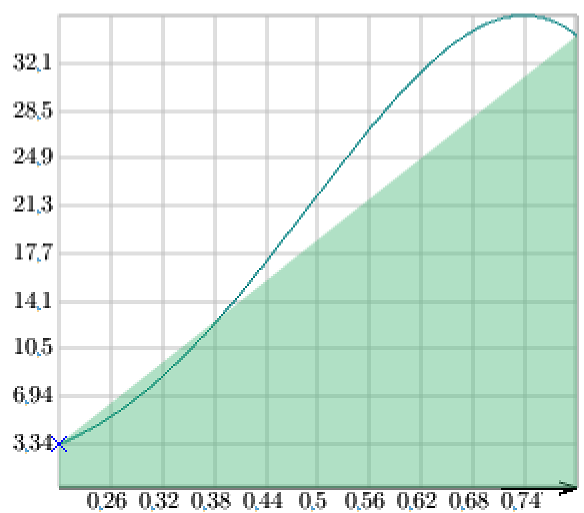
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

Integre $f(x) = 0{,}3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5$ de a=0,2 até b=0,8

$$\int_{0,2}^{0,8} \left(0{,}3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5\right) dx = 12{,}8237 \text{ (valor exato)}$$





i) Para n=1 subintervalo

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (0{,}8-0{,}2)\frac{34{,}22+3{,}81}{2} = 11{,}26$$

Erro = (12,8237 – 11,26) = 1,5637 (12,19%)

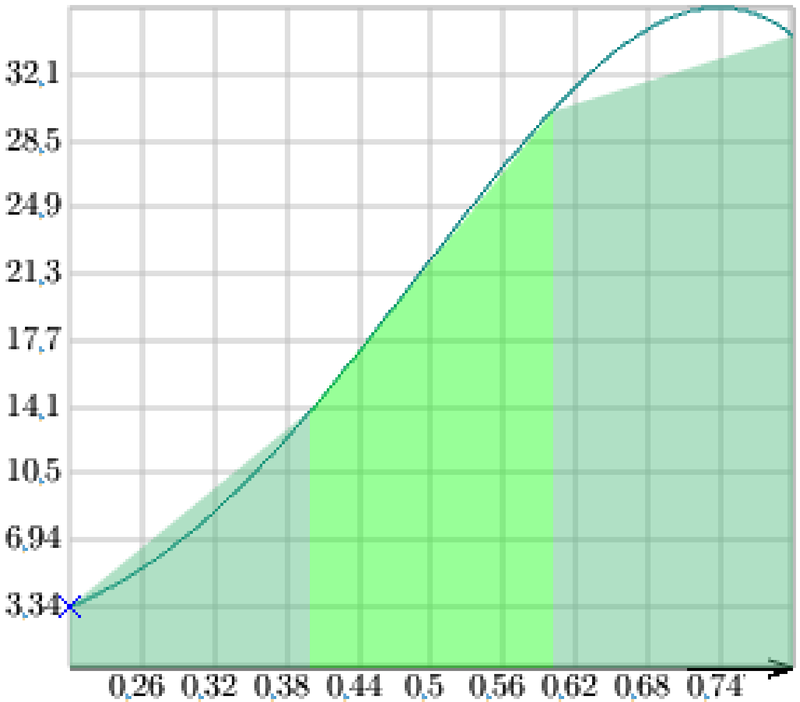
continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

... continuação

ii) Para os subintervalos (0,2, 0,4), (0,4, 0,6), (0,6, 0,8) (n = 3, h = 0,2)



$$I = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right] =$$

$$= \frac{(0,8-0,2)}{(2)(3)}\left[f(0,2) + 2\left(f(0,4) + f(0,6)\right) + f(0,8)\right]$$

$$= \frac{0,6}{6}\left[3,31 + 2(13,93 + 30,16) + 34,22\right] = 12,57$$

Erro = (12,8237 – 12,57) = 0,2535 (1,98%)

http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html

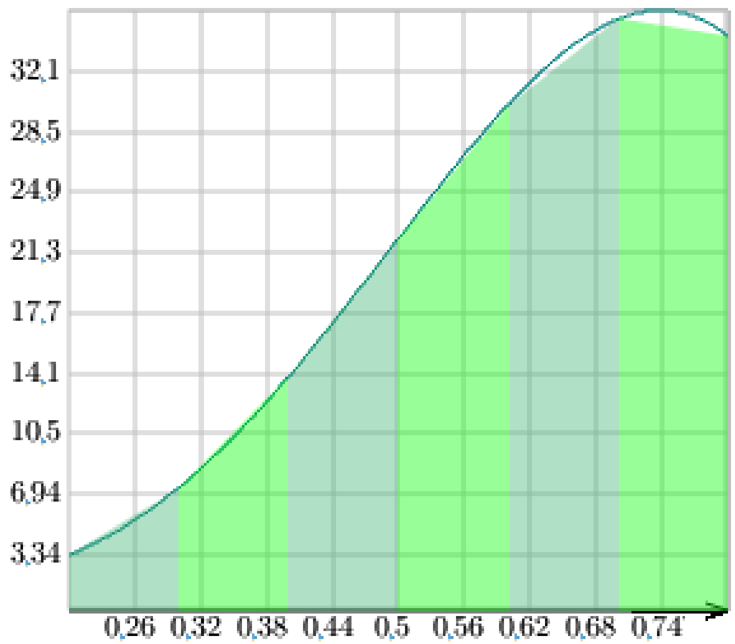
continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

... continuação

iii) Para n = 6, h = 0,1



$$I = \frac{(0{,}8-0{,}2)}{(2)(6)}\left[f(0{,}2)+2\left[f(0{,}3)+f(0{,}4)+f(0{,}5)+f(0{,}6)+f(0{,}7)\right]+f(0{,}8)\right]=$$

$$=\frac{0{,}6}{12}\left[3{,}31+2(7{,}34+13{,}93+22{,}18+30{,}16+35{,}22)+34{,}22\right]=12{,}76$$

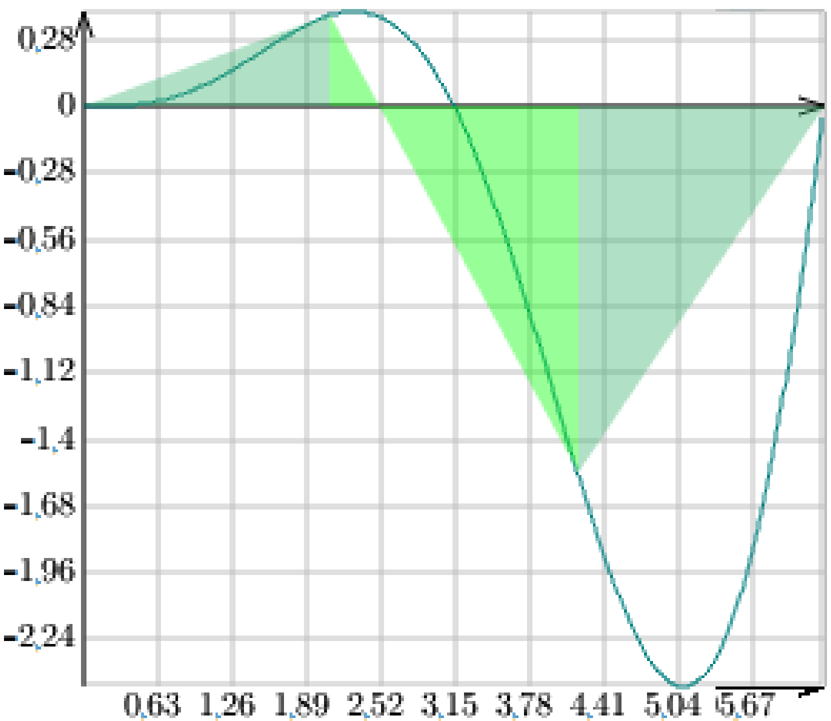
Erro = (12,8237 – 12,76) = 0,0637 (0,4967%)

Integração Numérica

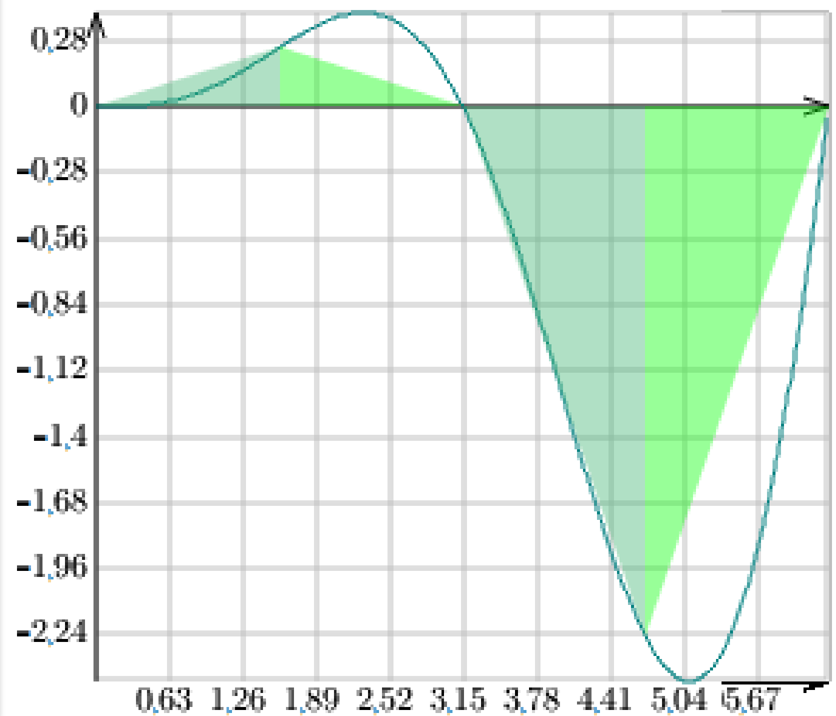
Regra dos Trapézios – Exemplo 2

- Estimar a integral $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2}\sin x\,dx$ com 3 e 4 partições.

3 subintervalos



4 subintervalos



http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html

continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 2

... continuação

n = 3

$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = b = 2\pi$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\pi^2}\sin x$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2}\sin x dx = -4 \quad \text{(valor exato)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2}\sin x dx \approx \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}\left(f(0) + 2f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f(2\pi(\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{3}\left(0 + 2\frac{4}{9}\sin\frac{2\pi}{3} + 2\frac{16}{9}\sin\frac{4\pi}{3} + 0\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{3}\left(\frac{8}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{32}{9}\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{-24\sqrt{3}}{18} = \frac{-8\sqrt{3}\pi}{9} = \text{-2,418}$$

n = 4

$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \pi$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x_4 = b = 2\pi$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\pi^2}\sin x$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2}\sin x dx \approx \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left(f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f(\pi) + 2f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f(2\pi)\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\left(0 + \frac{2}{4}\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi + \frac{18}{4}\sin\frac{3\pi}{2} + 0\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(-4) = -\pi$$

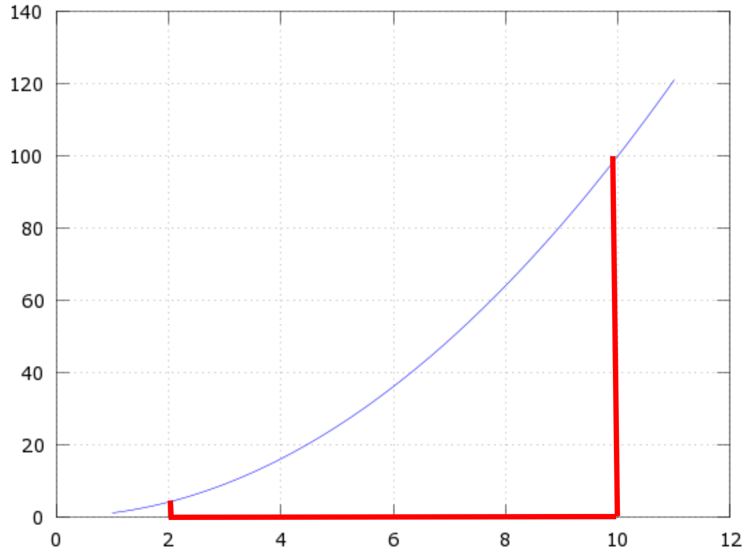
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 3

- Calcule a integral definida.

$$\int_2^{10} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_2^{10} = \frac{1}{3}(10^3 - 2^3) = \frac{1}{3}(1000 - 8) = \frac{992}{3} \approx 330{,}66 \text{ (Valor exato)}$$

- Utilize a regra do trapézio e calcule a integral aproximadamente.



Trapézios	Integral
1	416
2	352
4	336
10	331,52
50	330,7
100	330,675
1000	330,666
10000	330,66666

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Estimativa do Erro

Hipótese: $f''(x)$ é continua em $[a,b]$, os intervalos são iguais (comprimento igual a h)

Teorema: Se o método dos Trapézios é usado para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ então

$$\text{Erro} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \text{ onde } \xi \in [a,b]$$

$$\boxed{|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|} \quad \text{ou} \quad \boxed{|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Erro – Exemplo

- Quantos intervalos igualmente espaçados são necessários para calcular, com uma precisão de 5 casas decimais, a integral $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$?

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx, \quad \text{achar h tal que } |Erro| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$|Erro| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$b = \pi; \;\; a = 0; \quad f'(x) = \cos(x); \quad f''(x) = -\sin(x)$$

$$|f''(x)| \leq 1 \Rightarrow |Erro| \leq \frac{\pi}{12} h^2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \;\; h^2 \leq \frac{6}{\pi} \times 10^{-5} \;\; \Rightarrow \;\; h \leq 0{,}00437$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(b-a)}{h} = \frac{\pi}{0{,}00437} = 719 \;\; \text{intervalos}$$

continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Erro – Exemplo

... continuação

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2$$ (Valor exato)

Número dos Trapézios	Integral
1	0
700	1,999800000
718	1,999996600
719	1,999996818
1000	1,999996835

$$|Erro| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \quad (h = 0,0043693917296\,1028) \qquad |Erro| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$