Métodos Numéricos

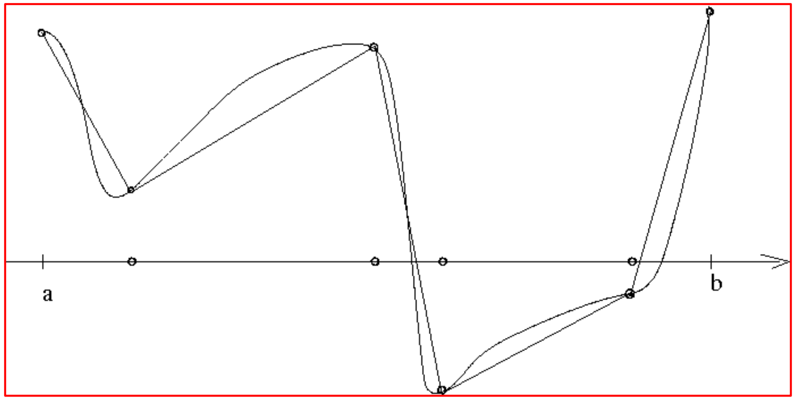
Integração Numérica – Regra de Simpson

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Integração Numérica

Revisão

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_{m_1}(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_{m_2}(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} p_{m_n}(x)dx$$



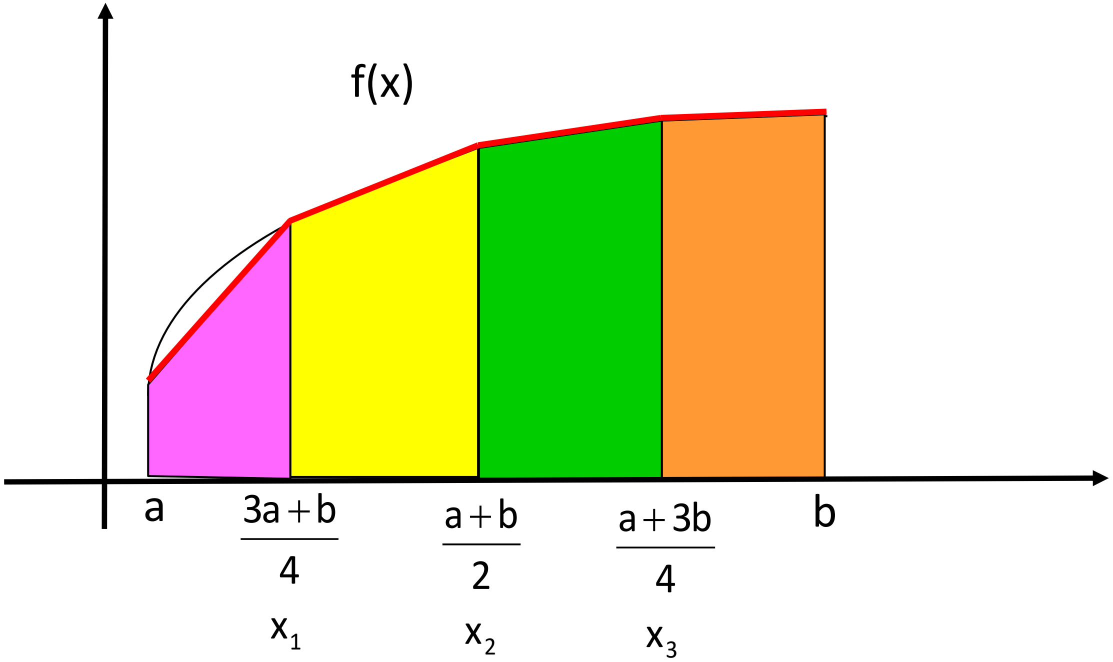
- As técnicas mais comuns de integração numérica são:

m	Polinômio	Fórmula	Erro
1	linear	Trapezoidal	$O(h^2)$
2	quadrático	Simpson1/3	$O(h^4)$
3	cubico	Simpson3/8	$O(h^4)$

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Revisão

Uma maneira de ver o método trapezoidal para a integração é que a curva que está sendo usada para estimar a integral é uma linha poligonal (um grupo de segmentos de linhas conectadas) e então calcula-se a área abaixo de cada segmento de reta.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(b)\right)$$

Integração Numérica

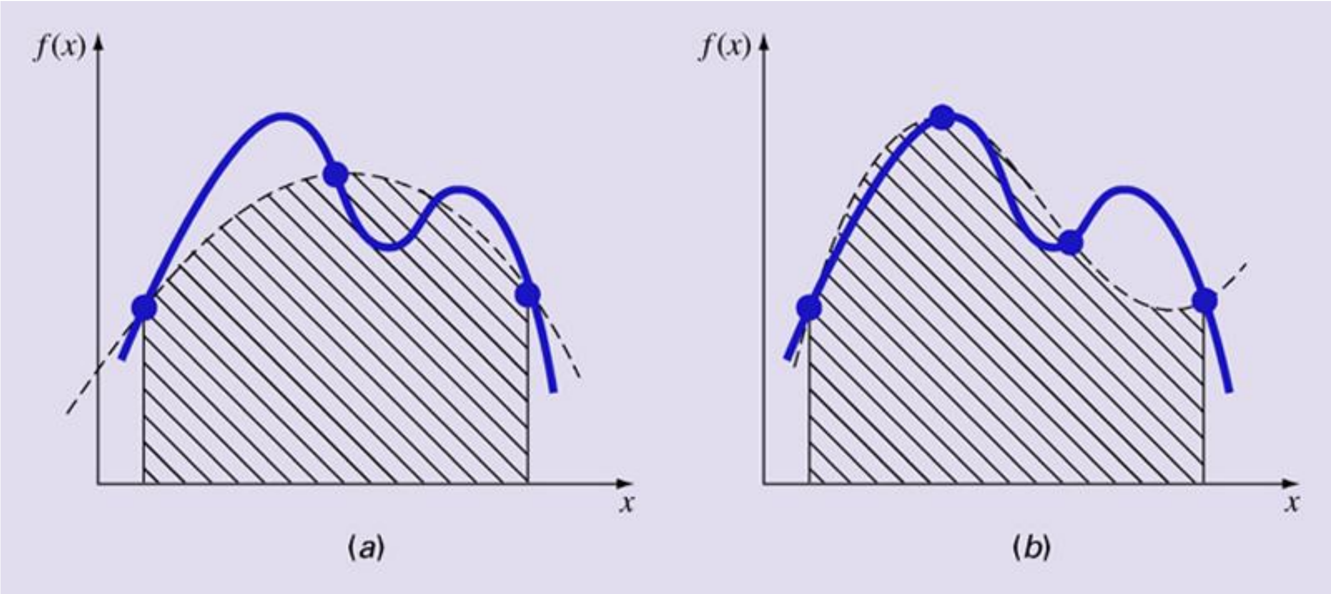
Regra de Simpson (1/3)

Integração Numérica

Regra de Simpson

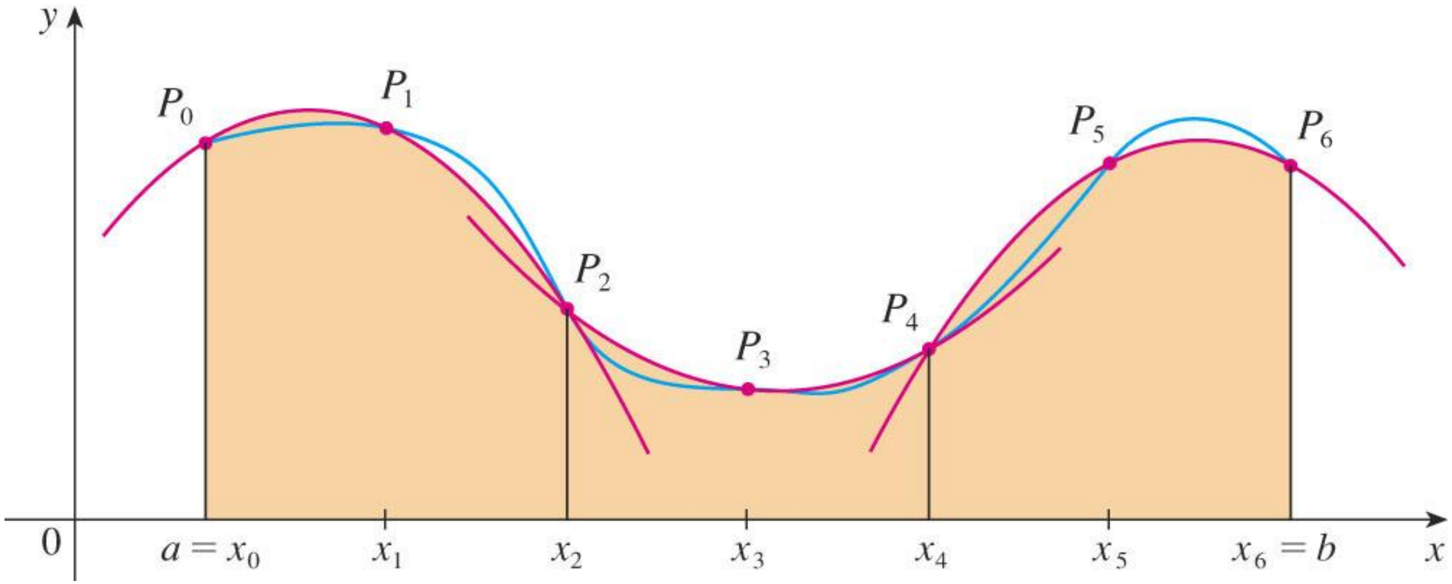
(a) representação gráfica regra de Simpson 1/3: Consiste em tomar a área sob uma parábola que liga três pontos.

(b) representação gráfica da regra de Simpson 3/8: Consiste em tomar a área sob uma equação cúbica que conecta quatro pontos.



Integração Numérica

Regra de Simpson



Integração Numérica

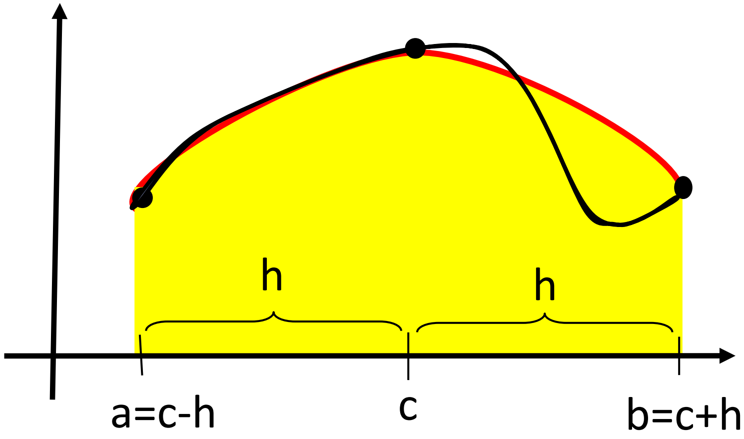
Regra de Simpson

- O método de Simpson usa um polinômio de segundo grau (ou seja, uma função quadrática) para estimar a curva para a qual você está tentando encontrar a integral. Esta é uma curva da forma

$$p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

- Os pontos são assumidos uniformemente espaçados.
- Para obter a estimativa para a integral escreve-se o polinômio de grau 2 usando 3 pontos consecutivos, em seguida integra-se.

x	y
a=c-h	y_0=f(a)
c	y_1=f(a+h)
b=c+h	y_2=f(b)



Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

Seja o caso especial com c = 0.

Será integrado o polinômio de 2º grau

$p_2(t) = c_2t^2+c_1t+c_0$.

x	y
-h	$y_0=f(-h)$
0	$y_1=f(0)$
h	$y_2=f(h)$

$$\int_{-h}^{h}\left(c_2t^2+c_1t+c_0\right)dt =$$
$$= \tfrac{c_2}{3}t^3+\tfrac{c_1}{2}t^2+c_0t\Big|_{-h}^{h}$$
$$= \tfrac{c_2}{3}h^3+\tfrac{c_1}{2}h^2+c_0h-\left(-\tfrac{c_2}{3}h^3+\tfrac{c_1}{2}h^2-c_0h\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}c_2h^3+2c_0h$$

$$y_0 = c_2h^2-c_1h+c_0$$
$$y_1 = c_0$$
$$y_2 = c_2h^2+c_1h+c_0$$

$$y_0+y_2 = 2c_2h^2+2c_0$$

$$c_2 = \frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}$$

Substituindo c_0 e c_2

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}\right)h^3+2y_1h$$
$$= \tfrac{h}{3}\left(y_0-2y_1+y_2+6y_1\right)$$
$$= \tfrac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

- Um intervalo fechado [a,b] – 2 subintervalos

x	y
a=c-h	$y_0=f(a)$
c	$y_1=f(a+h)$
b=c+h	$y_2=f(b)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

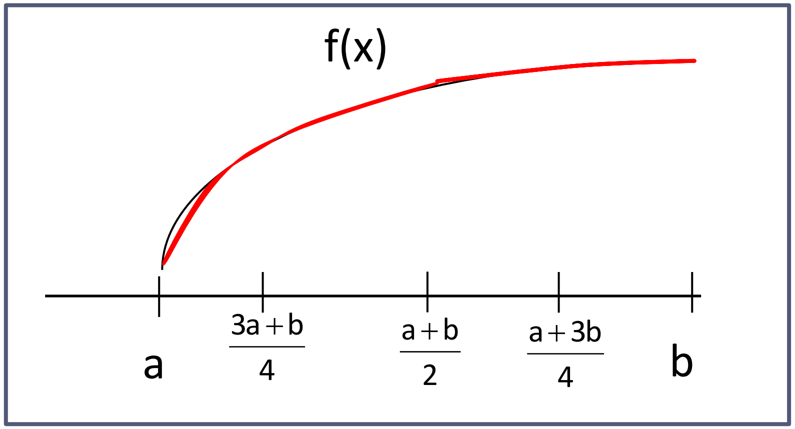
<u>3 pontos para interpolar -> 2 subintervalos</u>

Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

- Um intervalo fechado [a,b] – 4 subintervalos

$$h = \frac{b-a}{4}$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{4}\right)(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{4}\right)(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{4}\right)(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right)$$

4 subintervalos -> 4/2=2 parábolas

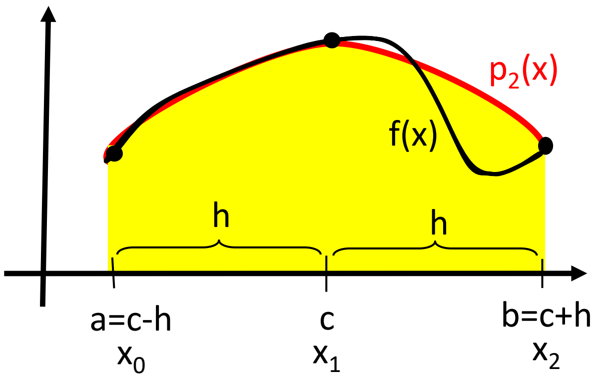
Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 2 da Equação

- Usando a fórmula de Lagrange para obter a fórmula de integração resultante da aproximação de f(x) por um polinômio interpolador de grau 2.

- Seja $p_2(x)$ que interpola f(x) nos pontos: $x_0=a$, $x_1=x_0+h$ e $x_2=x_0+2h=b$.

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$



$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)}f(x_2)$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 2 da Equação

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)}f(x_2)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0=a}^{x_2=b} p_2(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx - \frac{f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx +$$

$$+\frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \qquad h=\frac{b-a}{2}\,(2\,\text{subintervalos})$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Equação Geral

- Um intervalo fechado [a,b] – n subintervalos

- A fórmula geral da Regra de Simpson para calcular integrais é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{n}\right)\left(y_0 + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + y_{2n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{n}\right)\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

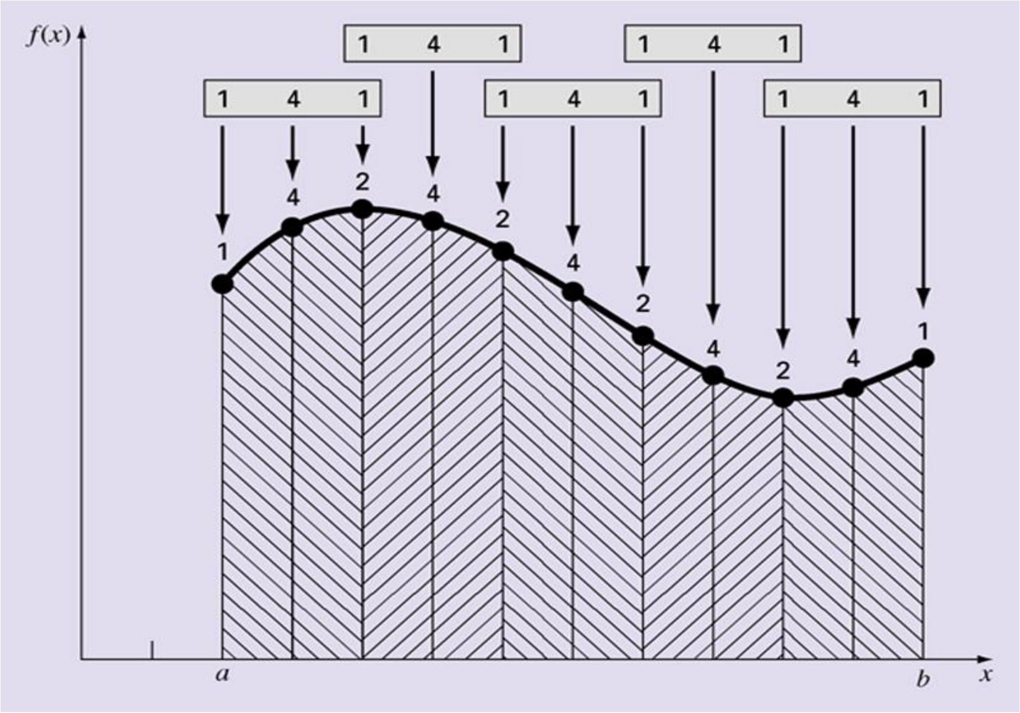
$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{n}\right)\left(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \ldots + f(b)\right)$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Equação Geral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(a)+4f\left(a+h\right)+2f\left(a+2h\right)+4f\left(a+3h\right)+2f\left(a+4h\right)+\ldots+f(b)\right)$$

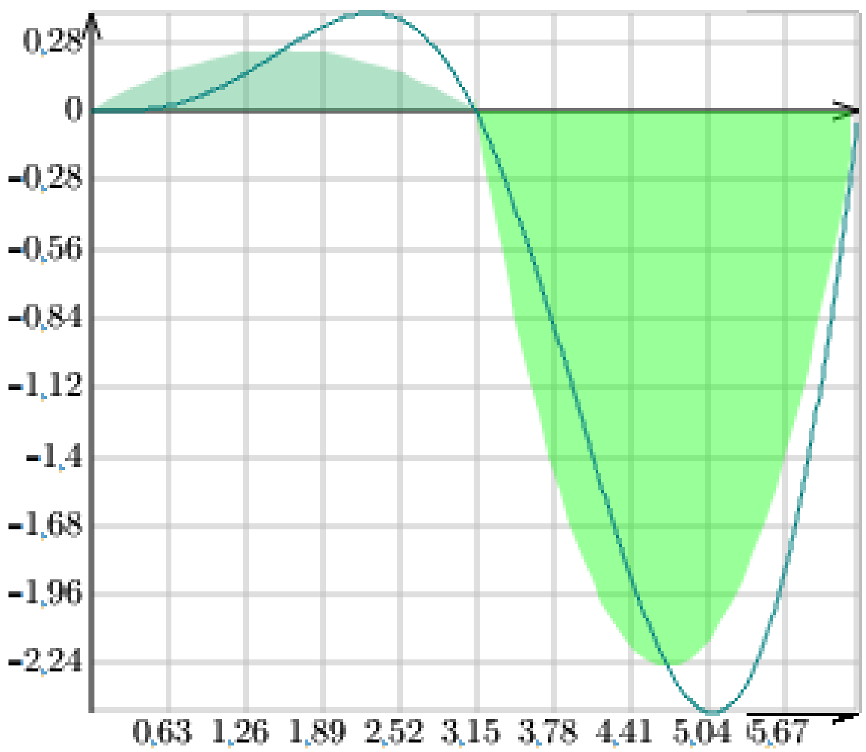
- Os pesos relativos da integral são representados acima dos valores da função. Note-se que o método só pode ser utilizado se o número de segmentos/subintervalos é par.



Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 1

- Estimar com 4 partições a integral $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx$ em [a b]=[0, 2π]



http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html

continua ...

Professor Volmir Eugênio Wilhelm – Professora Mariana Kleina

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 1

... continuação

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx = -4 \quad \text{(valor exato)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{n}\right)\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2\pi-0}{4}\right)\left(f(0) + 4f(0+h) + 2f(0+2h) + 4f(0+3h) + f(2\pi)\right)$$

$\Delta x = \dfrac{2\pi - 0}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ $x_0 = a = 0$ $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{2}$ $x_2 = x_1 + \Delta x = \pi$ $x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{3\pi}{2}$ $x_4 = b = 2\pi$	$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx \approx \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi}{2}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f(\pi) + 4f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f(2\pi)\right)$ $= \dfrac{\pi}{6}\left(0 + \sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\pi + 9\sin\frac{3\pi}{2} + 0\right)$ $= \dfrac{\pi}{6}(1-9) = \dfrac{\pi}{6}(-8) = \dfrac{-4\pi}{3} = -4{,}18879$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 2

- Calcule a integral definida.

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx = \frac{2x\sin(x) + (2 - x^2)\cos(x)}{\pi^2} = -4$$

- Utilize a Regra de Simpson e calcule a integral aproximadamente.

Simpson	Integral
2	-
4	-4,18879
10	-4,18879
20	-4,00021
50	-4,00000
100	-4,00000
1000	-4,00000

(Intervalos)

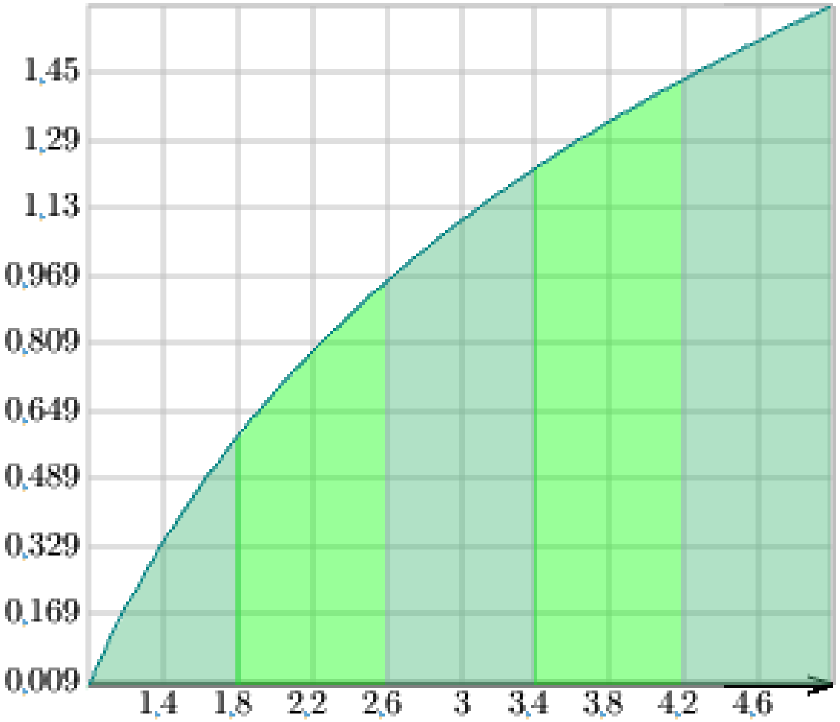
Trapézio	Integral
1	-
4	-3,14159
10	-3,86753
20	-3,86753
50	-3,99473
100	-3,99868
1000	-3,99998

(Intervalos)

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 3

- Método prático. Use 10 subintervalos para calcular $\int_1^5 \ln(x)dx$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 3

... continuação

$$\int_1^5 \ln(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b-a}{10}\right)\left(\ln(1)+4\sum_{k=0}^{9}\ln(x_{2k+1})+2\sum_{k=1}^{9}\ln(x_{2k})+\ln(5)\right)$$

$$\begin{aligned}\int_1^5 \ln(x)dx \approx \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{5-1}{10}\right)\times\big(f(1)+ \\ +4f(x_1)+2f(x_2)+ \\ +4f(x_3)+2f(x_4)+ \\ +4f(x_5)+2f(x_6)+ \\ +4f(x_7)+2f(x_8)+ \\ +4f(x_9)+f(5)\big)\end{aligned}$$

x	f(x)	k	kf(x)
1,00	0,0000	1	0,0000
1,40	0,3365	4	1,3459
1,80	0,5878	2	1,1756
2,20	0,7885	4	3,1538
2,60	0,9555	2	1,9110
3,00	1,0986	4	4,3944
3,40	1,2238	2	2,4476
3,80	1,3350	4	5,3400
4,20	1,4351	2	2,8702
4,60	1,5261	4	6,1042
5,00	1,6094	1	1,6094

$$\sum_{i=1}^{10} k_i f(x_i) = 30,3522$$

$$h = 0,4$$

$$\int_1^5 \ln(x)dx \approx \left(\frac{0,4}{3}\right)\times 30,3522 = 4,0470$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Estimativa do Erro

- De modo análogo à Regra do Trapézio, na Regra de Simpson realiza-se uma aproximação e comete-se um erro.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\ldots$$

$$\ldots..+[f(x_{m-2})+4f(x_{m-1})+f(x_m)]\}-\sum_{i=1}^{m/2}\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90}=I_{SR}+Erro$$

$$I_{SR}=\frac{h}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+2f(x_{m-2})+4f(x_{m-1})+f(x_m)\}$$

- Este erro é dado por:

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$Erro=-\frac{m}{2}\left(\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90}\right) \Rightarrow \boxed{|Erro|\le\frac{(b-a)^5}{180n^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|}$$

continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Estimativa do Erro

... continuação

- O erro é dado por:

$$\left|Erro\right| \le \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$$

ou

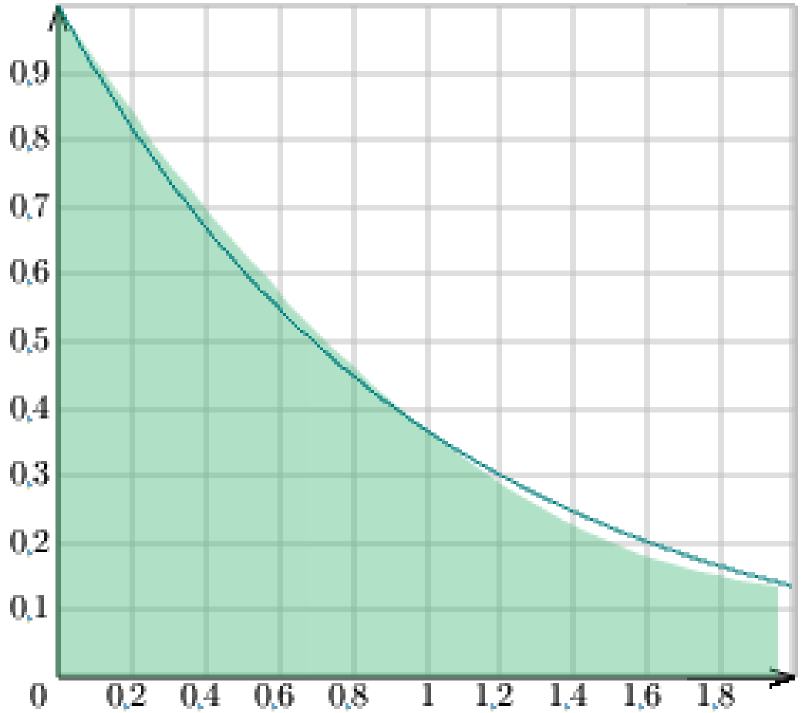
$$\left|Erro\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 1

- Integre $\int_0^2 e^{-x}dx$ pela Regra de Simpson usando dois subintervalos. Calcule o erro.

$n = 2 \quad h = \dfrac{b-a}{2} = 1 \qquad x_0 = a = 0 \qquad x_1 = \dfrac{a+b}{2} = 1 \qquad x_2 = b = 2$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 1

... continuação

$$\int_0^2 e^{-x}dx$$

$$h=\frac{b-a}{2}=1 \qquad x_0=a=0 \qquad x_1=\frac{a+b}{2}=1 \qquad x_2=b=2$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[f(0)+4f(1)+f(2)\right]$$

$$=\frac{h}{3}\left[e^0+4e^{-1}+e^{-2}\right]=0{,}86895101\ 6$$

$$|Erro|=\frac{(b-a)^5}{180n^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|$$

$$|Erro|=\frac{(2-0)^5}{180(2)^4}\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(iv)}(x)\right|, \quad f^{(iv)}(x)=e^{-x}$$

$$f^{(iv)}(x)=e^{-x}, \qquad \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|=\max_{x\in[0,2]}\left|e^{-x}\right|=1$$

$$|Erro|\le\frac{(2)^5}{(180)(2)^4}\times 1=0{,}01111\ldots$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx=0{,}86466 \quad \text{(valor exato)}$$

$$\int_0^2 e^{-x}dx\approx 0{,}86895 \quad \text{(simpson}-2\text{ intervalos)}$$

$$Erro=0{,}00429 \quad \text{(erro real)}$$

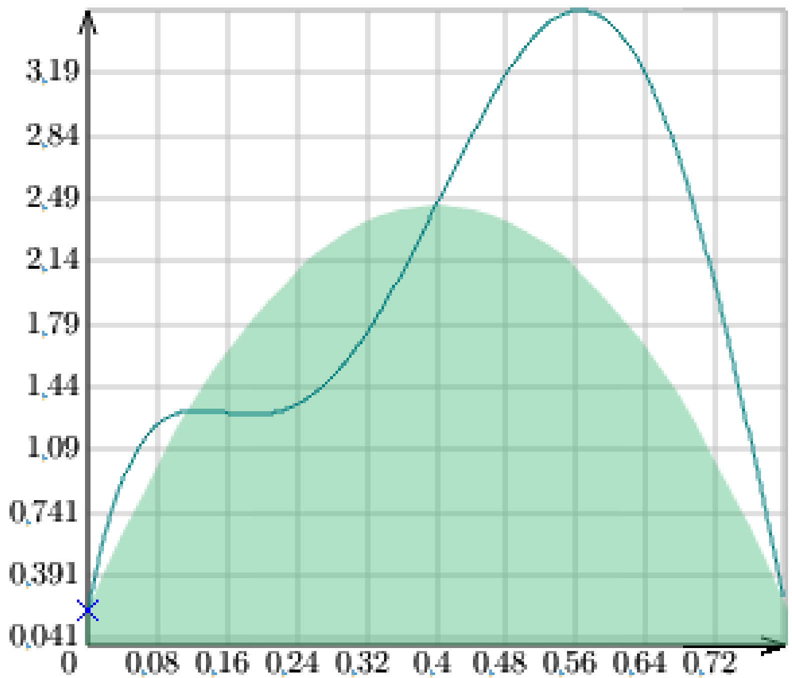
Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 2

- Integre f(x), de a=0 até b=0,8 pela Regra de Simpson usando dois subintervalos.

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$n = 2 \quad h = \frac{b-a}{2} = 0{,}4, \; x_0 = a = 0, \; x_1 = \frac{a+b}{2} = 0{,}4, \; x_2 = b = 0{,}8$$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 2

... continuação

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$h = \frac{b-a}{2} = 0{,}4,\ x_0 = a = 0,\ x_1 = \frac{a+b}{2} = 0{,}4,\ x_2 = b = 0{,}8$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}4) + f(0{,}8)\right] = 1{,}36746667$$

$$|Erro| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$$

$$|Erro| = \frac{(0{,}8-0)^5}{180(2)^4} \max_{x\in[0,2]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$$

$$f^{(iv)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left|f^{(iv)}(x)\right| = \max_{x\in[0,0.8]} \left|f^{(iv)}(x)\right| = 16800$$

$$|Erro| \le \frac{(0{,}8)^5}{180(16)} \times 16800 = 1{,}91146$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx = 1{,}64053333\,3 \quad \text{(valor exato)}$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx \approx 1{,}36746666\,7 \quad \text{(simpson} - 2\,\text{subintervalos)}$$

$$Erro = 0{,}27306666 \quad \text{(erro observado)}$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 3

- Integre f(x), de a=0 até b=0,8 pela Regra de Simpson usando 4 subintervalos.

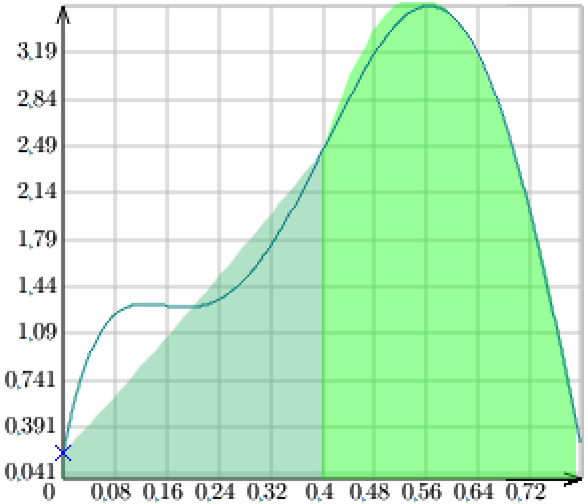
$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$n = 4 \qquad h = \frac{b-a}{4} = 0{,}2$$

$$\{[0\ 0{,}2],\ [0{,}2\ 0{,}4],\ [0{,}4\ 0{,}6],\ [0{,}6\ 0{,}8]\}$$

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx \approx 1{,}62346666$$



$$|Erro| = \frac{(0{,}8-0)^5}{180(4)^4} \max_{x\in[0,2]} \left|f^{(iv)}(x)\right|$$

$$f^{(iv)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left|f^{(iv)}(x)\right| = \max_{x\in[0,0.8]} \left|f^{(iv)}(x)\right| = 16800$$

$$|Erro| \leq \frac{(0{,}8)^5}{180(4)^4} \times 16800 = 0{,}119466$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx = 1{,}64053333 \quad \text{(valor exato)}$$

$$\int_0^{0,8} f(x)dx \approx 1{,}62346666 \quad \text{(simpson} - 4 \text{ subintervalos)}$$

$$Erro = 0{,}01706667 \quad \text{(erro observado)}$$