Alguns problemas de programação linear só "fazem sentido" se as variáveis assumirem valores inteiros.

Variáveis inteiras podem ser necessárias quando o modelo representa uma decisão única (uma operação em andamento, p.ex.).

Os modelos de programação linear inteira (pli) são muito mais difíceis de resolver do que os modelos de programação linear (pl).

Tipos de problemas de programação de números inteiros

1. Problemas de programação inteira pura.
   a) Todas as variáveis de decisão devem ter soluções inteiras.
2. Problemas de programação inteira mista.
   a) Algumas, mas não todas, variáveis de decisão devem ter soluções inteiras.
   b) Variáveis não inteiras podem assumir valores ótimos fracionários.
3. Binário puro (ou Zero-Um) problemas de programação inteira binária.
   c) Todas as variáveis de decisão são do tipo especial conhecido como binário.
   a) As variáveis devem assumir valores 0 ou 1.
4. Problemas de programação inteira binária mista.
   a) Algumas variáveis de decisão são binárias e outras variáveis de decisão são inteiras e/ou contínuas.

Um modelo com variáveis inteiras (pli) possui função objetivo e restrições idênticas aos modelos de pl.

Não há diferença no procedimento para formular um modelo pli e um modelo pl.

Apenas um requisito adicional no modelo pli é uma ou mais variáveis de decisão precisam assumir valores inteiros na solução ótima.

O primeiro tipo de variável apresentado neste texto é uma classe especial de problemas de programação inteira: quando há variáveis de decisão binárias. São variáveis x, tal que $x \in \{0,1\}$.

1) Variáveis Binárias (SIM-NÃO, YES-NO, GO-NO-GO, 0-1)

Uma variável de decisão binária geralmente é usada quando envolve decisões Sim e Não. Por exemplo, seja a decisão de comprar ou não comprar uma casa. Neste caso seja $x = 0$ a decisão de não comprar e $x = 1$ a decisão de comprar a casa

$$x = \begin{cases} 0 & \text{se decidir não comprar a casa} \\ 1 & \text{se decidir comprar a casa} \end{cases}$$

Exemplo: A companhia C&O é uma empresa diversificada com fábricas e depósitos em todo o Paraná, mas nenhuma ainda em Salto do Lontra e Medianeira. Uma questão básica é se constrói uma nova fábrica em Salto do Lontra ou Medianeira, ou talvez até ambas. Está também sendo considerado a hipótese de construir no máximo um novo depósito, mas restringirá a escolha para uma cidade onde uma nova fábrica será construída. Temos os seguintes dados

Construção	Lucro líquido (milhões de $)	Investimento necessário (milhões de $)
Construir fábrica em Salto do Lontra	8	6
Construir fábrica em Medianeira	5	3
Construir depósito em Salto do Lontra	6	5
Construir depósito em Medianeira	4	2

Capital Disponível: 10 milhões

Pergunta: A Companhia C&O deve expandir-se com fábricas e/ou depósitos em Salto do Lontra e/ou Medianeira?

Formulação matemática:

Passo 1: *Variáveis de decisão*

$x_1 = 1$, se construir uma fábrica em Salto do Lontra; 0 caso contrário
$x_2 = 1$, se construir uma fábrica em Medianeira; 0 caso contrário
$x_3 = 1$, se construir um depósito em Salto do Lontra; 0 caso contrário
$x_4 = 1$, se construir um depósito em Medianeira; 0 caso contrário

Passo 2: *Função Objetivo*

maximizar $Z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$ ($ de milhões)

Passo 3: *Restrições*

Capital disponível $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$ ($ de milhões)

A administração também está considerando construir no máximo um novo depósito,

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Mas restringirá a escolha a uma cidade onde uma nova fábrica está sendo construída

$x_3 \leq x_1$ e $x_4 \leq x_2$

Se $x_1 = 0$, então $x_3 = 0$ Se $x_1 = 1$, então $x_3 = 1$ ou $x_3 = 0$

Se $x_2 = 0$, então $x_4 = 0$ Se $x_2 = 1$, então $x_4 = 1$ ou $x_4 = 0$

Passo 4: *PLB*

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & Z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq x_1 \\ & x_4 \leq x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ são variáveis binárias} \\ & \text{ou } x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$

2) Encargos Fixos e Custos de Instalação

Frequentemente, a função objetivo de um problema de minimização contém custos fixos (custos preliminares de projeto, custos de investimento fixos, contratos fixos e assim por diante). Por exemplo, suponha que é possível usar qualquer quantidade de um novo tipo de acabamento em metal. Se este novo metal for usado, será necessário adquirir um novo equipamento (uma nova facilidade), incorrendo em um único custo de aquisição/instalação desta facilidade. Matematicamente falando, o custo $f(x_j)$ de instalar a facilidade j é modelado da seguinte maneira:

$$f(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = 0 \\ K + c_j x_j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde K é o custo fixo.

O modelo matemático final introduz uma variável binária y que determina se o custo ocorre ou não:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & Z = [Ky + c_j x_j] + (\text{resto da função objetivo}) \\ \text{s.a} & x_j \leq My \\ & \text{outras restrições} \\ & y \in \{0, 1\} \text{ (binário)} \end{array}$$

Neste modelo, se $x_j > 0$, então a primeira restrição garante que $y = 1$, de modo que o custo fixo na função objetivo seja acionado/adicionado corretamente. M é uma constante que pode indicar o limite máximo de x_j.

3) Relações lógicas – Implicações SE-ENTÃO

Variáveis binárias podem ser usadas para representar relações lógicas.

Exemplo 1. Seja o exemplo dado acima e considere os 2 casos

a) Deve-se instalar pelo menos 1 fábrica (a fábrica de Salto do Lontra ou de Medianeira deve ser instalada). Qual retrição reflete isso? Resposta: $x_1 + x_2 \geq 1$

b) Deve-se instalar pelo menos 1 depósito se forem construídas duas fábricas. Ou seja, se $x_1 + x_2 = 2$, então $x_3 + x_4 \geq 1$. Qual retrição reflete isso?

x_1	x_2	x_1+x_2-1	
0	0	-1	$\leq x_3+x_4$, $\forall x_3=\{0,1\}$, $\forall x_4=\{0,1\}$
1	0	0	$\leq x_3+x_4$, $\forall x_3=\{0,1\}$, $\forall x_4=\{0,1\}$
0	1	0	$\leq x_3+x_4$, $\forall x_3=\{0,1\}$, $\forall x_4=\{0,1\}$
1	1	1	$\leq x_3+x_4$, para $x_3=1$ ou $x_4=1$

Resposta: a restrição é $x_1 + x_2 - 1 \leq x_3 + x_4$.

Exemplo 2. Seja x_P o número de Portas, x_J o número de Janelas

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & Z = 300\,x_P + 500x_J & \\
\text{s.a} & x_P \leq 4 & \text{planta 1} \\
 & 2x_J \leq 12 & \text{planta 2} \\
 & 3x_P + 2x_J \leq 18 & \text{planta 3} \\
 & x_P \geq 0,\ x_J \geq 0 & \\
 & x_P,\ x_J \text{ integer} &
\end{array}
$$

SE produzir alguma porta, **ENTÃO** deverão ser produzidas pelo menos 3 unidades

- Se $x_P > 0$ então $P \geq 3$
- Defina $y = 0$ se não produzirmos portas, $y = 1$ se produzirmos portas
- Então $x_P \geq 3y$. Isso é suficiente?
  - ✓ Se $y = 1$, então $x_P \geq 3$, o que é bom, mas se $y = 0$, $x_P \geq 0$; no entanto, x_P deve ser 0 quando $y = 0$, portanto, precisamos adicionar mais algo
- Adicione também $x_P \leq My$, onde M é um grande número
  - ✓ Se $y = 1$, então $x_P \leq M$, que é verdadeiro, e se $y = 0$, $x_P \leq 0$, isto é, $x_P = 0$

4) Ativar ou Desativar UMA restrição

Seja a desigualdade $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$. Defina uma variável binária y tal que $y = 1$ implica que a desigualdade é satisfeita ou está ativada. A expressão matemática para ativar ou desativar a desigualdade é dada por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1 - y)$ onde M é um número grande. Se $y = 0$ então a restrição é desativada pois $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode assumir qualquer valor até o limite superior M.

5) Ativar UMA restrição e desativar OUTRA restrição (Restrições disjuntivas)

Considere as desigualdades: $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ (1) e $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ (2). Deseja-se que somente uma das desigualdades esteja ativada; então, deve-se definir uma variável binária y tal que $y = 1$, então somente (1) é ativada e $y = 0$, então somente (2) é ativada. Por fim, seja um número muito grande M de forma que representaremos a situação por: $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My_1$ e $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$ com $y_1 + y = 1$. Se fizermos $y_1 = 1 - y$, podemos escrever $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1 - y)$ e $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$.

Exemplo 1. Seja x_B o número de Bicicletas *mountain bike* e x_C o número de bicicletas de Corrida

maximize	$Z = 15x_B + 10x_C$	
s.a	$x_B \leq 2$	limite de produção 1
	$x_C \leq 3$	limite de produção 2
	$x_B + x_C \leq 4$	limite de produção de acabamento de metais
	$x_B, x_C \geq 0$	não negatividade

Suponha que possamos escolher entre usar a máquina de acabamento de metal original (3ª restrição) ou uma outra com restrição associada "$x_B + \frac{3}{2}x_C \leq 6$".

Podemos alcançar esse efeito ao introduzir uma única variável binária (chamar de y) e usá-la nas duas restrições, ambas incluídas no modelo, da seguinte forma:

(1) $x_B + x_C \leq 4 + My$ (2) $x_B + 1{,}5x_C \leq 6 + M(1 - y)$

Se $y = 0$, apenas a restrição original mantém-se, e se $y = 1$, apenas a nova restrição é válida/ativada, exatamente o tipo de comportamento "UMA ou OUTRA" que queríamos.

Exemplo 2. Suponha que a região viável seja

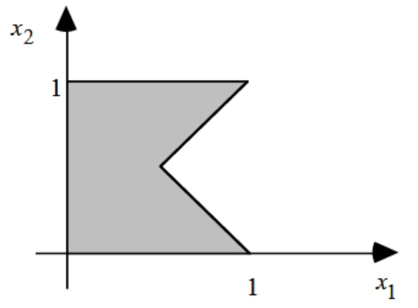


Fig. 2: example of non-convex feasible region

Esta região não convexa pode ser decomposta nas regiões P e Q conforme:

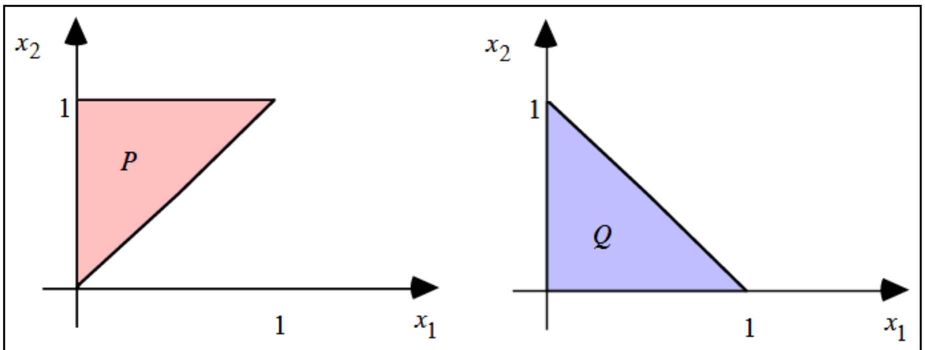


Fig. 3: decomposition of the polyhedron

O poliedro P é dado por $P = \{x \in R^2: x_1 - x_2 \leq 0, x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, enquanto que $Q = \{x \in R^2: x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

As restrições que caracterizam mais especificamente as duas regiões viáveis são $x_1 - x_2 \leq 0$ em relação a P e $x_1 + x_2 \leq 1$ em relação a Q. Devemos cuidar que na nossa formulação, pelo menos, uma dessas duas restrições seja mantida. Considerando o problema do ponto de vista oposto, isso significa que, no máximo, uma dessas duas restrições pode ser transformada em redundante.

Conforme ilustrado na Figura 4, cancelar uma dessas restrições significa transladá-la por uma quantidade suficiente para que inclua toda a região viável do outro poliedro.

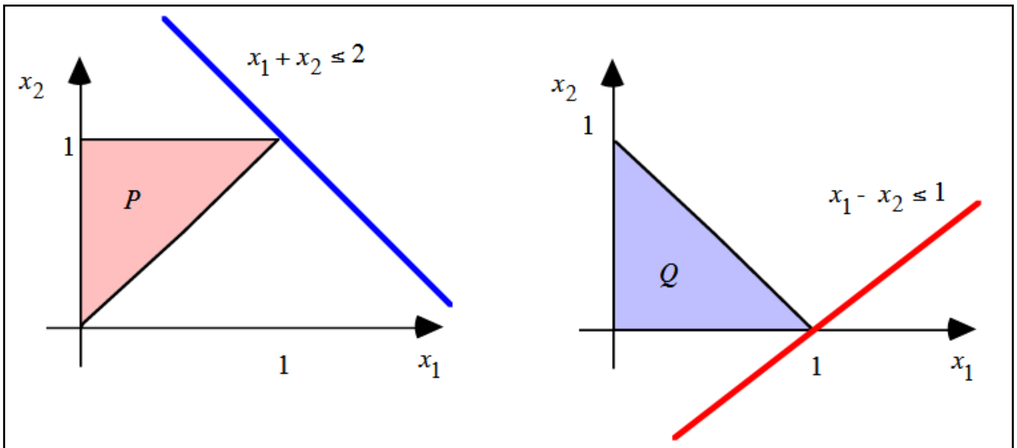


Fig. 4: translation of constraints

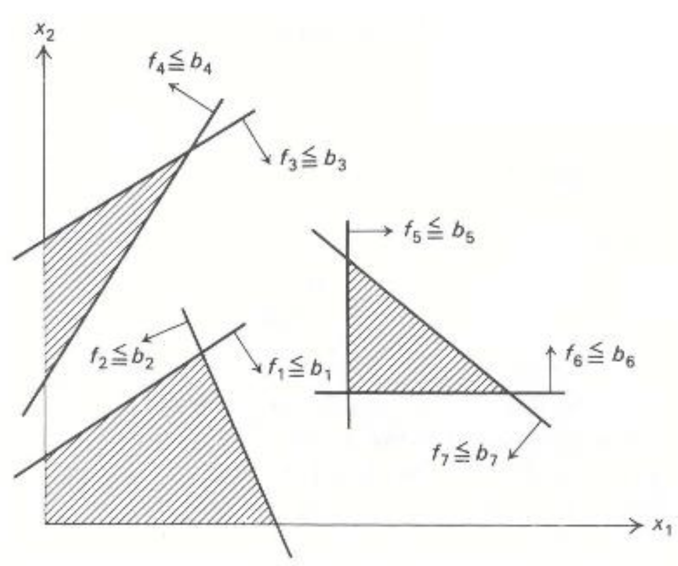
Para realizar a operação de cancelamento de no máximo uma restrição (ou um grupo de restrições) das duas que foram encontradas, podemos introduzi as variáveis 0-1 y_P e y_Q com valor 1 se decidimos cancelar a restrição relativa a P ou a Q, respectivamente. Assim, a formulação da região mostrada na Figura 2 torna-se:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$x_2 \leq 1$	$x_1 - x_2 \leq 0 + M_P y_P$
$x_1 + x_2 \leq 1 + M_Q y_Q$	$y_P + y_Q \leq 1$	$y_P, y_Q \in \{0, 1\}$

A restrição $y_P + y_Q \leq 1$ permite cancelar no máximo um dos dois grupos de restrições. A escolha das duas constantes M_P e M_Q deve ser tal que garanta que a região viável esteja completamente contida dentro da restrição transladada.

Se desejarmos desativar K de N restrições, basta introduzir N variáveis binárias, $y_1, \ldots, y_N$, uma para cada restrição, da seguinte maneira: $f_1(x) \le b_1 + My_1, \ldots, f_N(x) \le b_N + My_N$ e incluindo a seguinte restrição adicional: $\sum_{i=1}^{N} y_i = N - K$.

Exemplo 3. Ativar e desativar regiões



http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-09.pdf

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &\le b_1 + M_1y_1 \\ f_2(x_1,x_2) &\le b_2 + M_2y_1 \end{aligned}\right\} \text{Região 1}$$

$$\left.\begin{aligned} f_3(x_1,x_2) &\le b_3 + M_3y_2 \\ f_4(x_1,x_2) &\le b_4 + M_4y_2 \end{aligned}\right\} \text{Região 2}$$

$$\left.\begin{aligned} f_5(x_1,x_2) &\le b_5 + M_5y_3 \\ f_6(x_1,x_2) &\le b_6 + M_6y_3 \\ f_7(x_1,x_2) &\le b_7 + M_7y_3 \end{aligned}\right\} \text{Região 3}$$

$y_1+y_2+y_3 \le 2$

$x_1, x_2 \ge 0$

y_1, y_2, y_3 binárias

6) Representação de função linear por partes

Podemos usar variáveis binárias para modelar funções arbitrárias de custo lineares por partes. A função é especificada por pares ordenados $\left(a_i, f(a_i)\right)$ e desejamos avaliá-la em um ponto x.

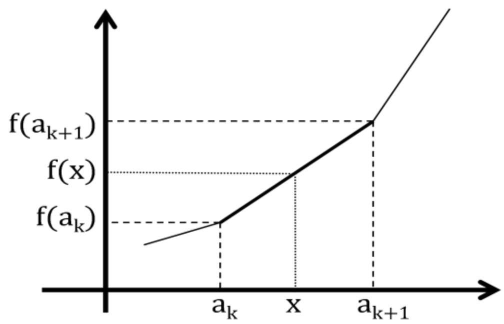
Sejam dois pontos de "quebra" seguidos a_k e a_{k+1}, e o segmento de linha entre eles.

Se x é qualquer ponto entre os extremos a_k e a_{k+1}, então x e f(x) pode ser expresso por

$$x = \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} \qquad f(x) = \lambda_k f(a_k) + \lambda_{k+1} f(a_{k+1})$$

$$\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1 \qquad \lambda_k, \lambda_{k+1} \ge 0$$

visto que f(x) também é um segmento de reta entre $f(a_k)$ e $f(a_{k+1})$.



Se tivermos r segmentos, podemos generalizar esta ideia para todos os (r+1) pontos de “quebra”

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_{r+1}$$

$$f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \cdots + \lambda_{r+1} f(a_{r+1})$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{r+1} = 1$$

com $\lambda_k \geq 0, \forall k$, e no máximo dois λ_k adjacentes podem ser positivos.

Para garantir a exigência de que dois λ_k adjacentes sejam positivos, introduzimos variáveis binárias y_k para cada segmento de reta da linearização por partes, e adicionamos as seguintes restrições.

$\lambda_1 \leq y_1$ $\quad$ $\lambda_2 \leq y_1 + y_2$ $\quad$ $\lambda_3 \leq y_2 + y_3$ $\quad$ ...

$\lambda_{r-1} \leq y_{r-1} + y_r$ $\quad$ $\lambda_r \leq y_r$ $\quad$ $\sum_{k=1}^{r} y_k = 1$ $\quad$ $y_k \in \{0,1\}, \forall k$

Cada y_k controla o valor de λ_k e λ_{k+1}. Isto é, se $y_k = 0$, a restrição força λ_k e λ_{k+1} a serem NULOS. Da mesma forma, se $y_k = 1$, então λ_k e λ_{k+1} estarão no intervalo [0, 1].

Visto que a restrição $\sum_{k=1}^{r} y_k = 1$ restringe todos os y_k, então exatamente um único y_k será UNITÁRIO (=1), permitindo que apenas dois λ_k adjacentes sejam NÃO NULOS na solução. De fato, o y_k que assume valor igual a 1 corresponde precisamente ao segmento de reta a que ele está associado (k-ésimo segmento).

Exemplo 1:

$f(x) = 10x \quad$ if $0 \leq x \leq 100$

$f(x) = 100 + 9x \quad$ if $100 \leq x \leq 300$

$f(x) = 1000 + 6x \quad$ if $300 \leq x \leq 500$

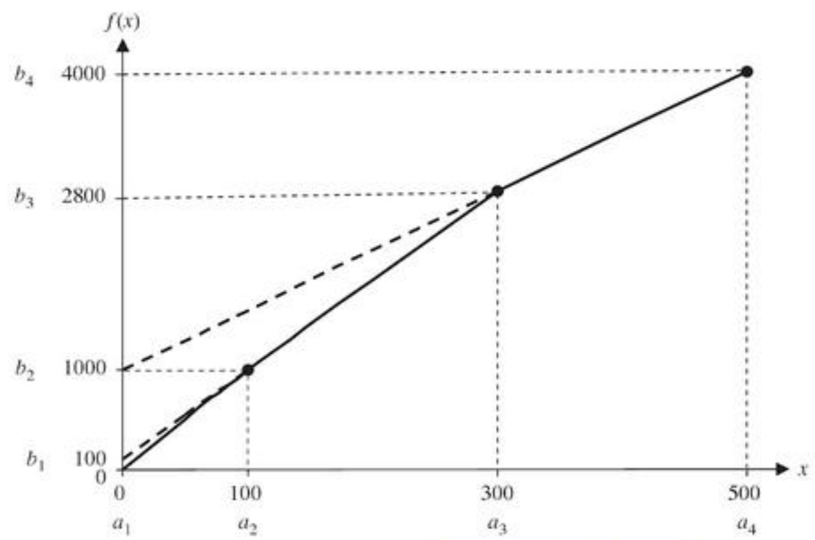
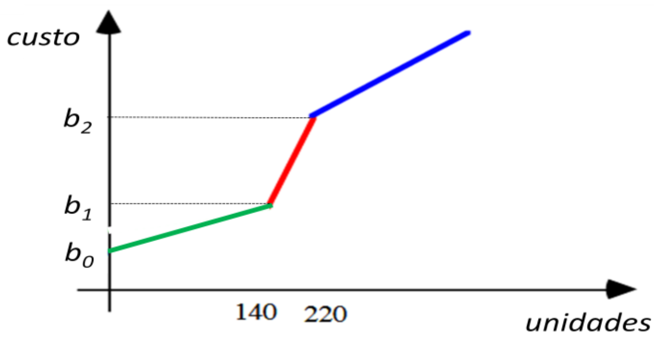


FIGURE 3.1 Representing a piecewise linear function.

$$
\begin{aligned}
x &= 0\lambda_1 + 100\lambda_2 + 300\lambda_3 + 500\lambda_4 \\
f(x) &= f(0)\lambda_1 + f(100)\lambda_2 + f(300)\lambda_3 + f(500)\lambda_4 \\
&= 0\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 2800\lambda_3 + 4000\lambda_4 \\
\lambda_1 &\le y_1 \\
\lambda_2 &\le y_1 + y_2 \\
\lambda_3 &\le y_2 + y_3 \\
\lambda_4 &\le y_3 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 1 \\
\lambda_k &\ge 0 \text{ for all } k \\
y_k &= 0 \text{ or } 1 \text{ for all } k
\end{aligned}
$$

Observe que x somente pode variar em [0, M] ([0, 500] e x é combinação linear convexa das extremidades de um único segmento. No próximo exemplo o valor final de x depende de diferentes segmentos.

Exemplo 2: (https://www.yumpu.com/en/document/read/11542495/integer-linear-programming) Antes da desregulamentação da telefonia italiana, as taxas para assinantes privados eram as seguintes: para as primeiras 140 unidades, o custo era de 50 liras, da 141ª até a 220ª unidade, o custo era de 207 liras e as seguintes unidades eram 127 liras. A figura mostra um esquema dessa função de custo, onde b_0 representa um custo fixo conhecido (por exemplo, a taxa bimestral).



Seja x o número de unidades e f(x) a função de custo, matematicamente temos:

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ b_0 + 50x, & \text{se } 0 < x \le 140 \\ b_1 + 207x, & \text{se } 140 < x \le 220 \\ b_2 + 127x, & \text{se } 220 < x \end{cases}
$$

onde b_1 e b_2 são os valores da intersecção das linhas vermelha e verde (azul e vermelha) representadas na figura (b_1 e b_2 não são utilizados no processo decisório).

Se quisermos usar essa função de custo em um problema de otimização, vamos enfrentar a dificuldade de uma função objetivo não linear, mas linear por partes. Uma maneira de lidar com essas funções é usar modelos de programação linear inteira. A ideia é lidar separadamente com os três intervalos [0, 140], [140, 220], [220, M], sendo M uma constante apropriadamente grande. Vamos usar as variáveis contínuas z_0, z_1 e z_2 indicando quantas unidades são gastas no primeiro, no segundo e no terceiro intervalo, respectivamente, e portanto $0 \leq z_0 \leq 140$, $0 \leq z_1 \leq 80$ e $0 \leq z_2$.

Também temos que introduzir um mecanismo que evite gastar as unidades de um intervalo se as unidades do intervalo anterior ainda não estiverem esgotadas. Isto é feito introduzindo as variáveis 0-1, uma para cada intervalo, (y_0, y_1 e y_2) com valor 1 somente se começarmos a gastar algumas unidades no intervalo a que se referem. A função objetivo e as restrições que operam o mecanismo que mencionamos são as seguintes:

minimize $Z = b_0y_0 + 50z_0 + 207z_1 + 127z_2 + f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

s.a. $140y_1 \leq z_0 \leq 140y_0$

$80y_2 \leq z_1 \leq 80y_1$

$0 \leq z_2 \leq My_2$

$x = z_0 + z_1 + z_2$

$g(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *(demais restrições lineares)*

$y_0, y_1, y_2 \in \{0,1\}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

onde $f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o "restante" da função objetivo e $g(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ as restrições lineares que envolvem/"entrelaçam" as variáveis do pli.

Observa-se que se $z_1 > 0$ então y_1 deve ser igual a 1, o que implica que z_0 deve ser igual a 140, portanto devemos ter usado todas as unidades do intervalo anterior.

Vamos supor, por exemplo, $x = 400$. Neste caso $y_2 = y_1 = y_0 = 1$ e $x = 140 + 80 + 180$

7) Representação de valores discretos

Considere um problema em que uma variável x só pode assumir um valor do conjunto discreto $\{4, 6, 8, 12, 20, 24\}$. Para representar essa condição, defina variáveis binárias y_i, $i = 1, \ldots, 6$ e adicione as seguintes restrições:

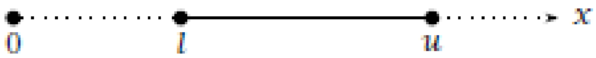
$x = 4y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 12y_4 + 20y_5 + 24y_6$ $\quad$ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1.$

8) Variável assumindo valores descontínuos

Considera uma situação simples onde o valor de uma variável deve ser zero ou entre limites positivos específicos. Ou seja, desejamos:

$$x = 0 \text{ ou } l \leq x \leq u$$

Isso pode ser interpretado como duas restrições que não podem ser atendidas simultaneamente.



Essa situação ocorre quando um fornecedor de algum item exige que, se um pedido de item for solicitado, seu tamanho de lote deve estar entre um valor mínimo e máximo específico. Outra possibilidade é que haja um custo de configuração associado à fabricação de um item.

Para modelar variáveis descontínuas, seja $y \in \{0,1\}$, tal que $y = 0$ para $x = 0$ e $y = 1$ se $x \in [l, u]$. Portanto, precisamos adicionar as seguintes restrições:

$$x \leq uy \qquad x \geq ly \qquad y \in \{0,1\}$$

9) Eliminação de produtos de variáveis

https://download.aimms.com/aimms/download/manuals/AIMMS3OM_IntegerProgrammingTricks.pdf

Seja uma equação não linear $z = xy$, onde z, x e y são variáveis binárias. O truque padrão é que esta restrição seja substituída pelas duas restrições lineares:

$$z \leq \frac{x+y}{2} \qquad z \geq x + y - 1 \qquad z \in \{0,1\}$$

ou

$$z \geq x + y - 1 \qquad z \leq x \quad z \leq y \qquad z \in \{0,1\}$$

Exemplo: (http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/moreip.html) No planejamento da produção mensal para os próximos seis meses, uma empresa deve, em cada mês, operar ou um turno normal (de 8h) ou um turno prolongado (de 14h). O turno normal custa \$ 100 por mês e pode produzir até 5.000 unidades por mês. Um turno prolongado custa \$ 180 por mês e pode produzir até 7.500 unidades por mês.

Observa-se que, para qualquer tipo de turno, o custo incorrido é fixo, independente da quantia produzida. Estima-se que mudar de um turno normal em um mês para um turno prolongado no próximo mês custa um extra de \$ 15. Nenhum custo extra ocorre em mudar de um turno prolongado em um mês para um turno normal no próximo mês.

O custo de manutenção de estoque é estimado em \$ 2 por unidade por mês (com base no estoque mantido no final de cada mês) e o estoque inicial é de 3.000 unidades (produzido por um turno normal). A quantidade em estoque no final do mês 6 deve ser de pelo menos 2.000 unidades. A demanda pelo produto da empresa em cada um dos próximos seis meses é estimada como abaixo:

Mês	1	2	3	4	5	6
Demanda	6.000	6.500	7.500	7.000	6.000	6.000

Restrições de produção são tais que, se a empresa produz algo em um determinado mês, deve produzir pelo menos 2.000 unidades. Se a empresa quiser um plano de produção para os próximos seis meses que evite faltas do produto, formule seu problema como um programa inteiro.