Geralmente, temos três objetivos

i. Redução de custos (custos variáveis).
ii. Redução de capital (investimento, custos fixos).
iii. Melhoria do serviço (pode conflitar com os dois objetivos acima).

Se há um conjunto de pontos/nós dispersos com demandas, então, quais são os custos mínimos para fornecer os produtos a esses pontos/nós de demanda?

Algumas formas de modelar esse problema são:

1) caminho de custo mínimo;
2) *minimum spanning tree problems-MST*;
3) problemas de roteamento de veículo-*VRP*;
4) problemas de localização;
5) problemas de localização e roteamento.

0) Algumas definições

$N = \{1,2,\dots,n\}$: um conjunto finito de elementos chamados de nós ou vértices.

$E = \{1,2,\dots,m\}$: um conjunto de pares de nós (i,j) chamados de aresta.

Definição 1: $G = G(N,E)$ é chamado de grafo.

Definição 2: Grafo completo é o grafo que possui todas as ligações possíveis entre todos os nós.

Definição 3: Grafo orientado é um grafo onde as arestas são pares ordenados. Neste caso a aresta (i,j) é chamada de arco (i,j) onde i é o nó inicial e j o nó final do arco. Caso contrário o grafo é dito não orientado.

1) Caminho de custo mínimo

O problema do caminho mais curto "*shortest path problem*", consiste em encontrar o menor caminho entre dois nós. Assim, resolver este problema pode significar determinar o caminho entre dois nós com o custo mínimo, ou com o menor tempo de viagem.

→ ALGORITMOS: Dijkstra, Floyd

2) *Minimum spanning tree problems*-MST

O problema da mínima arborescência-MST é o de conectar n nós em uma rede sem ciclos[1] (árvore geradora) e com o mínimo de peso/custo total possível (árvore geradora mínima).

→ ALGORITMOS: Prim, Kruskall

3) Problemas de roteamento de veículos-VRP

Se ao realizamos uma entrega a n clientes usando apenas um único veículo, ou seja, a capacidade do veículo não é uma restrição, com o veículo retornando ao depósito após a entrega final, temos o problema do caixeiro viajante-TSP.

Se necessário mais de um veículo temos um problema de roteamento de veículos.

Dados:

- $G = (N, E)$ um grafo orientado completo
- $N = C \cup \{0\}$ o conjunto de nós, onde $C = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de clientes e 0 o depósito (nó de saída)
- $E = \{(i, j) \mid i, j \in N, i \neq j\}$ o conjunto de arcos de conexão entre os nós
  - c_{ij} → custo para percorrer o arco (i, j),l ou seja, custo de ir do nós i ao nó j
  - d_i → demanda do cliente i
  - K → número de veículos idênticos e capacidade Q localizados no depósito

Objetivo: O Problema de Roteamento de Veículos Capacitado-PRVC baseia-se em encontrar um número K de rotas com o objetivo de minimizar o custo total do transporte e atender as seguintes restrições:

i. Cada cliente pertence somente a uma rota;
ii. Cada rota inicia e termina no depósito;
iii. A demanda total de uma rota não pode exceder a capacidade do veículo.

[1] Ciclo é uma cadeia fechada em que nó inicial(final) coincide com o nó final(inicial). Cadeia é uma sequência de arcos sem considerar a orientação.

Formulação I (http://taurus.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306902/1/Alves_FernandoSilveira_M.pdf)

Variáveis: para todo veículo k e todo arco $(i, j) \in E$,

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \rightarrow x_{ijk} = 1 \text{ se o veículo k percorre a aresta } (i, j) \ \left(x_{ijk} \nexists \text{ para } i = j\right)$$

Função objetivo:

$$\min Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ijk}$$

Restrições:

i. O veículo k deve partir do depósito

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0jk} = 1, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

ii. O cliente j é designado a um único veículo k

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} x_{ijk} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

iii. Se o veículo k sai do nó i entçao ele entrou nesse nó

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ijk} = \sum_{j=0}^{n} x_{jik}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

iv. A demanda total da rota do veículo k não excede a sua capacidade Q

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} x_{ijk} \leq Q, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

v. Eliminação de sub-rotas isoladas da origem

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad S \subset C, \quad 2 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \ \forall k \in K$$

Exemplo: Seja $n = 9$, $Q = 50$, $K = 3$. As coordenadas geográficas dos 9 clientes são indicadas a seguir:

CLIENTE	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
x	16	23	40	9	97	78	20	71	64	50
y	32	1	65	77	71	24	26	98	55	50

CLIENTE	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Demanda	11	35	2	9	3	18	8	10	11

Cálculo das distâncias/custos entre as cidades:

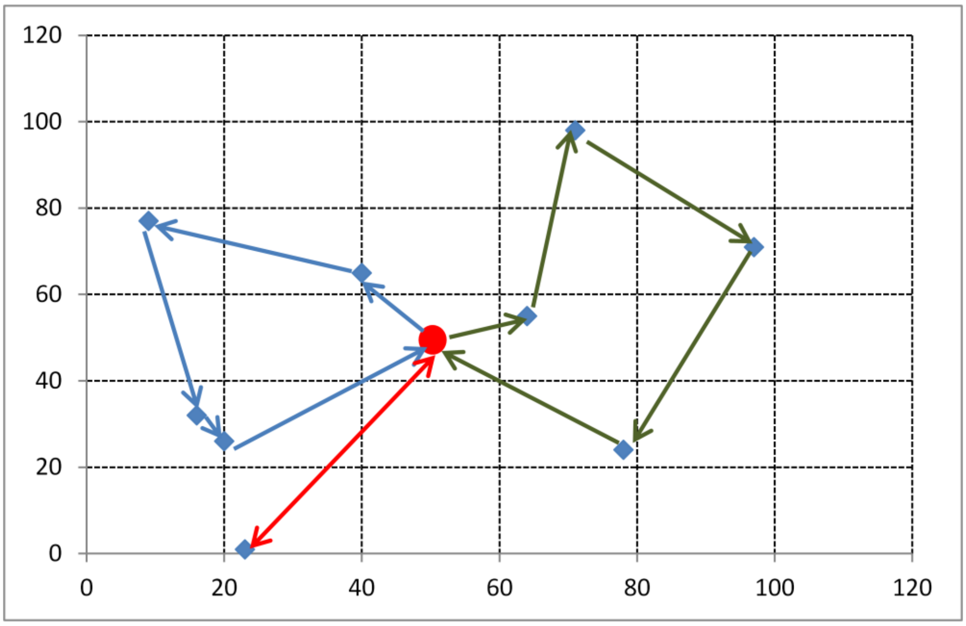
Custo	**0**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	38	52	18	49	51	38	38	52	14
2	38	0	34	40	45	89	62	7	85	53
3	52	34	0	64	79	95	51	27	104	62
4	18	40	64	0	33	57	55	43	45	26
5	49	45	79	33	0	88	87	52	65	59
6	51	89	95	57	88	0	50	89	37	36
7	38	62	51	55	87	50	0	58	74	34
8	38	7	27	43	52	89	58	0	88	52
9	52	85	104	45	65	37	74	88	0	43
10	14	53	62	26	59	36	34	52	43	0

Veículo 1: x(1,7,1)=x(7,6,1)=x(6,9,1)=x(9,10,1)=x(10,1,1)=1

Veículo 2: x(1,3,2)=x(3,1,2)=1

Veículo 3: x(1,4,3)=x(4,5,3)=x(5,2,3)=x(2,8,3)=x(8,1,3)=1

Custo total: 427



Formulação II – MTZ (http://www-bcf.usc.edu/~maged/publications/solvingRVRP-IIE.pdf)

Variáveis: para todo veículo k e todo arco $(i,j) \in E$,

$x_{ijk} \in \{0,1\} \rightarrow x_{ijk} = 1$ se o veículo k percorre a aresta (i,j) $\left(x_{ijk} \nexists \text{ para } i = j\right)$

$u_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ é a demanda acumulada no nó i

Função bjetivo:

$$\min Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ijk}$$

Restrições:

i. O veículo k deve partir do depósito

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0jk} = 1, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

ii. O cliente j é designado a um único veículo k

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{n} x_{ijk} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

iii. Se o veículo k sai do nó i então ele entrou nesse nó

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ijk} = \sum_{j=0}^{n} x_{jik}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

iv. A demanda total da rota do veículo k não excede a sua capacidade Q

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=0}^{n} x_{ijk} \leq Q, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

i. Eliminação de sub-rotas

$$u_j - u_i + Qx_{ij} \leq Q - d_j, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$d_j \leq u_i \leq Q, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Algoritmos heurísticos para resolver o VRP:

→ ALGORITMOS: Christofides, Clarke and Wright

4) Problemas de localização de facilidades (*Facility location problem*)

Normalmente, ao procurar um local para (instalar) uma facilidade, vários fatores desempenham um papel: localização dos fornecedores, localização dos clientes, regulamentos, salários, preços do solo, etc. Em muitos problemas de localização, assume-se que a localização ideal é aquela que minimiza a soma das distâncias para os nós. No entanto, existem outras versões de problemas de localização.

Os problemas resultantes são, entre outros: a) problema de **p-medianas** (*p-median*) e; b) problema simples de localização de planta - **p-centros** (*p-centers*).

a) **p-medianas** $\rightarrow$ localização de p facilidades e a designação de nós às facilidades de modo a *minimizar a soma das distâncias às facilidades*.

b) **p-centros** $\rightarrow$ localização de p facilidades e a designação de nós às facilidades de modo a *minimizar a distância máxima dos nós às facilidades*.

Geralmente são utilizados/conhecidos os seguintes dados:

$J \rightarrow$ conjunto de n nós que representam clientes, $j = 1, \dots, n$

$I \rightarrow$ conjunto de m nós que representam os locais candidatos à localização de facilidades, $i = 1, \dots, m$, $m \ll n$

$q_j \rightarrow$ demanda do cliente j

$d_{ij} \rightarrow$ distância do cliente j à facilidade localizada em i

$c_{ij} \rightarrow$ custo de atender a demanda q_j a partir da facilidade localizada em i

$f_i \rightarrow$ custo fixo de instalação da facilidade em i

$Q_i \rightarrow$ capacidade da facilidade localizada em i

a) Modelo matemático de p-medianas (*minisum problem*)

Deseja-se localizar/instalar um número pré-especificado de unidades de serviço, de modo a minimizar a soma das distâncias das mesmas até seus usuários.

Localização de p facilidades e a designação de clientes às facilidades de modo a <u>minimizar a soma das distâncias (distância total) às facilidades</u>.

i. A demanda de um cliente é atendida por uma única facilidade (mediana)

ii. Todo cliente deve ser servido pela facilidade mais próxima

<u>Dados (*Uncapacitated facility location*)</u>:

$c_{ij} \rightarrow$ custo para designar o cliente j à facilidade i

$p \rightarrow$ número de facilidades a serem instaladas

Variáveis:

$y_i \in \{0,1\} \rightarrow y_i = 1$ se a facilidade é instalada no local i

$x_{ij} \in \{0,1\} \rightarrow x_{ij} = 1$ se o cliente j for designado à facilidade i

Função objetivo

$$\min Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ij} x_{ij}$$

Restrições

i. O cliente j só é atendido pela facilidade i

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = 1, \forall j \in J$$

ii. o cliente j não pode ser designado à facilidade i se ela não for instalada

$$x_{ij} \leq y_i \ \forall i \in I, \forall j \in J$$

iii. p facilidades deverão ser instaladas

$$\sum_{i=1}^{I} y_i = p$$

b) Modelo matemático de p-centros (*minimax problem*)

Deseja-se instalar um posto de serviço (pronto socorro, unidade do corpo de bombeiros, posto policial) para servir diversas comunidades. Este posto deve ser instalado numa dessas comunidades. O objetivo é minimizar a distância entre o posto de serviço e a comunidade mais distante, isto é, otimizar o pior caso.

Localização de p facilidades e a designação de clientes às facilidades de modo a minimizar a máxima distância de clientes às facilidades.

Nova variável: $r \rightarrow$ distância máxima permitida de um cliente a uma facilidade

Nova função objetivo: $\min Z = r$

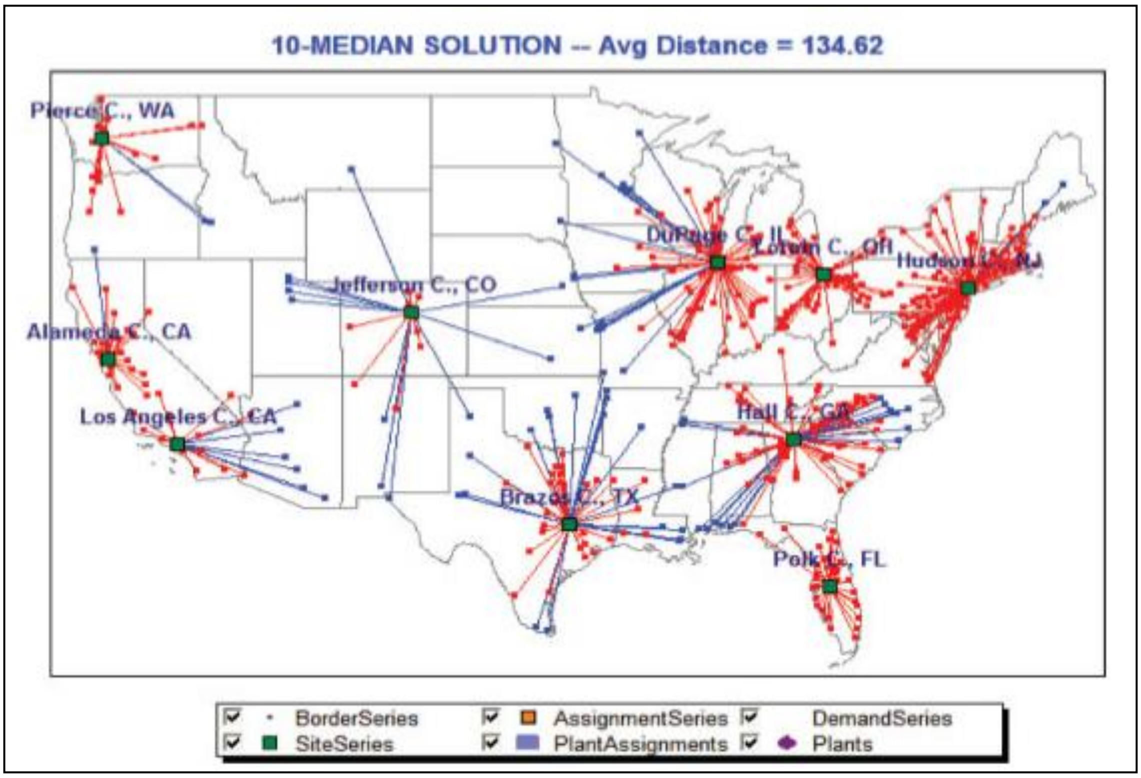
Restrição adicional (ao problema de p-medianas):

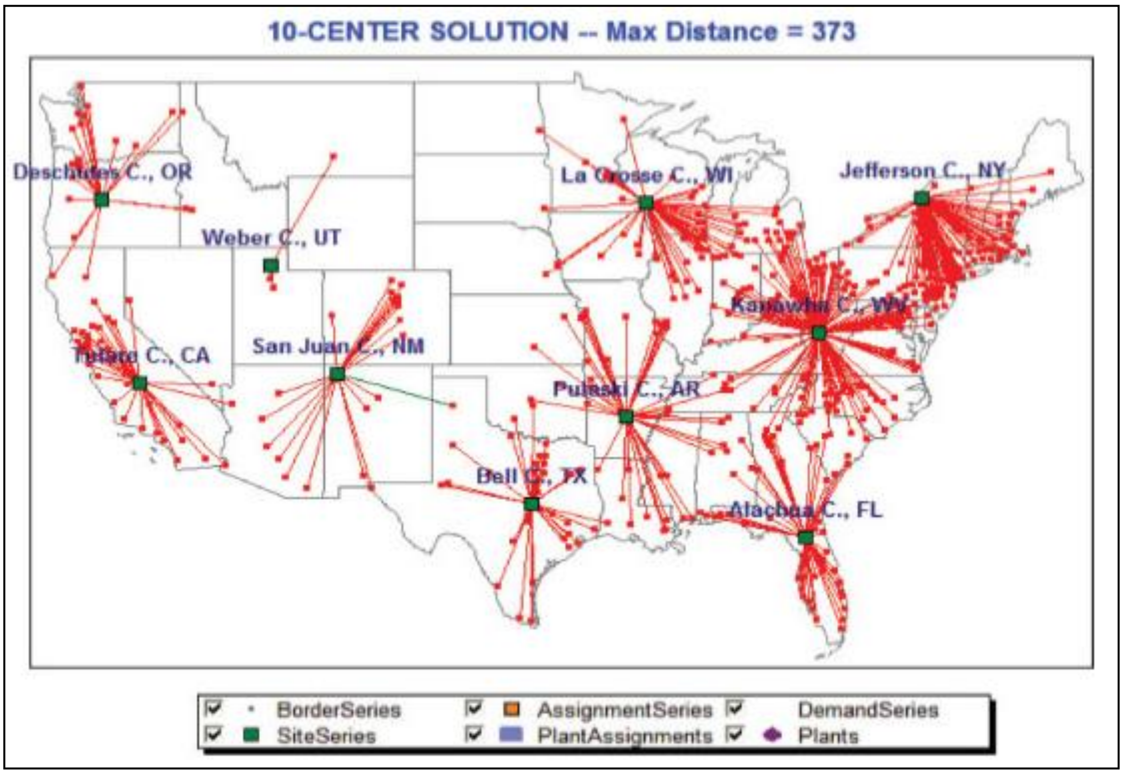
$$\sum_{i=1}^{I} d_{ij} x_{ij} \leq r, \forall j \in J$$

Uma extensão é permitir locais de modo que cada nó de demanda esteja no máximo M quilômetros de uma instalação (problemas de cobertura). Outra extensão é levar em conta o roteamento ao localizar instalações: localização e roteamento.

Tanto o problema de p-medianas quanto o problema de p-centros, formulados como problemas de otimização, pertencem à classe dos NP-hard. Problemas dessa classe são pelo menos tão difíceis, nos termos de complexidade algorítmica, quanto qualquer outro problema da classe NP. Mais detalhes sobre complexidade podem ser encontrados em https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/NPcompleto.html.

Comparações





https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2455219/mod_resource/content/1/Daskin_Location_Modeling.pdf

5) Problemas de localização e roteamento-LRP

Em alguns casos, as entregas a múltiplos nós de demanda podem ser combinadas em tours de entrega única (venda ambulante). Então vale a pena decidir simultaneamente sobre localização e rota. É necessário decidir em conjunto, porque se não levar o roteamento em conta na fase de localização, a localização da facilidade pode ser (muito) subótima.

O *Location-Routing Problem*-LRP é um problema muito complexo. Os métodos exatos geralmente são muito lentos. Heurísticas hierárquicas (localização primeiro, depois roteamento), por exemplo, agrupar primeiro, rotear depois, são muito utilizadas.