Pesquisa Operacional II

Aula 02

Programação Linear Inteira

(Introdução)

Profª Ana Cristina Girão e Silva
(anacrisges@yahoo.com.br)

Roteiro

- Tipos de Problemas de Programação Linear Inteira: PLIP, PLIB e PLIM;
- Espaço contínuo × Espaço inteiro;
- Questões sobre arredondamento;
- Problemas que podem ser formulados por PLI;
- Exemplo de um PIB

Tipos de Problemas de PLI

Programação Linear Inteira Pura (PLIP)

Modelo linear só com variáveis inteiras

Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

Modelo linear com variáveis inteiras e contínuas

Programação Linear Inteira Binária (PLIB)

Modelo linear só com variáveis binárias

Forma geral de um PLI misto: MIP

$$\text{min ou max} \quad z = cx + hy$$

(MIP)

$$\text{s. a.} \quad Ax + Gy \leq b$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}},\ y \in \mathrm{Z}^{\mathrm{p}}$$

- Dimensões: $A : m \times n$ $\quad G : m \times p$ $\quad x : n \times 1$

  $c : 1 \times n$ $\quad h : 1 \times p$ $\quad y : p \times 1$

  $b : m \times 1$

- PLI puro: Só existem as variáveis *y*.

- PLI 0-1 ou binário: Todas as variáveis assumem valores 0 ou 1, ou seja, $y \in \mathrm{B}^{\mathrm{p}}$.

Problemas de Programação Linear Inteira

Exemplo

O problema da confeitaria

Uma confeitaria produz dois tipos de bolos: chocolate e creme. Cada lote de bolo de chocolate é vendido com um lucro de 3 u.m. e os lotes de creme com um lucro de 1 u.m. Contratos com várias lojas impõem que sejam produzidos no mínimo 10 lotes de bolos de chocolate por dia e que o total de bolos fabricados nunca seja menor que 20. O mercado só é capaz de consumir até 40 lotes de bolos de creme e 60 de chocolate. As máquinas de preparação dos bolos disponibilizam 180 horas de operação, sendo que cada lote de bolo de chocolate consome 2 horas de trabalho e cada lote de bolos de creme 3 horas. Determinar o esquema de produção que maximize os lucros com a venda dos bolos.

Resolução:

1. Escolha da variável de decisão:

$x_i \equiv$ quantidade de lotes de bolos de creme (i=1) e quantidade de lotes de bolos de chocolate (i=2).

2. Elaboração da função objetivo: Maximizar $z = x_1 + 3x_2$

Problemas de Programação Linear Inteira

Resolução (cont.):

Imagine, por exemplo, que os lotes contém 5 bolos.
Então uma solução em que

x_1=10,50 e x_2= 20,25

corresponderá a uma produção de

52,5 bolos de creme e **101,25** bolos de chocolate.

Acrescentaremos a **condição de integralidade** ao modelo a fim de evitarmos o aparecimento de soluções contínuas.

Problemas de Programação Linear Inteira

Resolução (cont.):

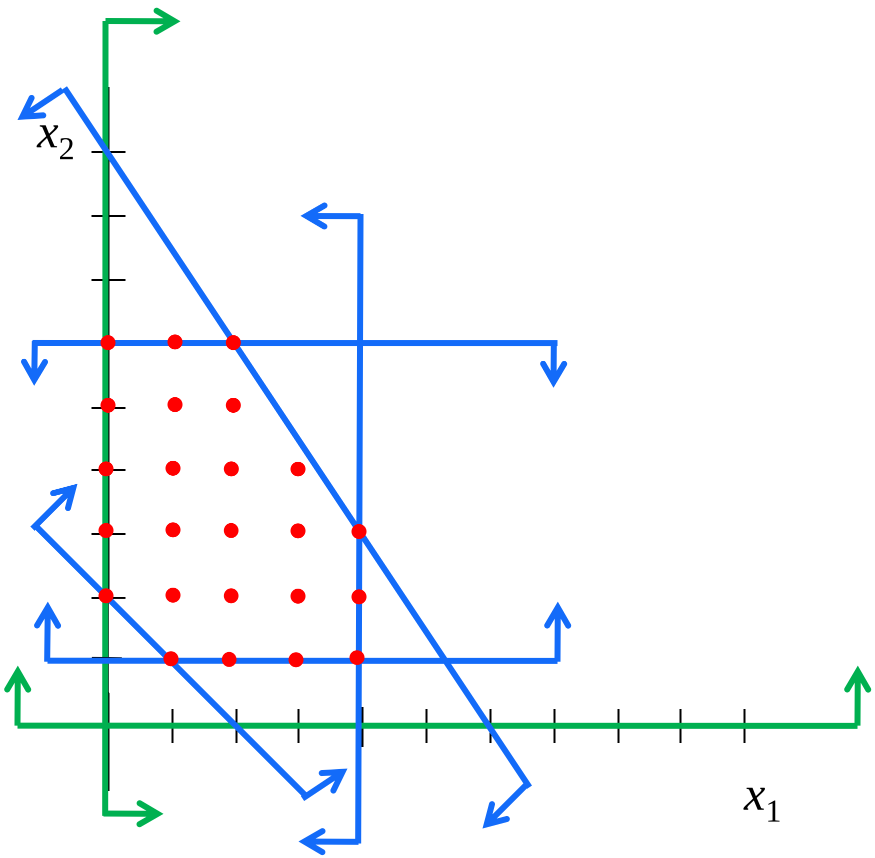
$$\max z = x_1 + 3x_2$$

s. a.:

restrições tecnológicas

$$\begin{cases} x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 60 \\ x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \end{cases}$$

$$\underbrace{x_1, x_2 \geq 0}_{\text{restrição não-negatividade}} \text{ e } \underbrace{x_1, x_2 \in Z}_{\text{restrição integralidade}}$$



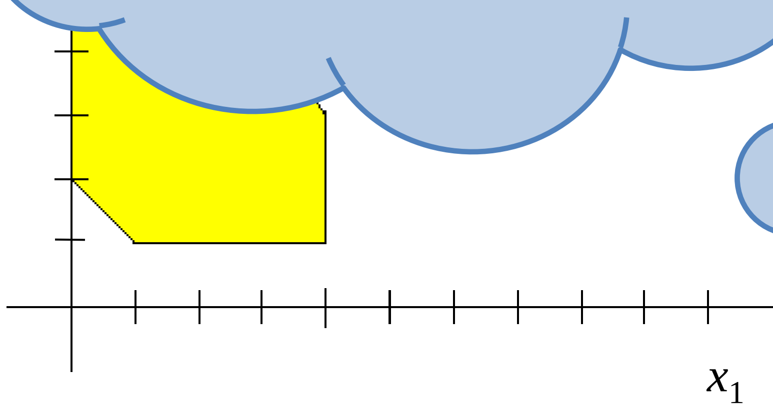
PL x PLI

Espaço Contínuo x Espaço Inteiro

Espaço Contínuo

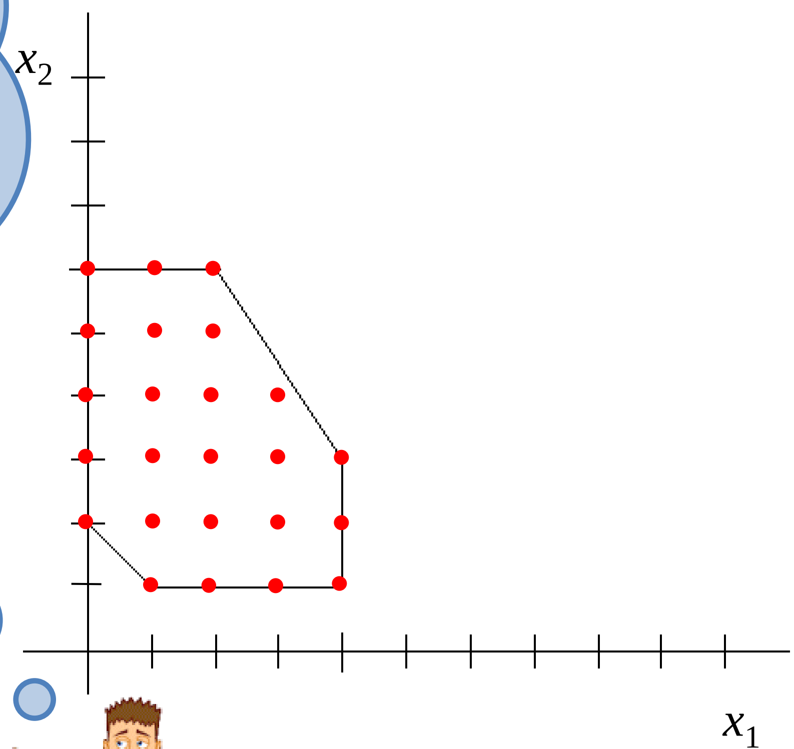
Númer

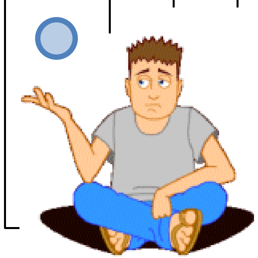
Parece fácil resolver um problema de PLI pois tem menos soluções viáveis para procurar o ótimo.



Espaço Inteiro

Número finito de pontos (24 no caso) "candidatos" a ponto ótimo.





PL x PLI
Espaço Contínuo x Espaço Inteiro

Um número finito de soluções viáveis garante que o problema seja de fácil resolução?

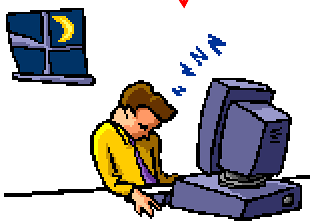
Não. Números finitos podem ser astronomicamente grandes.

Exemplo:

PLIB com n variáveis de decisão.

$\mathbf{2^n}$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$\vdots$
$2^{30} = 1.073.741.824$
$\vdots$

Explosão combinatória



A eliminação de algumas soluções viáveis (aquelas contínuas) de um problema de programação linear o tornará mais fácil de ser resolvido?

Não. É exatamente por todas essas soluções viáveis estarem lá presentes que garantem que existirá uma solução viável em ponto extremo (FPE), e portanto uma solução viável básica (VB) que é ótima para o problema. Essa garantia é o segredo do método simplex.

Problemas de Programação Linear Inteira

Resolução (cont.):

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

s. a.:

$$x_1 \leq 40$$

$$x_2 \leq 60$$

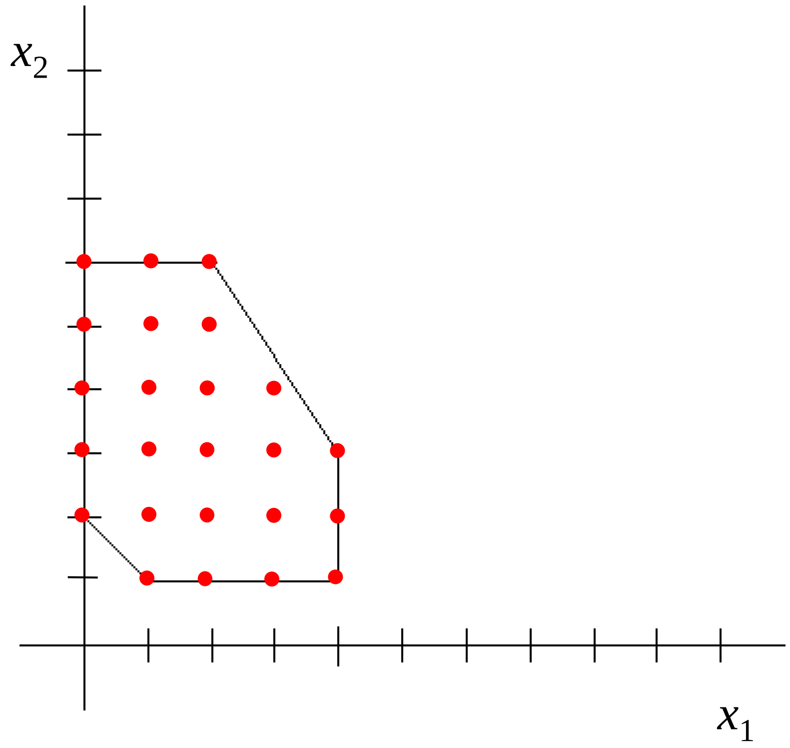
$$x_2 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e } \cancel{x_1, x_2 \in Z}$$

relaxamento da condição de integralidade



Problemas de Programação Linear Inteira

Resolução (cont.):

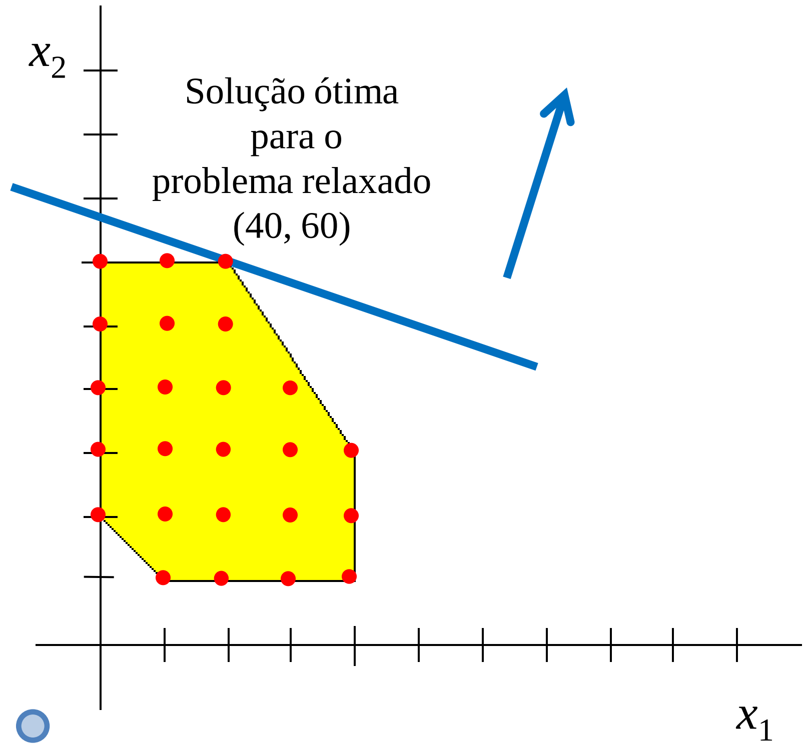
$$\max z = x_1 + 3x_2$$

s. a.:

Que sorte!
A solução que encontrei para o problema relaxado é inteira.

$x_1, x_2 \geq 0$ e $\cancel{x_1, x_2 \in Z}$

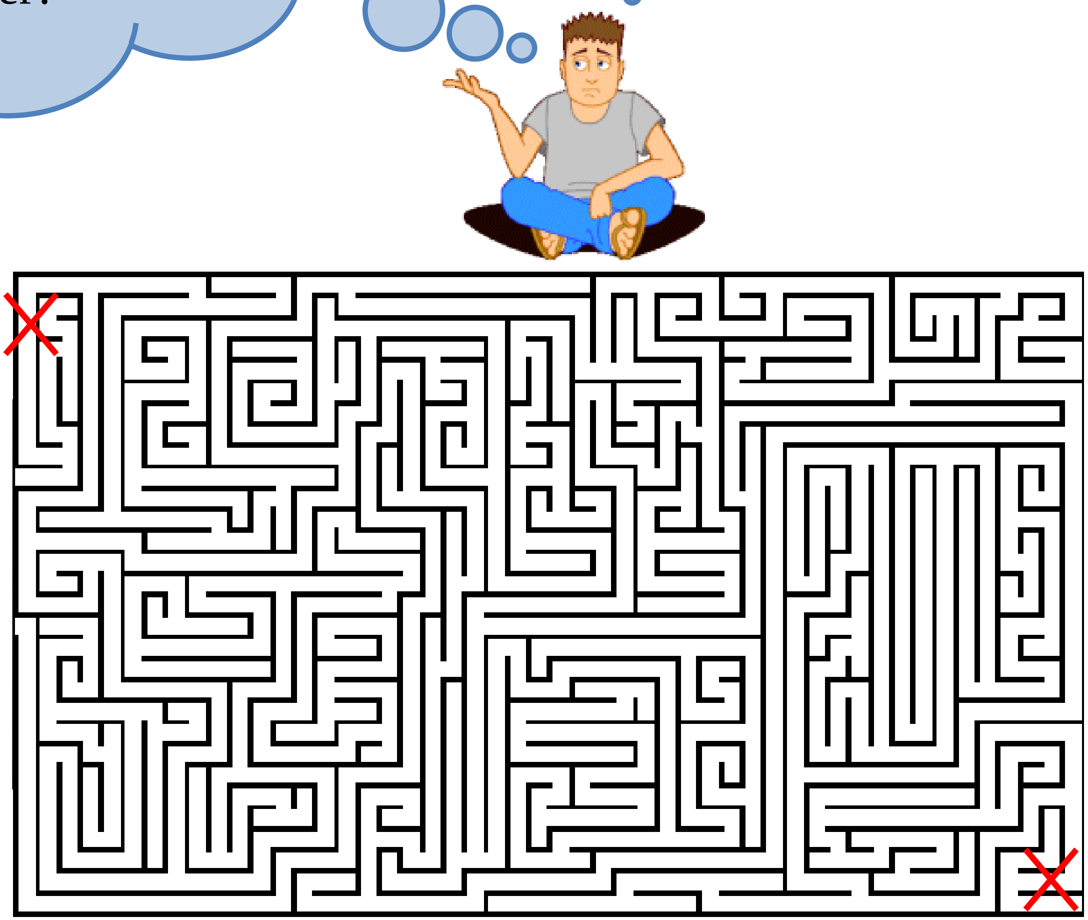
relaxamento da condição de integralidade



Problemas de Programação Linear Inteira

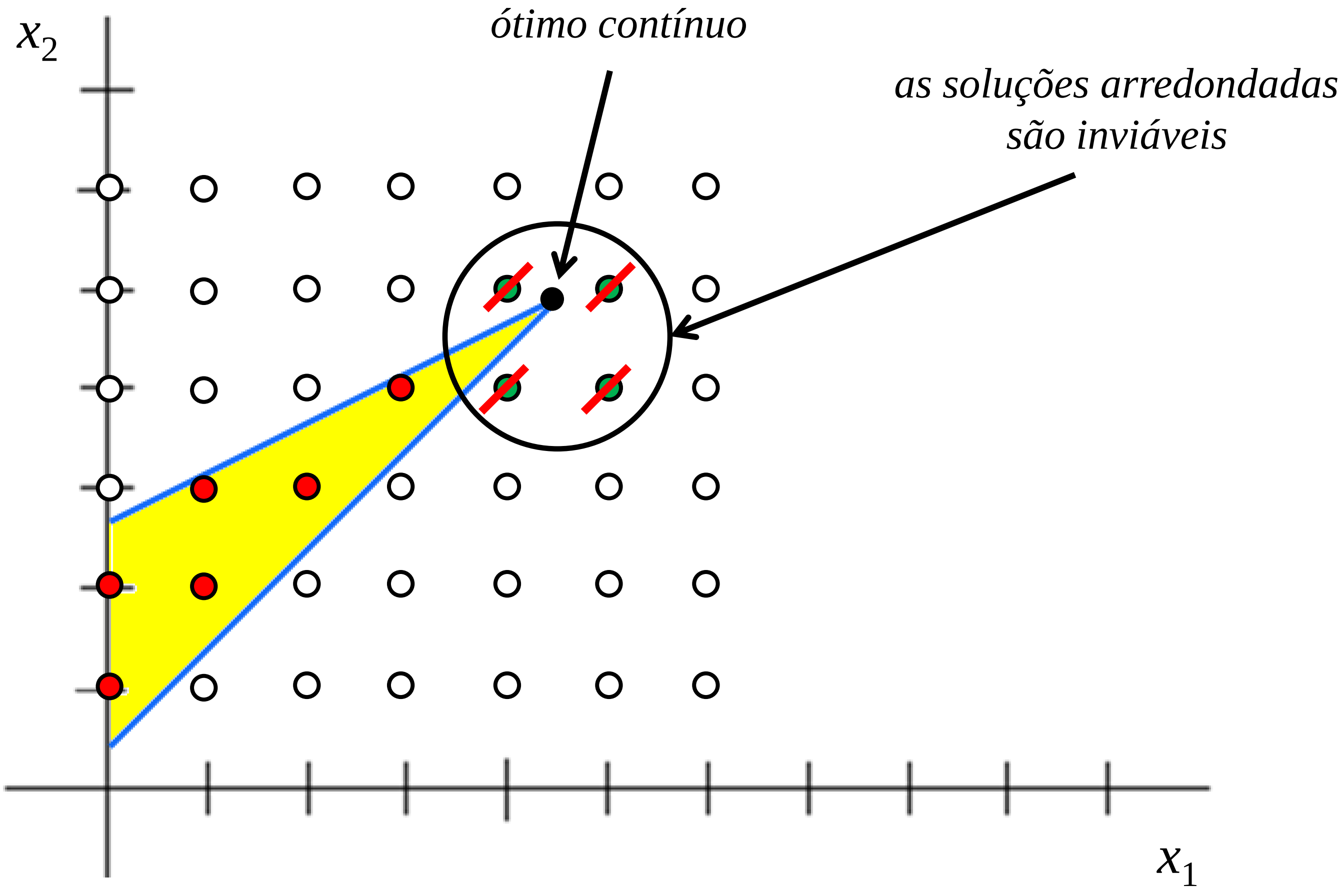
Mas e se a solução ótima (do problema relaxado) não for inteira e sim uma solução contínua, como resolver?

Arredondando o ótimo contínuo?



E se aplicarmos o método simplex sobre o problema relaxado e depois arredondarmos a solução encontrada?

Situação 1) Uma solução ótima para programação linear não é necessariamente viável após ter sido arredondada.



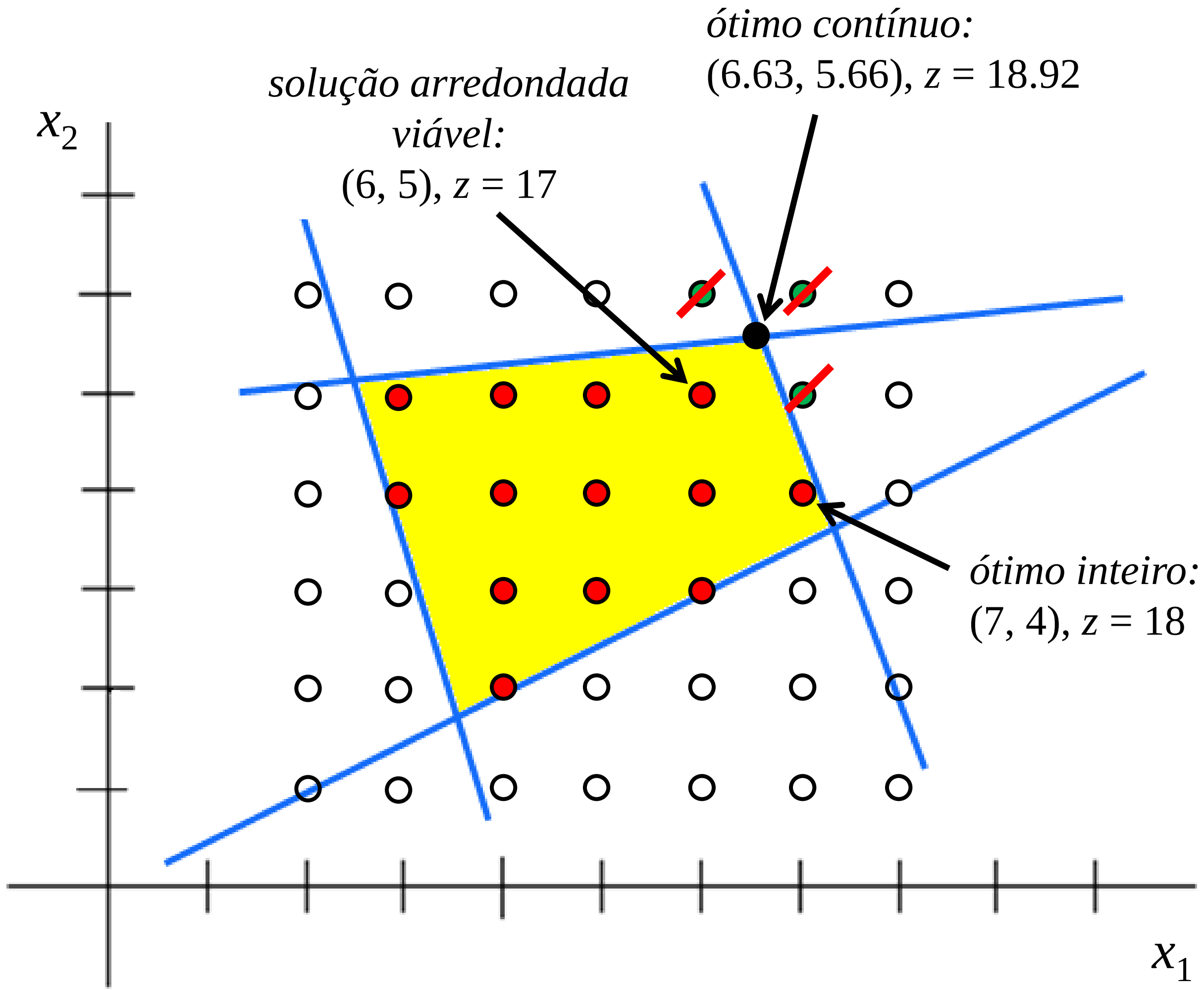
E se aplicarmos o método simplex sobre o problema relaxado e depois arredondarmos a solução encontrada?

Situação 2) Caso a solução arredondada seja viável não há garantia de que ela será a solução ótima inteira.

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

s. a.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 &\geq 40 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 70 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 50 \\ x_1,\ x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Problemas que podem ser formulados por PLI

- Montagem de tabelas de horários: aulas em escolas, viagens de ônibus, etc.
- Montagem de escalas de trabalhos: enfermarias de hospitais, tripulações de aviões, etc.
- Planejamento de produção: sequenciamento de máquinas, controle de estoques, etc
- Telecomunicações: localização de antenas de celulares, planejamento de expansão de redes telefônicas, etc
- Roteamento: logística de distribuição, caminhos mais curtos, etc
- Projetos de circuitos integrados: *routing* e *placement*
- ...

PLIB

A CALIFORNIA MANUFACTURING COMPANY está considerando a possibilidade de se expandir com a construção de uma nova fábrica em Los Angeles ou então em São Francisco, ou quem sabe, até mesmo em ambas as cidades. Ela também está considerando a possibilidade de construir um novo depósito, mas a escolha do local está restrita a uma cidade na qual a fábrica será construída. O *valor presente líquido* (rentabilidade total considerando-se o valor temporal do dinheiro) de cada uma dessas alternativas é mostrado na quarta coluna da tabela abaixo. A coluna mais à direita fornece o capital necessário (já incluído o valor presente líquido) para os respectivos investimentos, em que o capital total disponível é de U$$ 10 milhões. O objetivo é encontrar a combinação de alternativas que maximize o valor presente líquido total.

Decisão Número	Pergunta Sim-ou-Não	Variável de Decisão	Valor Presente Líquido (U$$)	Capital Exigido (U$$)
1	Construir a fábrica em Los Angeles?	x_1	9 milhões	6milhões
2	Construir a fábrica em São Francisco?	x_2	5 milhões	3 milhões
3	Construir o depósito em Los Angeles?	x_3	6 milhões	5 milhões
4	Construir o depósito em São Francisco?	x_4	4 milhões	2 milhões
				Capital disponível: U$$ 10 milhões

Exemplo-Protótipo

Modelo PIB

Variáveis de decisão: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se a decisão } j \text{ for sim} \\ 0 & \text{se a decisão } j \text{ for não,} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$

x_3 e x_4 são alternativas mutuamente exclusivas

$$\max \ z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Função Objetivo

Suj. a:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$

$$\boxed{x_3 + x_4 \le 1}$$

$$\boxed{x_3 \le x_1}$$

ou

$$\boxed{x_4 \le x_2}$$

$$x_j \le 1$$

$$x_j \ge 0$$

$$x_j \text{ é inteira, para } j = 1, 2, 3, 4.$$

Restrições

Decisões contingentes (dependem de decisões anteriores)

Exemplo-Protótipo

Modelo PIB

Variáveis de decisão: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se a decisão } j \text{ for sim} \\ 0 & \text{se a decisão } j \text{ for não,} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$

$$\max \ z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Função Objetivo

Suj. a:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 + x_3 &\leq 0 \\ -x_2 + x_4 &\leq 0 \\ x_j \text{ é binária, para } j &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Restrições

Programação Linear Inteira

Visão Geral dos Métodos de Resolução

Técnicas de Enumeração:

- Partição e avaliação progressiva ou *Branch-and-Bound* (B&B)
- Enumeração: Implícita
- Restrições Sogorrate

Técnicas de Cortes:

- Cortes Inteiros (primais e duais)
- Cortes combinatórios
- Cortes de interseção
- Método de decomposição de Benders

Técnicas Híbridas:

- *Branch-and-Cut*
- Teoria de Grupo