

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Pesquisa Operacional II

Sujeito a

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

Aula 03

Programação Linear Inteira

Branch-and-Bound

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

Prof^a Ana Cristina Girão e Silva
(anacrisges@yahoo.com.br)



$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

-
-
-

$$a_mx_1 + a_mx_2 + \dots + a_mx_n = b_m$$

Programação Linear Inteira

Visão Geral dos Métodos de Resolução

Técnicas de Enumeração:

- Partição e avaliação progressiva ou *Branch-and-Bound* (B&B)
- Enumeração: Implícita
- Restrições Sogorrate

Técnicas de Cortes:

- Cortes Inteiros (primais e duais)
- Cortes combinatórios
- Cortes de interseção
- Método de decomposição de Benders

Técnicas Híbridas:

- *Branch-and-Cut*
- Teoria de Grupo

Branch-and-Bound (B&B)

(Partição e Avaliação Progressiva)

- ✓ Idéia: desenvolver uma enumeração inteligente dos pontos candidatos à solução ótima inteira.
- ✓ O termo *branch* refere-se à realização de partições no espaço de soluções.
- ✓ A aplicação de *bound* limita as partições a fazer.

Branch-and-Bound (B&B)

Ponto inicial: Relaxar a integralidade

Problema original

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. a.: } x_1 \leq 40$$

$$x_2 \leq 60$$

$$x_2 \geq 10$$

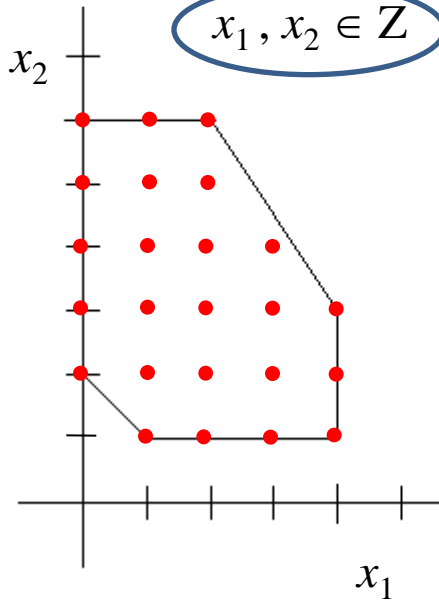
$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

PLI



Esquecer a condição de integralidade

Problema relaxado

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. a.: } x_1 \leq 40$$

$$x_2 \leq 60$$

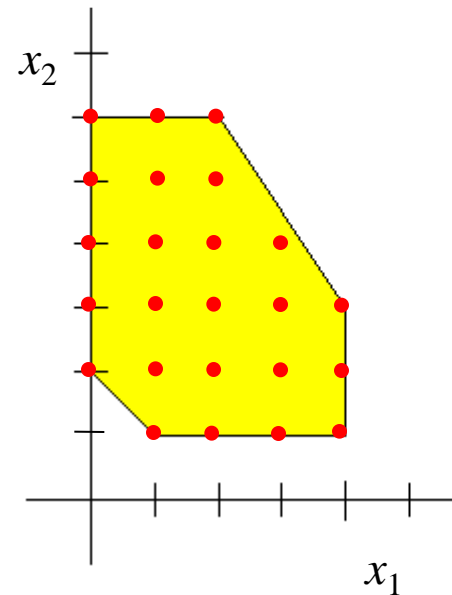
$$x_2 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 20$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

PL



Sobre o Problema Relaxado

Se o problema relaxado é impossível

então

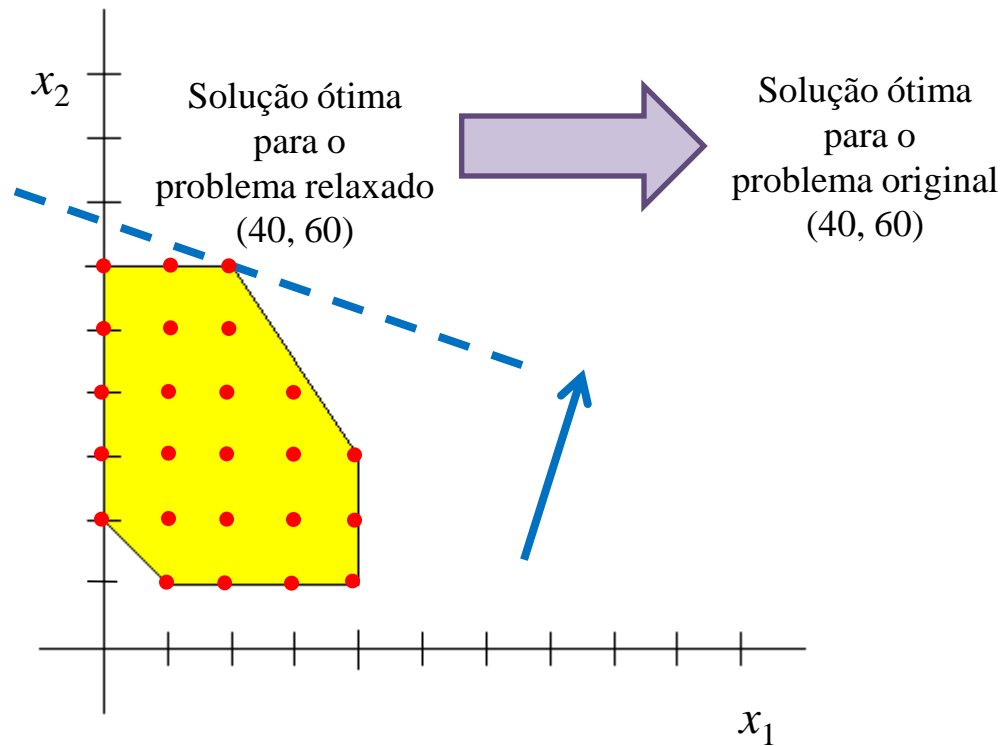
o problema original é impossível

Se a solução ótima do problema relaxado for viável para o problema original

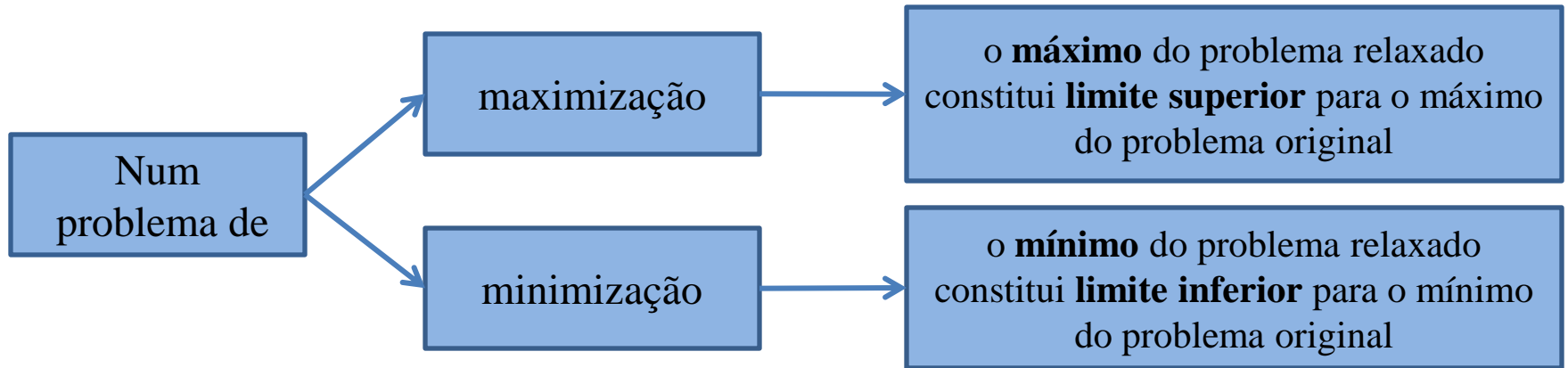
então

será ótima para o problema original

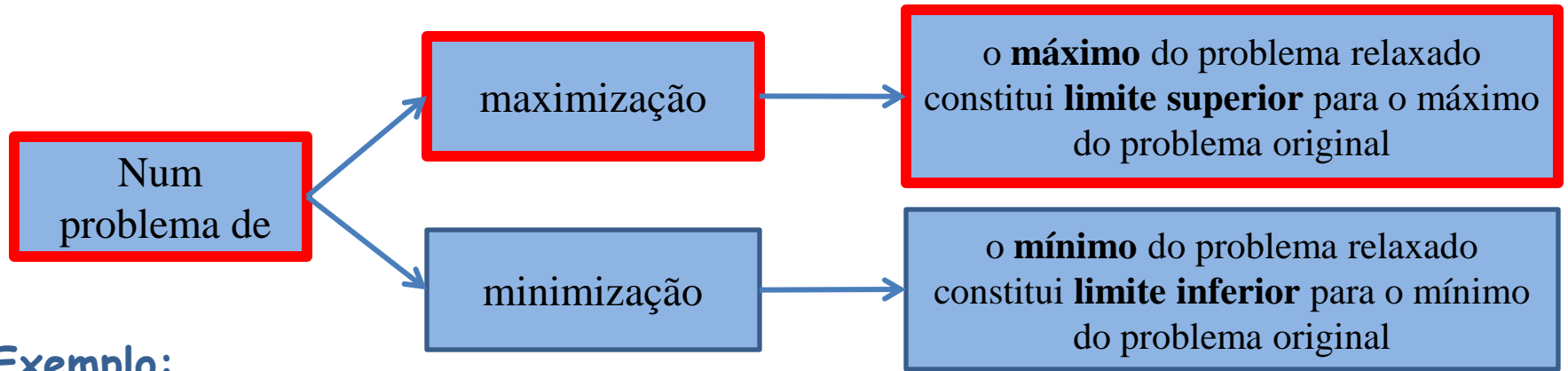
Exemplo:



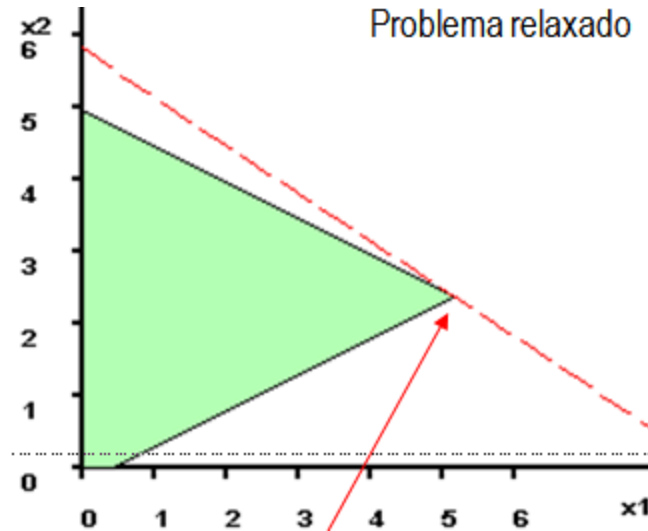
Sobre o Problema Relaxado



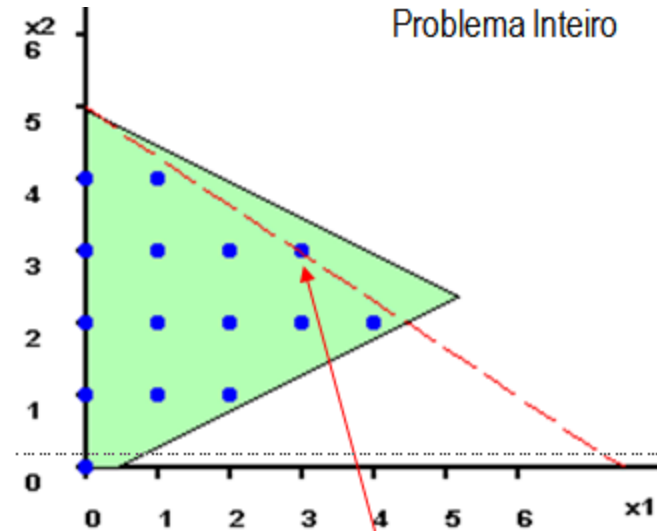
Sobre o Problema Relaxado



Exemplo:



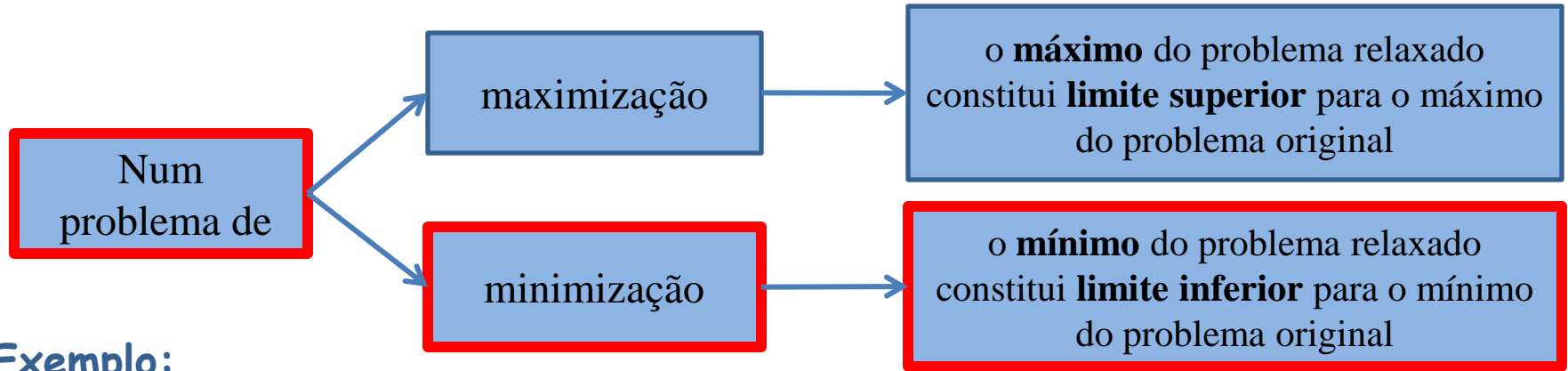
ótimo $x_1=5.2; x_2=2.38$
 $\text{Max } f(X)=8.77$



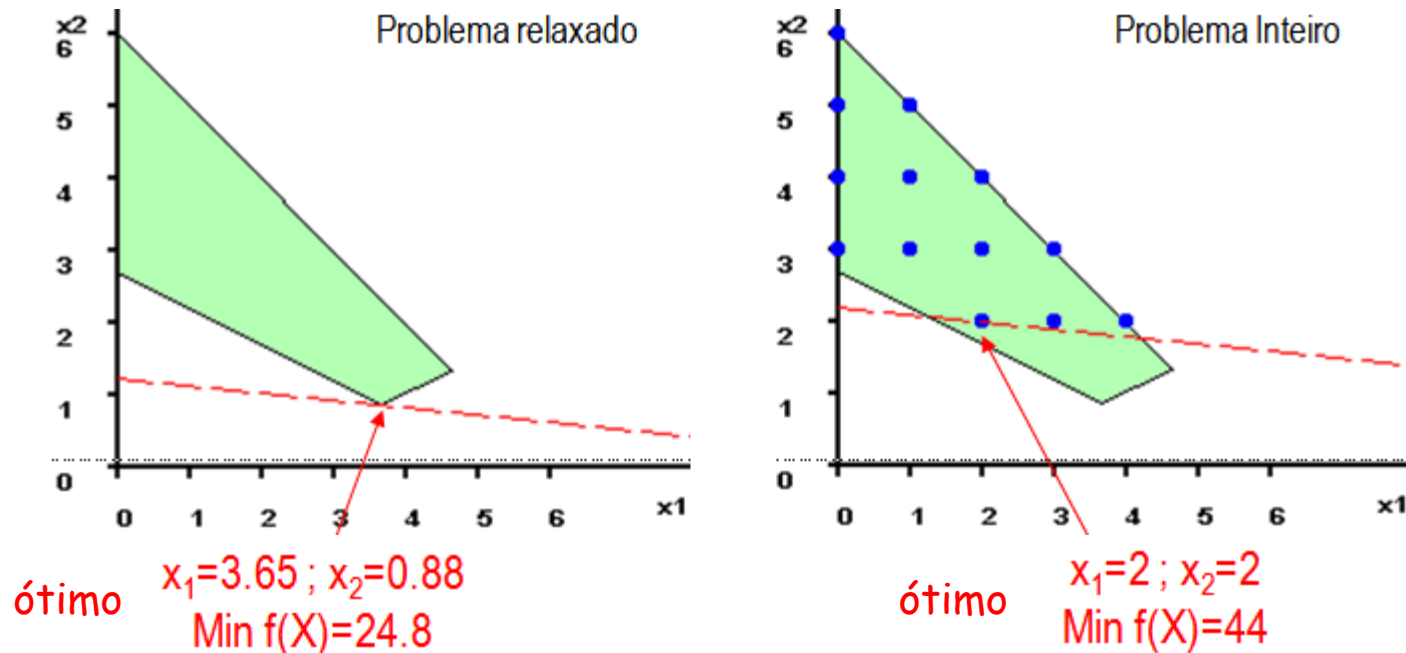
ótimo $x_1=3; x_2=3$
 $\text{Max } f(X)=7.5$

Máximo de $f(X)$ do PLIP é ≤ 8.77

Sobre o Problema Relaxado



Exemplo:

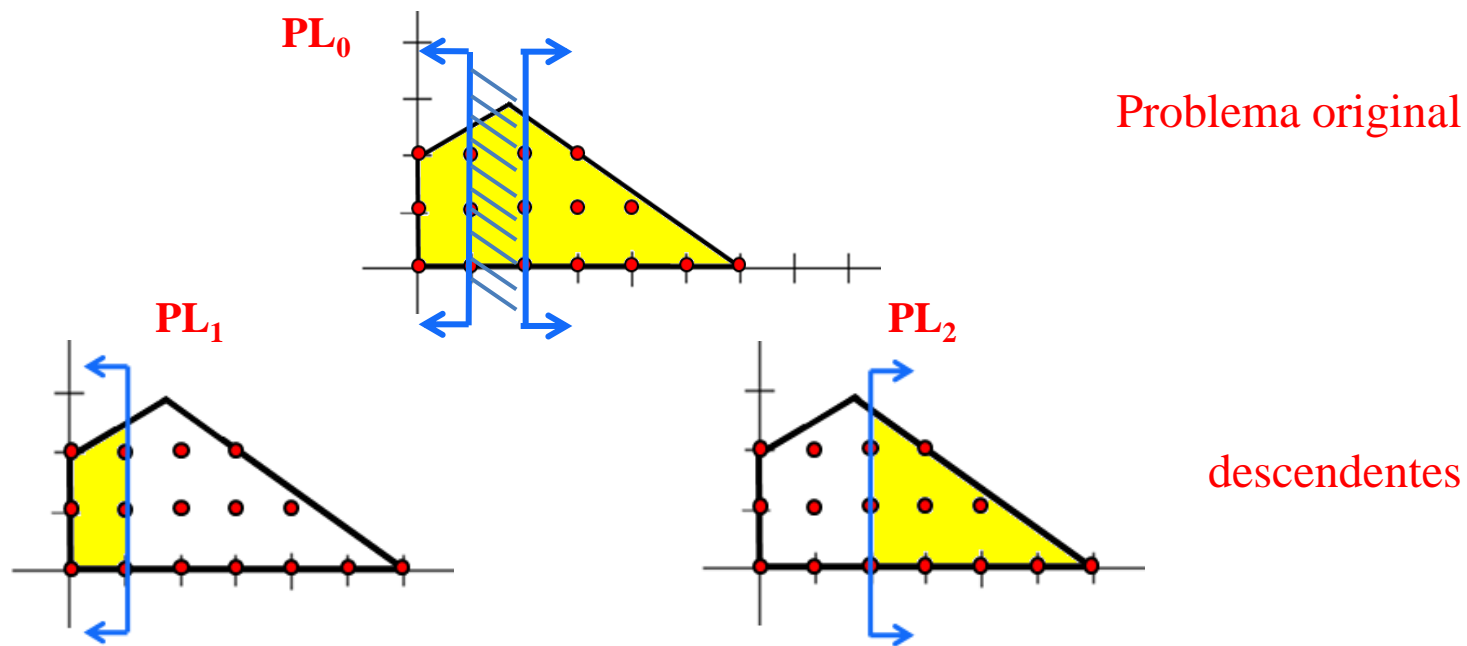


Mínimo de $f(X)$ do PLIP é ≥ 24.8

Branch-and-Bound (B&B)

Branch (Particionar)

Passagem a subproblemas ou descendentes do problema original.



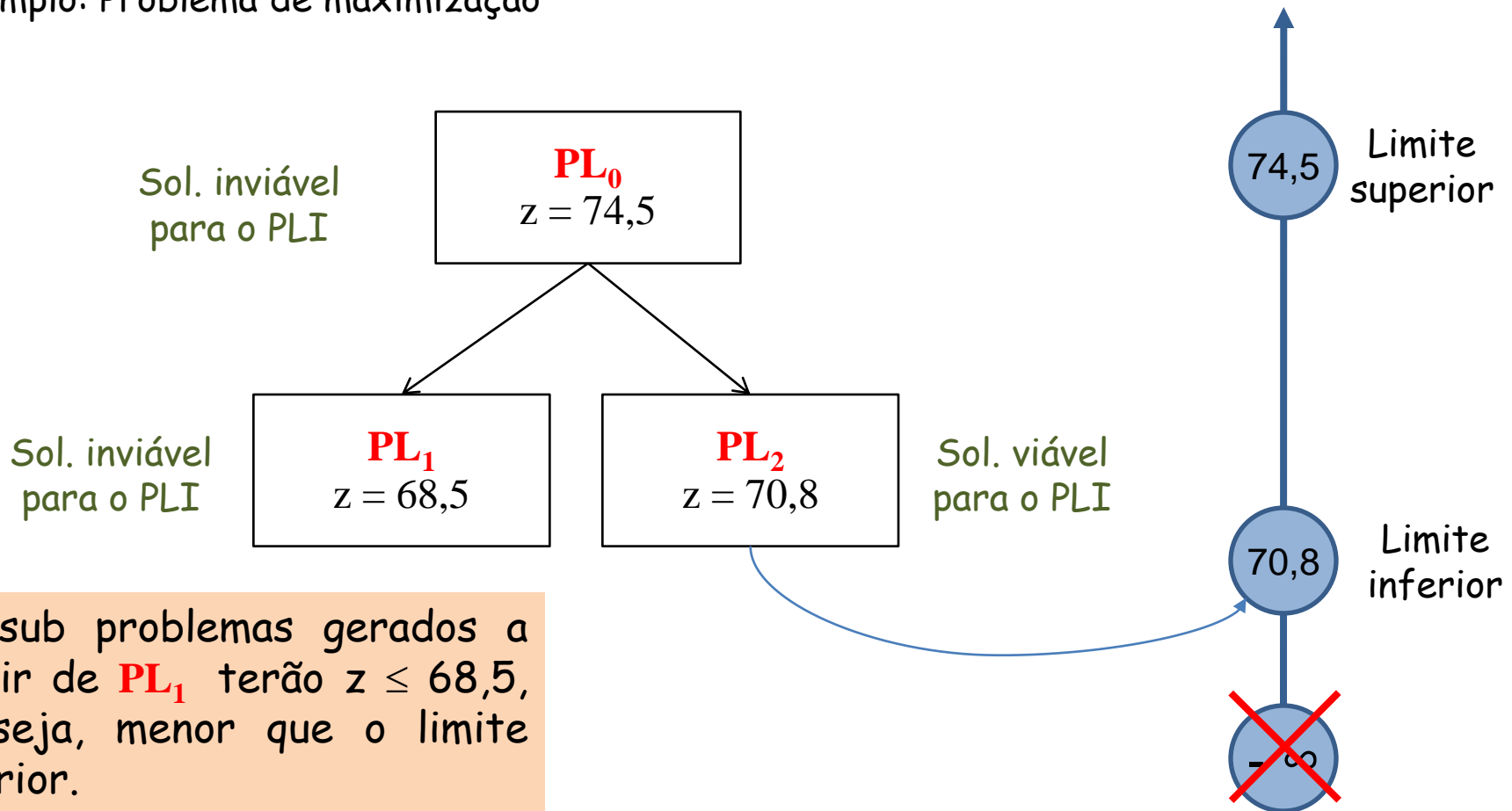
✓ Qualquer solução viável do problema original é solução viável de apenas um dos problemas descendentes.

✓ Qualquer solução viável de um descendente é solução viável do problema original.

Branch-and-Bound (B&B)

Bound (Limitar)

Exemplo: Problema de maximização

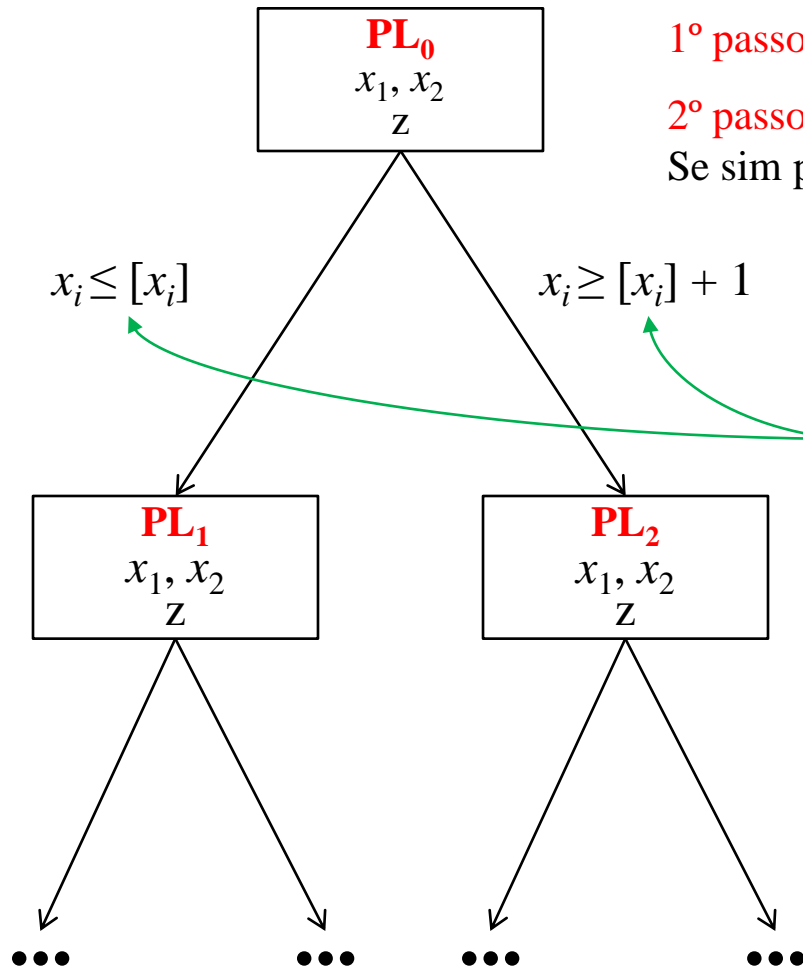


Os sub problemas gerados a partir de **PL₁** terão $z \leq 68,5$, ou seja, menor que o limite inferior.

Conclusão: Não se faz partição nesse sub problema.

Branch-and-Bound (B&B)

Visão Geral do Método



1º passo) Encontrar o ótimo para o problema relaxado.

2º passo) Avaliar: O problema é impossível? A solução é inteira? Se sim pare, senão...

3º passo) Realizar partição na variável contínua x_i onde $i=1$ ou $i=2$. Quer dizer que novos problemas, os descendentes, surgirão a partir da inclusão de novas restrições ao modelo.

4º passo) Encontrar o ótimo para o problema relaxado e avaliar ...

5º passo) Particionar ...

6º passo) Encontrar o ótimo para o problema relaxado e avaliar ...

Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 1 - Partição de PL_0 em x_2

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

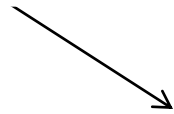
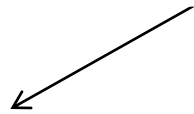
s. a.:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

~~$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$~~



PL₁

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

s. a.:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$x_2 \leq 2$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

~~$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$~~

PL₂

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

s. a.:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$x_2 \geq 3$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

~~$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$~~

PL₀

$$x_1 = 12/7, x_2 = 20/7$$
$$z = 90/7$$

$$x_2 \leq [20/7]$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq [20/7] + 1$$

$$x_2 \geq 3$$

click aqui
ver o gráfico

PL₁

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$
$$z = 11$$

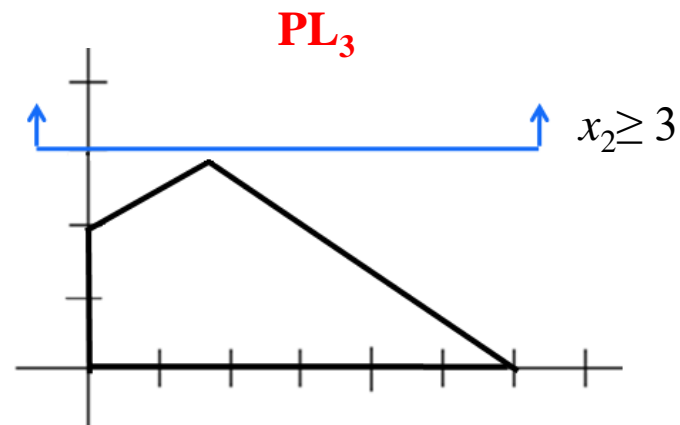
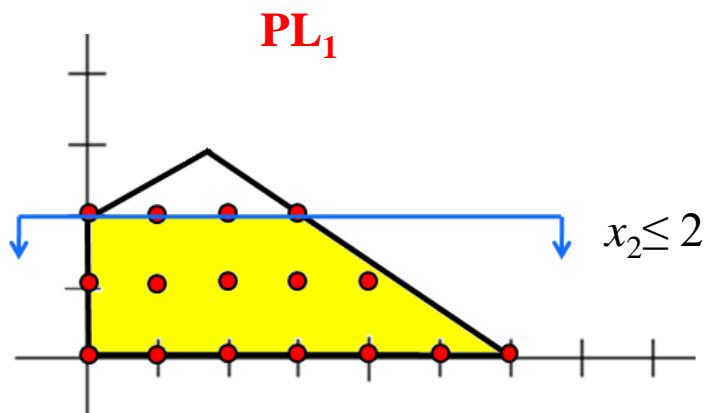
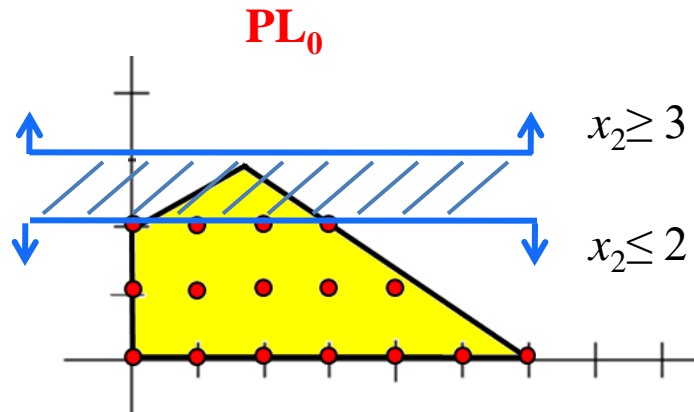
ótimo inteiro

PL₂

Impossível

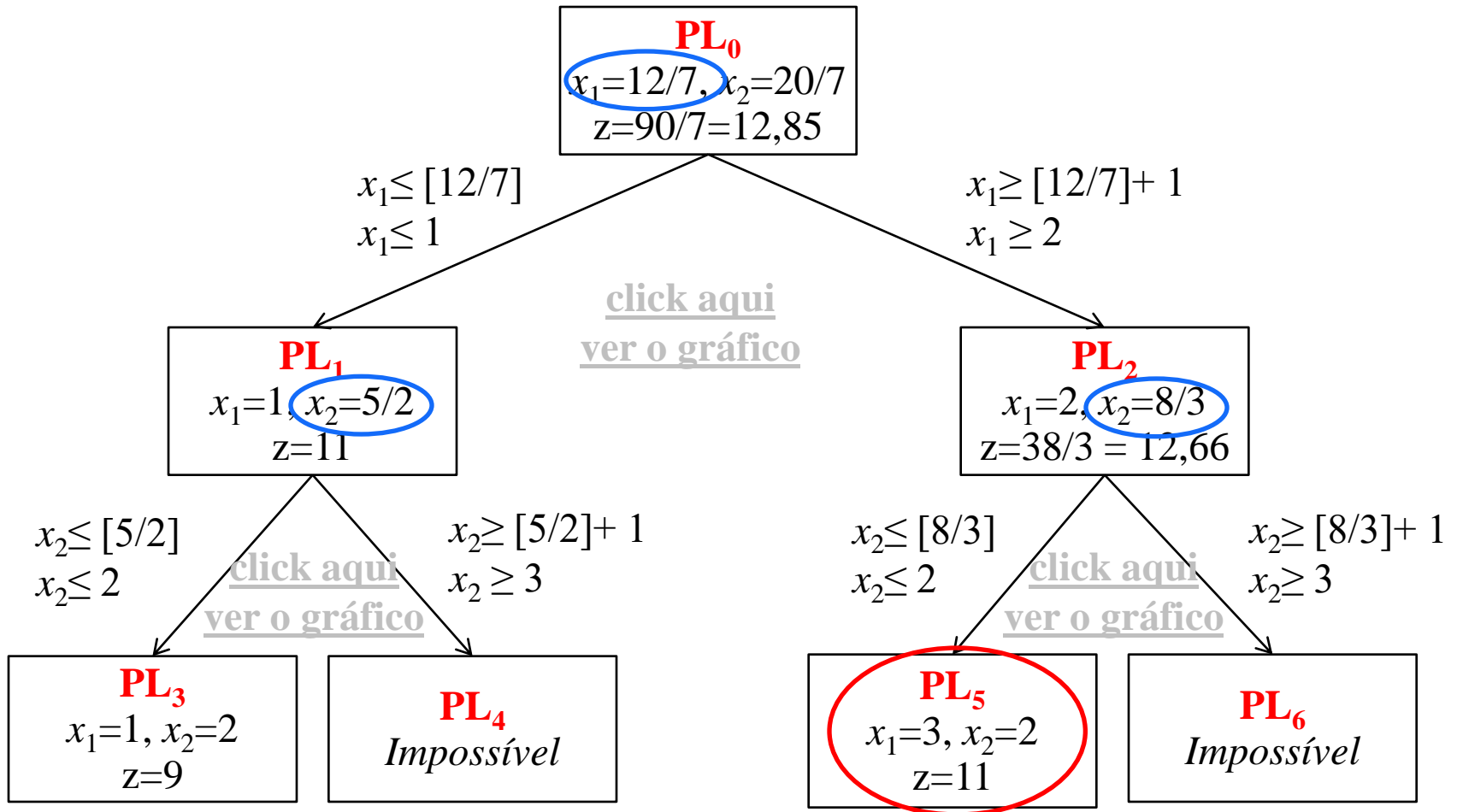
Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 1 - Partição de PL_0 em x_2



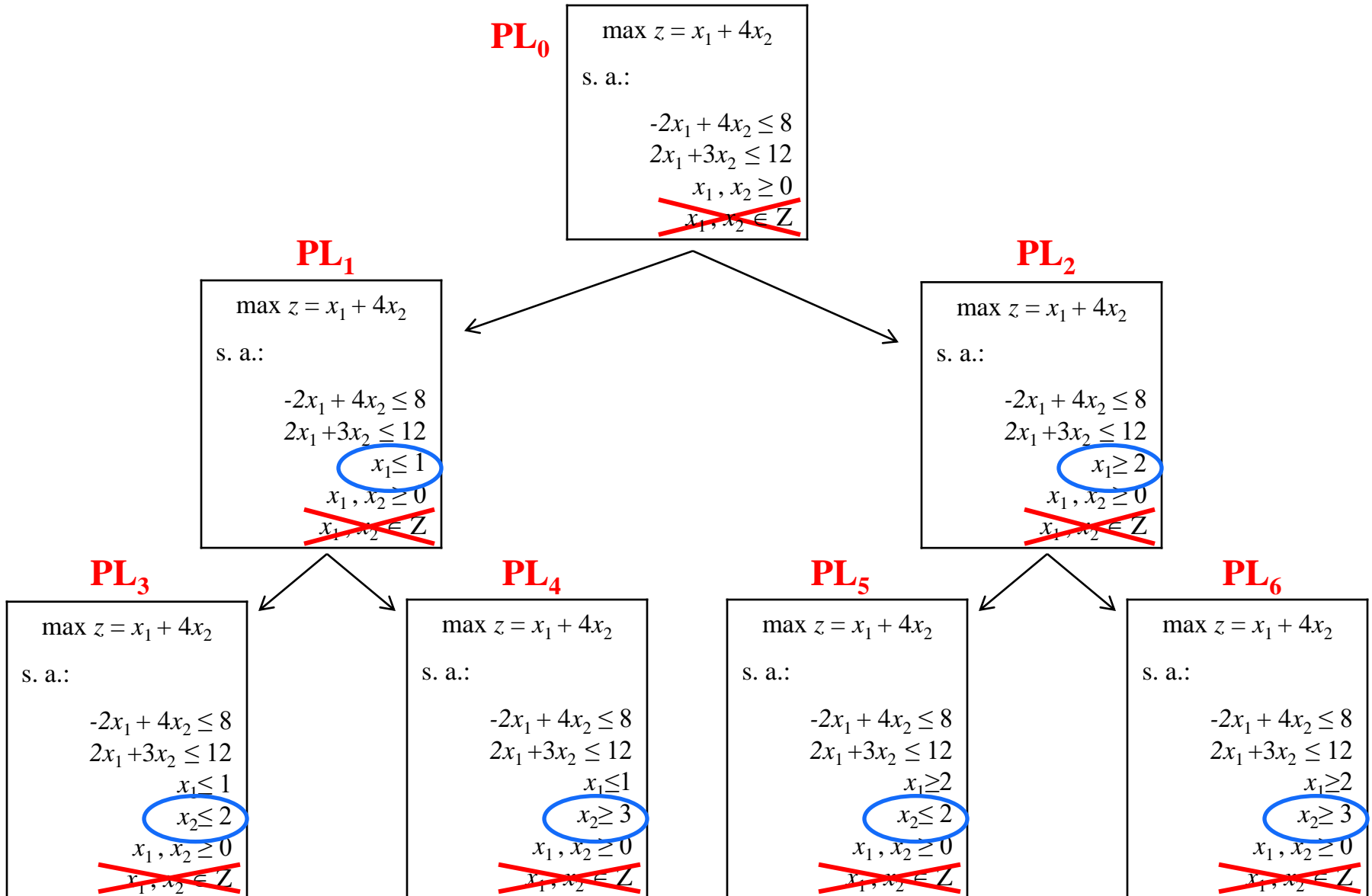
Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 1 - Partição de PL_0 em x_1



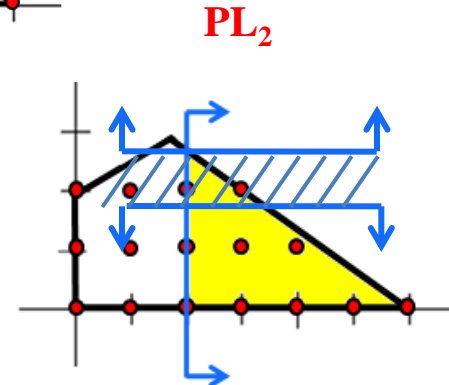
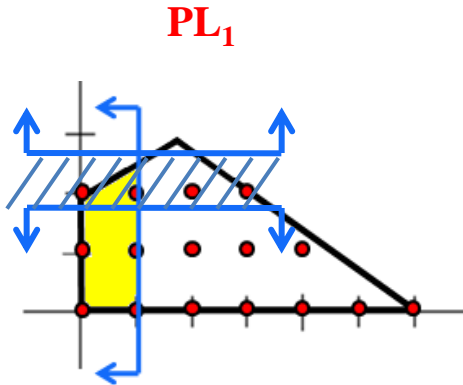
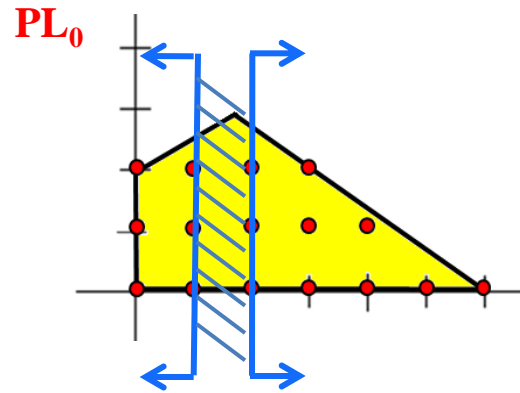
Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 1 - Partição de PL_0 em x_1



Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 1 - Partição de PL_0 em x_1

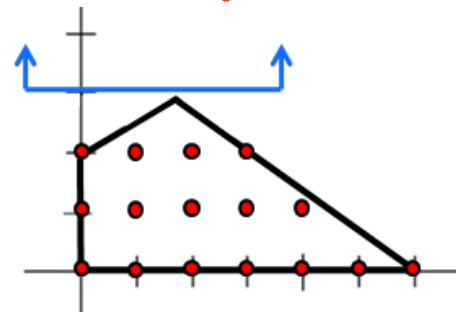
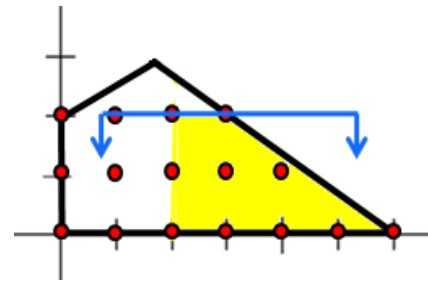
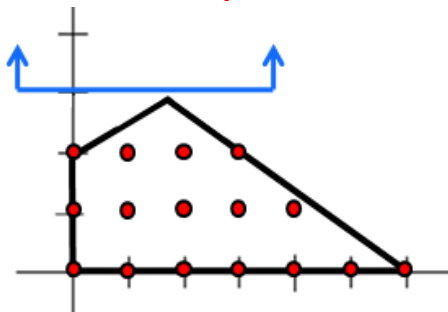
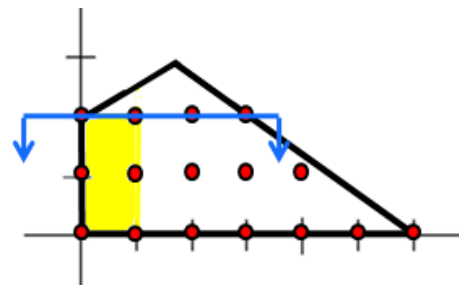


PL_3

PL_4

PL_5

PL_6



[Voltar](#)

Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 2

Maximizar $z = 5x_1 + 8x_2$

sujeito a :

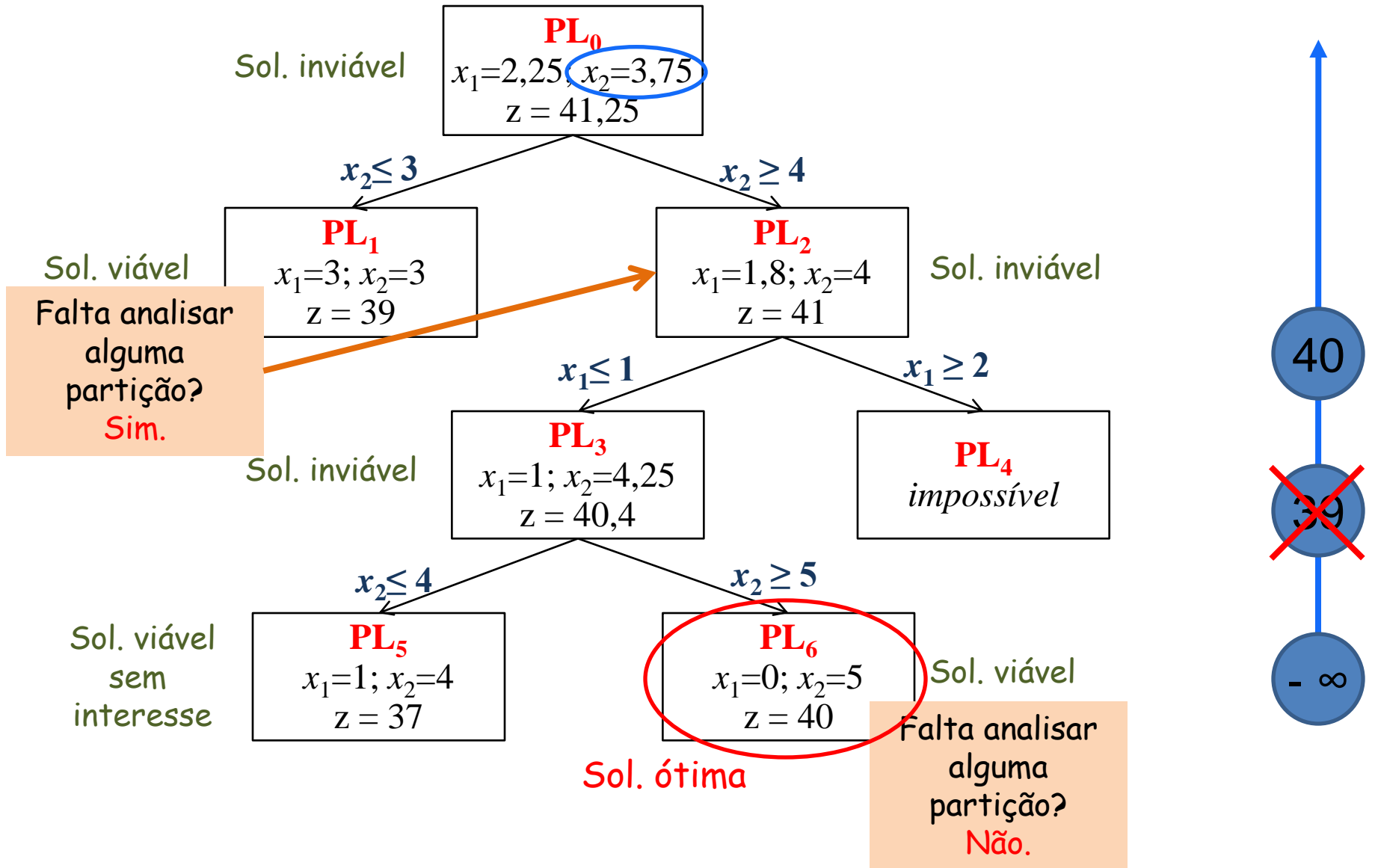
$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

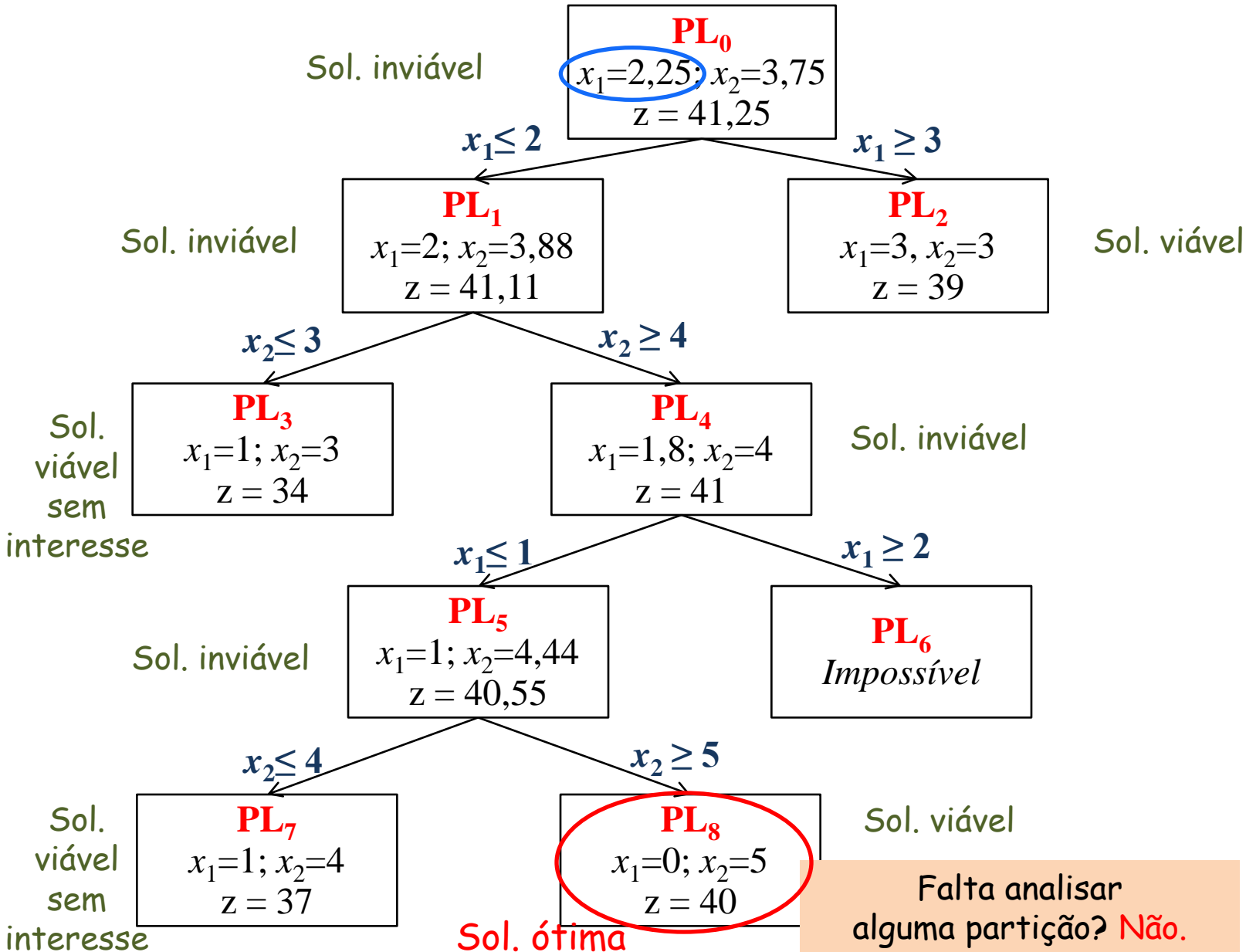
Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 2 - Partição de PL_0 em x_2



Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 2 - Partição de PL_0 em x_1



Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 3 – Problema de Minimização

Minimizar $z = 6x_1 + 8x_2$

sujeito a :

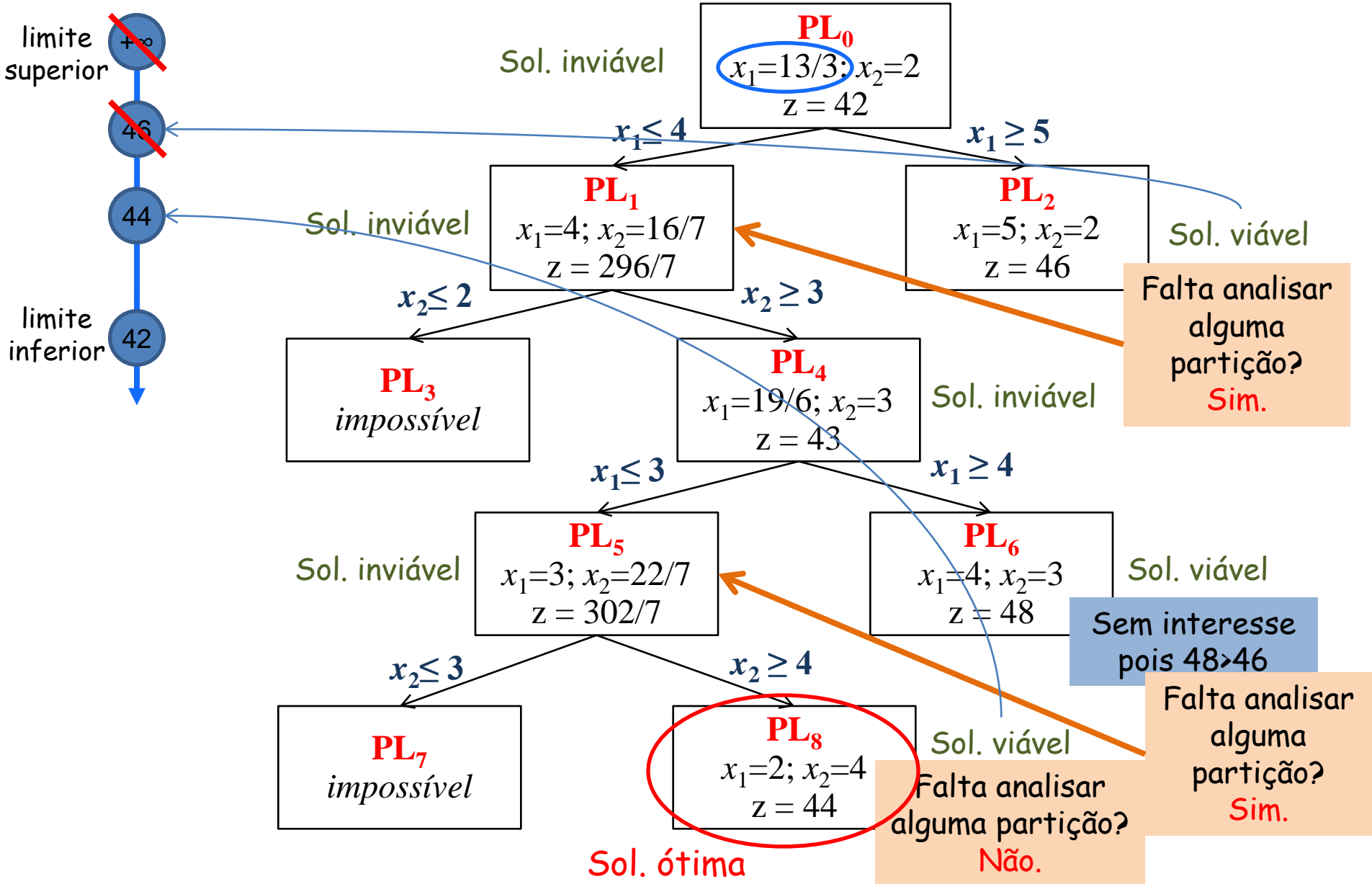
$$6x_1 + 7x_2 \geq 40$$

$$x_2 \geq 2$$

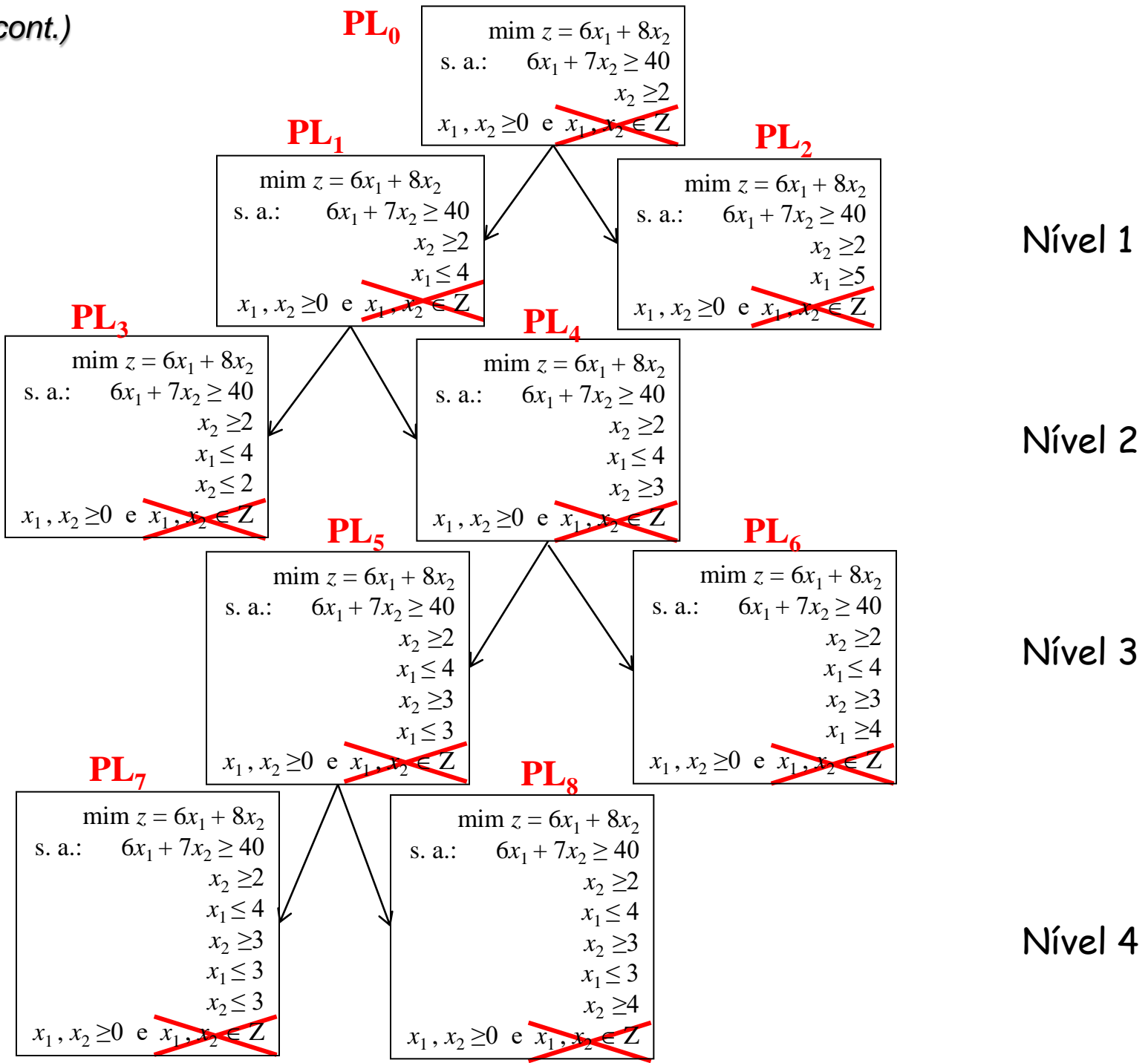
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 3 – Problema de Minimização



Exemplo 3 (cont.)



Branch-and-Bound (B&B)

Exemplo 4 – Problema de PLIB

Maximizar $z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$

sujeito a :

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

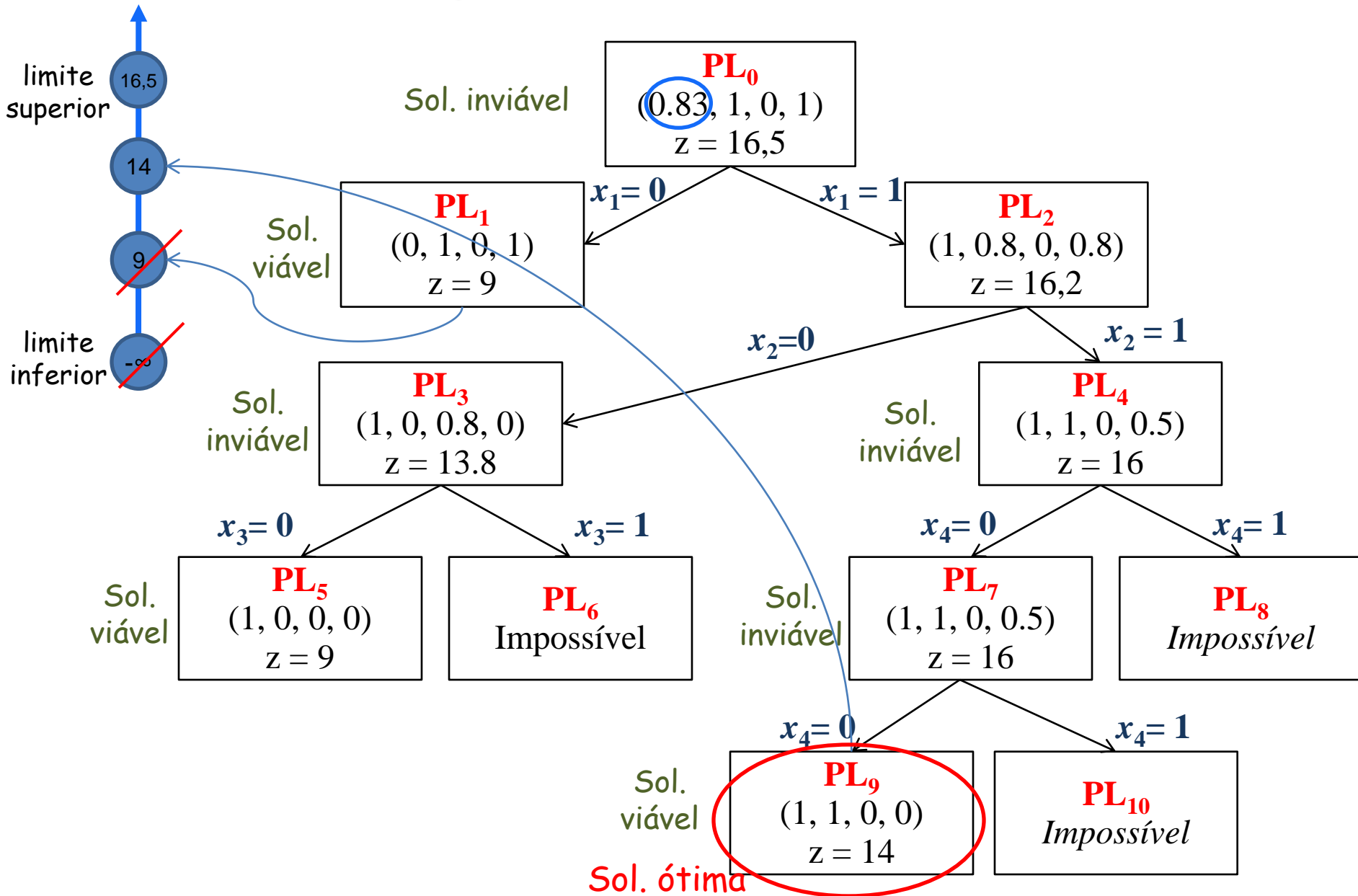
$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \text{ para } j = 1, 2, 3, 4.$$

Branch-and-Bound (B&B)

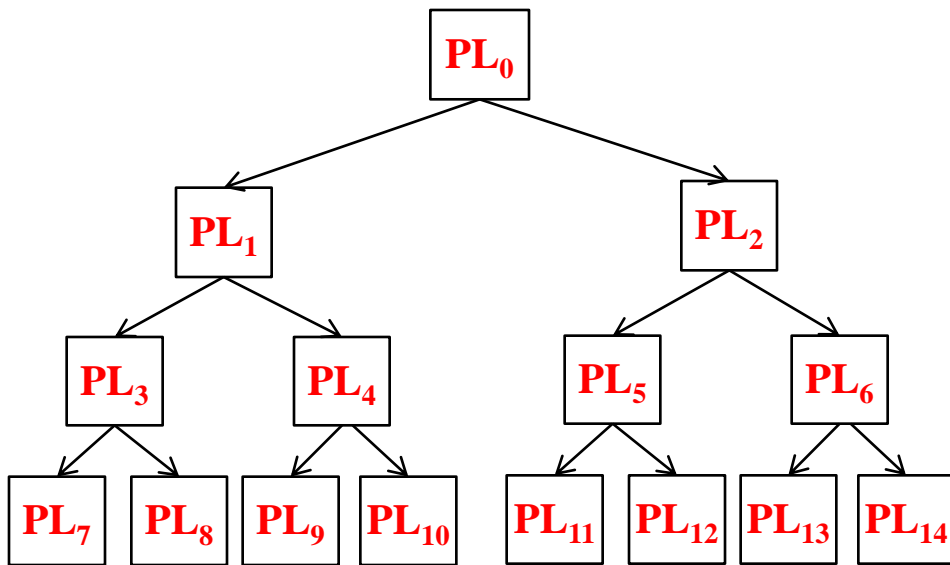
Exemplo 4 – Problema de PLIB



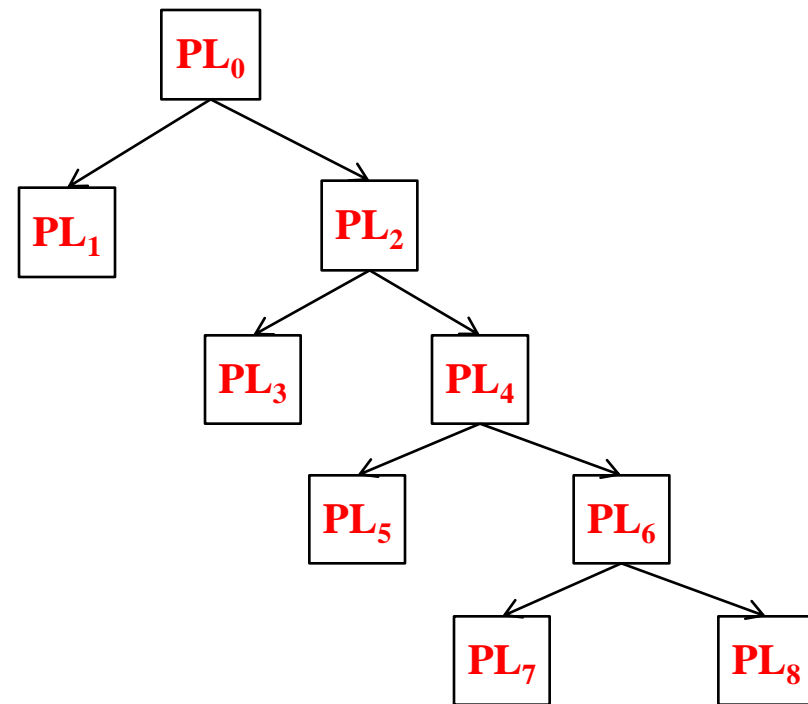
Branch-and-Bound (B&B)

Técnicas de desenvolvimento da árvore de enumeração

Busca em largura



Busca em profundidade



Branch-and-Bound (B&B)

Técnicas de formação da árvore (escolha da variável de separação)

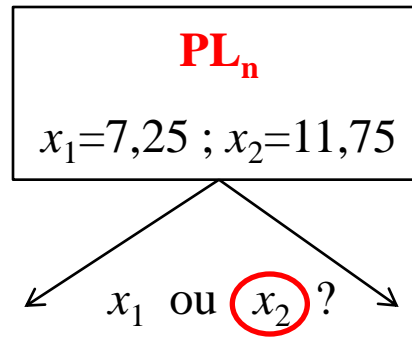
- Variante de Dank (1960)
- Variante de Land e Doig (1965)
- Variante de Spielberg (1968)
- Métodos das penalidades (1965)
- Método de Taha (1971)
- Estratégias dinâmicas (1976)
- Outras variantes

Branch-and-Bound (B&B)

Variante de Dank

O autor propõe que a variável a ser escolhida para a divisão seja a que possuir o maior *resíduo*.

Exemplo:



$$res(x_1) = x_1 - [x_1] = 7,25 - 7 = 0,25$$

$$res(x_2) = x_2 - [x_2] = 11,75 - 11 = 0,75$$

Branch-and-Bound (B&B)

Exercício

Desenvolva a árvore B&B para os problemas abaixo. Por conveniência, sempre selecione x_1 como a variável de ramificação no nó 0.

a)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a: } 2x_1 + 5x_2 \leq 9$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiras}$$

Branch-and-Bound (B&B)

Exercício

b)

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.a: } 3x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiras}$$