2.2.2 Problemas de transporte, transbordo e designação 21

Problema de Designação

Imagine, que em uma gráfica existe uma única máquina e um único operador apto a operá-la. Como você empregaria o trabalhador? Sua resposta imediata será: o operador disponível irá operar a máquina.

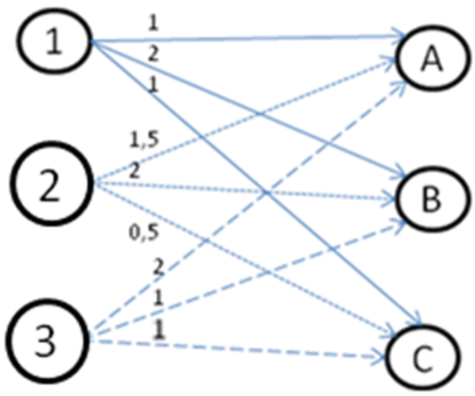
Novamente, suponha que há duas máquinas na gráfica e que dois operadores estejam habilitados a taxas de eficiência diferentes para operá-las. Qual operador deve operar qual máquina para maximizar o lucro?

Da mesma forma, se houver n máquinas disponíveis e n pessoas estiverem envolvidas com diferentes taxas de produtividade para operá-las. Qual operador deve ser atribuído a qual máquina para garantir a máxima eficiência?

Ao responder as perguntas acima, temos de pensar no interesse da gráfica, por isso temos de encontrar uma designação em que a gráfica obtém o máximo lucro com o investimento mínimo. Tais problemas são conhecidos como "problemas de designação" (=*assignment*=*afectação*=*asignación*).

Exemplo

Há 3 pessoas, {1, 2, 3} e 3 tarefas {A, B, C}. Cada pessoa deve executar uma única tarefa e todas as tarefas devem ser executadas. Cada pessoa i tem um interesse em efetuar cada tarefa j, dado por c_{ij}. Queremos fazer a alocação de modo que a soma dos interesses seja otimizada.



Seja x_{ij} a variável binária da designação da pessoa i para a tarefa j, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{A,B,C\}$.

O problema de programação linear inteira-PLI para resolver é dado por

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\min Z = & 1x_{1A} & +2x_{1B} & +1x_{1C} & +\frac{3}{2}x_{2A} & +2x_{2B} & +\frac{1}{2}x_{2C} & +2x_{3A} & +1x_{3B} & +1x_{3C} & & \\
\text{sa} & x_{1A} & +x_{1B} & +x_{1C} & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & x_{2A} & +x_{2B} & +x_{2C} & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & x_{3A} & +x_{3B} & +x_{3C} & = & 1 \\
 & x_{1A} & & & +x_{2A} & & & +x_{3A} & & & = & 1 \\
 & & x_{1B} & & & +x_{2B} & & & +x_{3B} & & = & 1 \\
 & & & x_{1C} & & & +x_{2C} & & & +x_{3C} & = & 1 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_{ij} \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\},\ \ j \in \{A,B,C\}}
\end{array}
$$

Consideremos somente a função objetivo

$$Z = 1x_{1A} + 2x_{1B} + 1x_{1C} + \tfrac{3}{2}x_{2A} + 2x_{2B} + \tfrac{1}{2}x_{2C} + 2x_{3A} + 1x_{3B} + 1x_{3C}$$

a) Procedendo a seguinte alteração

$$Z' = \left((1\pm\alpha)x_{1A} + (2\pm\alpha)x_{1B} + (1\pm\alpha)x_{1C}\right) + \tfrac{3}{2}x_{2A} + 2x_{2B} + \tfrac{1}{2}x_{2C} + 2x_{3A} + 1x_{3B} + 1x_{3C}$$

Então

$$Z' = \left(1x_{1A} + 2x_{1B} + 1x_{1C}\right) + \tfrac{3}{2}x_{2A} + 2x_{2B} + \tfrac{1}{2}x_{2C} + 2x_{3A} + 1x_{3B} + 1x_{3C} \pm \alpha\left(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}\right)$$

$$Z' = Z \pm \alpha\left(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}\right)$$

Da primeira restrição do PPLI tem-se que $x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 1$, e portanto,

$$Z' = Z \pm \alpha$$

Como Z e Z' são lineares e diferem em uma constante (α), então as soluções ótimas de ambos os pli's são iguais.

b) Procedendo outra alteração

$$Z'' = (1\pm\beta)x_{1A} + 2x_{1B} +' x_{1C} + \left(\tfrac{3}{2}\pm\beta\right)x_{2A} + 2x_{2B} + \tfrac{1}{2}x_{2C} + (2\pm\beta)x_{3A} + 1x_{3B} + 1x_{3C}$$

Então

$$Z'' = 1x_{1A} + 2x_{1B} + 1x_{1C} + \tfrac{3}{2}x_{2A} + 2x_{2B} + \tfrac{1}{2}x_{2C} + 2x_{3A} + 1x_{3B} + 1x_{3C} \pm \beta\left(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}\right)$$

$$Z'' = Z \pm \alpha\left(x_{1A} + x_{2AB} + x_{3A}\right)$$

Da quarta restrição do pli tem-se que $x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 1$ e portanto

$$Z'' = Z \pm \beta$$

Como Z e Z'' são lineares e diferem em uma constante (β), então as soluções ótimas de ambos os pli's são iguais.

Portanto, procedendo alterações "bem conduzidas" (não escolhidas a esmo) em coeficientes da função objetivo levam a pli´s, cujas resoluções são facilitadas, com soluções ótimas iguais às do pli original.

Formalização

Seja o problema de transporte com as seguintes restrições adicionais

i) número de origens igual ao número de destinos ($m = n$);

ii) capacidade de cada origem igual a 1 ($a_i = 1$ $\forall$i);

iii) demanda de cada destino igual a 1 ($b_j = 1$, $\forall$j).

O modelo matemático de designação é

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,\ldots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

Como cada origem abastecerá um único destino então o conjunto de restrições $x_{ij} \geq 0$ é equivalente a

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a origem } i \text{ abastecer o destino } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema de designação/atribuição é uma variação do problema de transporte original, uma variação na qual as variáveis de decisão x_{ij} só podem assumir valores binários, isto é, zero (0) ou um (1), na solução ótima , que pressupõe que a oferta e a demanda estão perfeitamente equilibradas, de fato, ambas são iguais a um (1).

Inclusão de fictício: Se a matriz não for quadrada, deve-se incluir ou destinos ou origens fictícias com custo zero. Mas sempre posso incluir o fictício com custo zero? Depende do objetivo (e do contexto do modelo). Por exemplo, suponha que você tenha cinco trabalhos, cada um exigindo um único trabalhador dedicado em tempo integral e três funcionários disponíveis, e suponha que seu objetivo seja minimizar os custos. Você pode adicionar dois funcionários fictícios, mas é preciso se perguntar o que eles representam. Se você atribuir um funcionário fictício ao trabalho nº 1, isso significa que: i) ou o trabalho nº 1 é deixado por fazer (não será feito); ii) ou terceirizar o trabalho; iii) ou mais um trabalhador temporário; iv) ou fazer hora extra para executá-lo. Cada um desses presumivelmente tem um custo diferente (possivelmente zero se você puder deixar o trabalho sem fazer e não sofrer consequências).

Resolução de um problema de designação

Resolver o problema de designação consiste em determinar como as designações devem ser feitas de modo a minimizar o custo total. O algoritmo de designação será baseado apenas na matriz de custos (pois as demandas e ofertas são unitárias)

		Demanda			
		1	2	...	n
Oferta	1	c_{11}	c_{12}	..	c_{1n}
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
	...	...	...	...	...
	n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}

Algoritmo Húngaro

Seja um problema de designar **n tarefas** a **n agentes**.

Passo 1: Gerar zeros

a) **Redução por linha**: Subtrair a entrada mínima de cada linha de todas as entradas da respectiva linha na matriz de custos.

b) **Redução por Coluna**: Após a conclusão da redução de linha, subtraia a entrada mínima de cada coluna de todas as entradas da respectiva coluna.

Passo 2: Designar zeros

a) Começando com a primeira linha da matriz gerada no **Passo 1**, examine as linhas uma por uma até encontrar uma linha contendo exatamente um único zero. Em seguida, uma designação, indicada por "□", é marcada para esse zero. Então elimine/cruze ("×") todos os zeros na coluna em que a designação foi feita. Este procedimento deve ser adotado para cada designação por linha.

b) Quando o conjunto de linhas foi completamente examinado, um procedimento idêntico é aplicado sucessivamente às colunas. Começando com a coluna 1, examine todas as colunas até que uma coluna contendo exatamente um único zero seja encontrada. Em seguida, faça uma designação nessa posição (marque com "□") e elimine (cruze com ×) os outros zeros na linha em que a designação foi feita.

Continue essas operações sucessivas em linhas e colunas até que todos os zeros tenham sido designados (com □) ou eliminados (com ×).

Agora existem duas possibilidades:

a) Todos os zeros foram designados ou eliminados/cruzados, ou,

b) Pelo menos dois zeros permanecem para designação ou para eliminação em cada linha ou coluna. Nesta situação, tente excluir alguns dos zeros pelo método de tentativa e erro. Por exemplo, designe o primeiro zero encontrado e continue o procedimento descrito no início do **Passo 2**.

Isso conclui o **Passo 2**. Após este passo, podemos obter duas situações.

a) **Total de zeros designados é igual a n**: a designação é ótima.
b) **Total de zeros designados é menor que n**: nesta situação use o **Passo 3** e em diante.

Passo 3: Gerar o menor número de linhas para “cobrir/riscar” todos os zeros

Para cobrir/riscar todos os zeros, pelo menos, uma vez você pode adotar o procedimento a seguir.

i. Marque (com ~) todas as linhas nas quais nenhuma designação foi feita.
ii. Procure as posições de zeros nas linhas marcadas e então marque (com ~) as colunas correspondentes.
iii. Procure as colunas marcadas e encontre as posições dos zeros designados e, em seguida, marque (com ~) as linhas correspondentes que não estão marcadas até agora.
iv. Repita o procedimento ii. e iii. até a conclusão da marcação.
v. Cubra/risque retas nas linhas desmarcadas e nas colunas marcadas.

Passo 4: Selecionar o mínimo dos elementos não cobertos (não riscados) e fazer:

a) Subtraia este menor elemento de todos os elementos não riscados/cobertos.
b) Adicione este menor elemento a todos os elementos que estão nas intersecções de duas retas.

Passo 5: Assim, aumenta-se o número de zeros. Agora, modifique a matriz e retorne do **Passo 2** para encontrar a designação necessária.

Maximização: A conversão é realizada subtraindo todos os elementos da matriz fornecida do elemento mais alto. Iremos, então, minimizar a perda de oportunidade e produz a mesma solução de designação que o problema original de maximização.

Exemplo 1

	1	2	3	4	5	min
A	12	8	7	15	4	4
B	7	9	17	14	10	7
C	9	6	12	6	7	6
D	7	6	14	6	10	6
E	9	6	12	10	6	6

	1	2	3	4	5
A	8	4	3	11	0
B	0	2	10	7	3
C	2	0	6	0	1
D	1	0	8	0	4
E	3	0	6	4	0
min			3		

	1	2	3	4	5
A	8	4	0□	11	0⊗
B	0□	2	7	7	3
C	2	0□	3	0⊗	1
D	1	0⊗	5	0□	4
E	3	0⊗	3	4	0□

A <u>solução ótima</u> corresponde à seguinte designação:

Item	A	B	C	D	E
Local	3	1	2	4	5

O custo final será (7 + 7 + 6 + 6 +6) = 32

Exemplo 2

	1	2	3	4	5	min
A	9	15	6	14	18	6
B	7	5	10	4	13	4
C	11	14	13	10	14	10
D	19	22	15	26	24	15
E	12	8	10	9	13	8

	1	2	3	4	5
A	3	9	0	8	12
B	3	1	6	0	9
C	1	4	3	0	4
D	4	7	0	11	9
E	4	0	2	1	5
min	1				4

	1	2	3	4	5
A	2	9	0□	8	8
~~B~~	2	1	6	0□	5
~~C~~	0□	4	3	0⊗	0⊗
D	3	7	0⊗	11	5
~~E~~	3	0□	2	1	1

O mínimo é 2, na célula (A,2).[1]

	1	2	3	4	5
A	0□	7	0⊗	6	6
B	2	1	8	0□	5
C	0⊗	4	5	0⊗	0□
D	1	5	0□	9	3
E	3	0□	4	1	1

A solução ótima corresponde à seguinte designação:

Item	A	B	C	D	E
Local	1	4	5	3	2

O custo final será (9 + 4 + 14 + 15 + 8) = 50.

Exemplo 3 Uma empresa vende produtos em quatro regiões e possui quatro vendedores para serem destacados, um para cada região. As regiões não são igualmente ricas e apresentam o seguinte potencial de vendas:

Região I: R$ 60.000,00

Região II: R$ 50.000,00

Região III: R$ 40.000,00

Região IV: R$ 30.000,00

Os vendedores, por outro lado, não são igualmente hábeis e as suas eficiências, que refletem a capacidade de atingir o mercado potencial da região, são dadas pelo quadro que se segue.

	I	II	III	IV
A	0,7	0,7	0,7	1,0
B	0,8	0,8	0,8	1,0
C	0,5	0,5	0,5	1,0
D	1,0	0,4	1,0	0,4

[1] [Amarelo: linhas não marcadas e colunas marcadas Vermelho: adicionar o mínimo Verde: fazer nada]

Pede-se: determinar, empregando o método da designação, como destacar os vendedores para que o volume de vendas seja o maior possível.

O potencial de venda de cada vendedor é

	I	II	III	IV
A	42	35	28	30
B	48	40	32	30
C	30	25	20	30
D	60	20	40	12

<u>Resolução</u>: Deve-se gerar a tabela de ineficiências (lembre-se de custos/prejuízos)

	I	II	III	IV
A	0	7	14	12
B	0	8	16	18
C	0	5	10	0
D	0	40	20	48
min		5	10	

	I	II	III	IV
A	0	2	4	12
B	0	3	6	18
C	0	0	0	0
D	0	35	10	48

	I	II	III	IV
A	0□	2	4	12
B	0⊗	3	6	18
C	0⊗	0□	0⊗	0⊗
D	0⊗	35	10	48

O mínimo é 2, na célula (A,II).

	I	II	III	IV
A	0⊗	0□	2	10
B	0□	1	4	16
C	2	0⊗	0□	0⊗
D	0⊗	33	8	46

O mínimo é 1, na célula (B,II).

	I	II	III	IV
A	1	0□	2	10
B	0□	0⊗	3	15
C	3	0⊗	0□	0⊗
D	0⊗	32	7	45

O mínimo é 2, na célula (A,III).

	I	II	III	IV
A	1	0⊗	0□	8
B	0⊗	0□	1	13
C	5	2	0⊗	0□
D	0□	32	5	43

As designação são feitas segundo os potenciais de venda das regiões.

<u>Solução ótima</u>: Os vendedores deverão ser designados da seguinte maneira:

Vendedor	A	B	C	D
Região	III	II	IV	I

Fazendo esta designação, o volume de vendas (em R$) será

Volume = $(0{,}7\times 40.000 + 0{,}8\times 50.000 + 1{,}0\times 30.000 + 1{,}0\times 60.000)$ = R$ 158.000,00

Casos Especiais

a) Empate na entrada: escolha aleatória

b) Algoritmo de Munkres: O algoritmo Munkres não é limitado a matrizes quadradas de custo http://csclab.murraystate.edu/~bob.pilgrim/445/munkres.html

c) Algoritmo de Hopcrofft-Karp

d) Designação Generalizada (ARENALES, pg. 179)