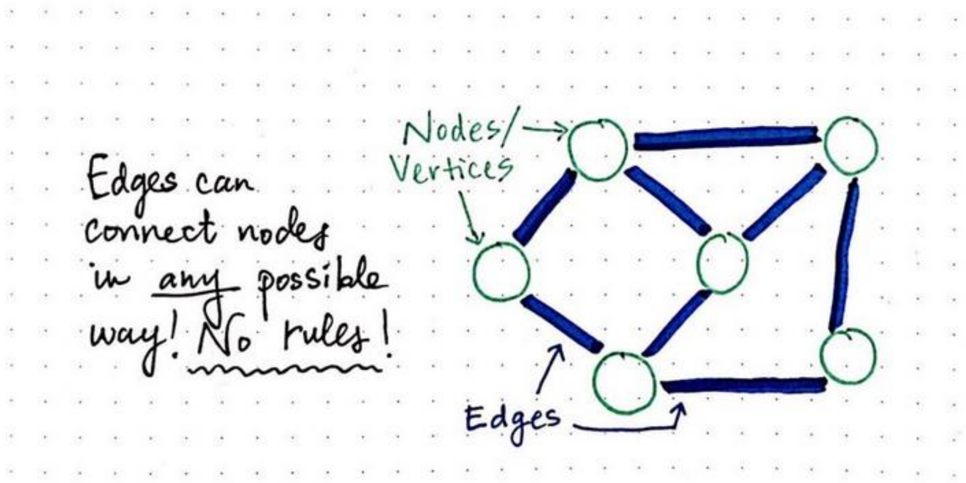
Algumas noções sobre Grafos

Muitos problemas de otimização podem ser analisados utilizando-se uma estrutura denominada grafo ou rede. Problemas em redes aparecem em diversas aplicações e em diversas formas. Algumas delas envolvem o transporte ou fluxo de um item ou itens de um nó a outro na rede com um determinado objetivo. As aplicações surgem na transmissão de mensagens em redes de comunicação de dados, no envio de água em uma rede de distribuição de água, no transporte de carga em uma rede viária, na programação da produção, programação de projetos, programação de máquinas e de pessoal, distribuição de bens. (ARENALES)

Grafo: O grafo G=(N,E) consiste em um conjunto de nós denotados por N, ou por N(G) e conjunto de arestas E ou E(G).



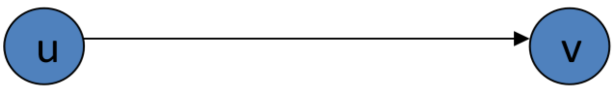
Edges can connect nodes in any way possible!

https://medium.com/basecs/a-gentle-introduction-to-graph-theory-77969829ead8

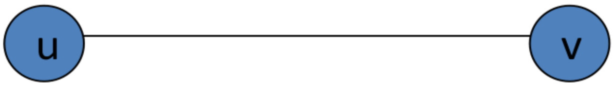
Rede é um grafo cujos nós ou arestas tem valores (custos/lucros/pesos) associados.

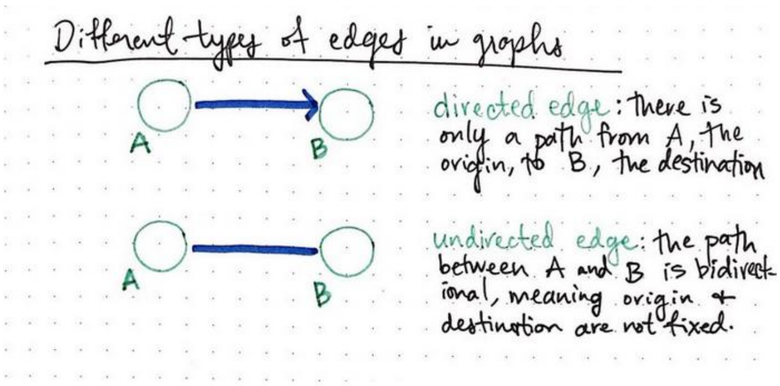
Tipos de arestas

<u>Orientada</u>: par de nós ordenados. Representado por (u, v) direcionado do nó u até v.



<u>Não orientada</u>: par desordenado de nós. Representado como {u, v}. Desconsidera qualquer sentido de direção e trata os dois nós finais de maneira intercambiável.



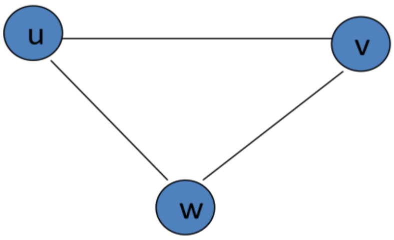


Directed edges compared to undirected edges

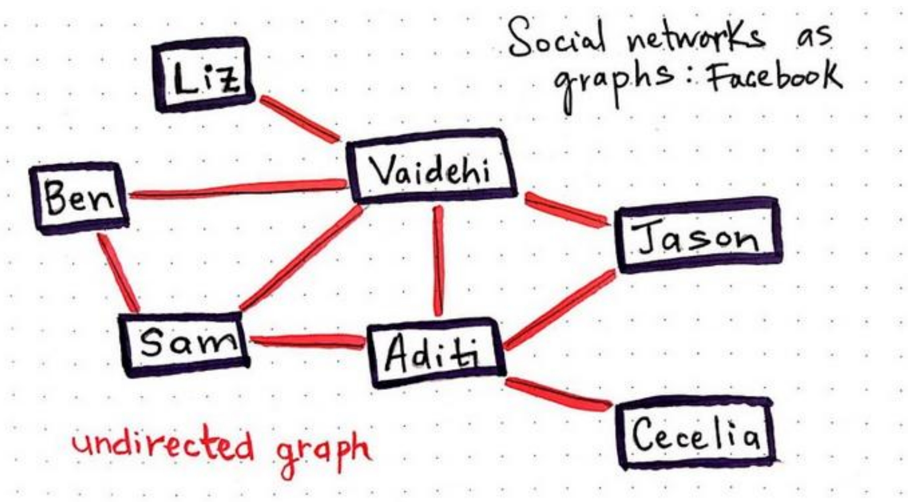
Tipos de grafos

<u>Grafo não orientado</u>: consiste em N, um conjunto não vazio de nós, e E, um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de N chamados de arestas (não direcionadas).

Exemplo 1: G=(N,E), N = {u, v, w}, E = {{u, v}, {v, w}, {u, w}}



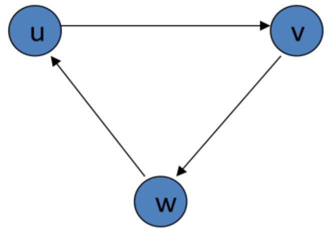
Exemplo 2: Facebook como um grafo não orientado



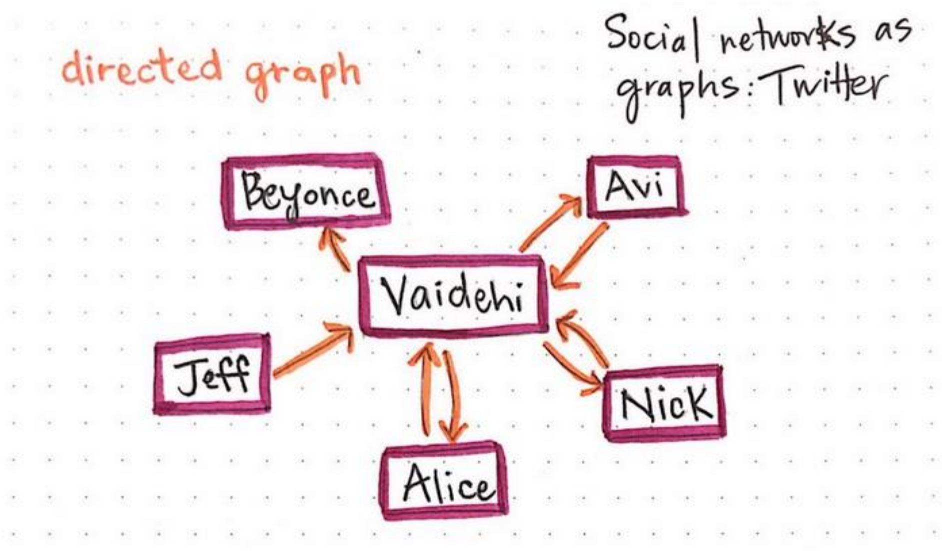
Facebook as an undirected graph structure

<u>Grafo orientado</u>: G=(N,E), conjunto de nós N, e conjunto de arestas E, que são pares ordenados de elementos de N (arestas orientadas). Neste caso a aresta é denominada de **arco**.

Exemplo 3: G=(N,E), N = {u, v, w}, E = {(u, v), (v, w), (w, u)}



Exemplo 4: Twitter como um grafo orientado



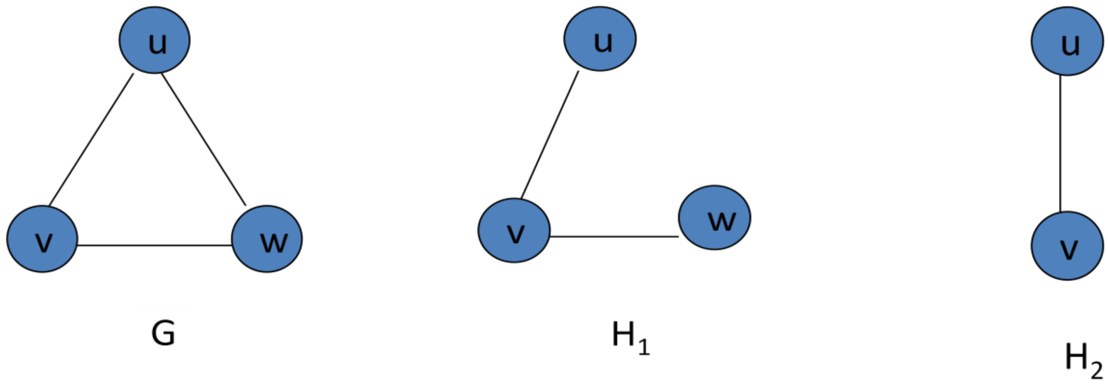
Twitter as a directed graph structure

Subgrafo

Um subgrafo de um grafo G=(N,E) é um grafo H=(N',E') onde V 'é um subconjunto de N e E' é um subconjunto de E

Exemplo de aplicação: resolvendo sub-problemas dentro de um grafo

Exemplo 5: N = {u, v, w}, E = {{u, v}, {v, w}, {w, u}}, H1, H2



Incidência: u e v são adjacentes (ou vizinhos) se e = {u, v} é uma aresta. A aresta e é dita incidente a ambos u e v. Os nós u e v são chamados de pontos finais de {u, v}

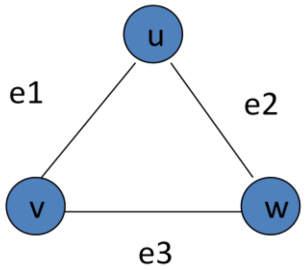
Representação matricial

Matriz de incidência: Mais útil quando a informação sobre as arestas é mais desejável que a informação sobre os nós.

G=(N,E) é um grafo não direcionado. Suponha que v1, v2, v3,..., vn são os nós e e1, e2,..., em são as arestas de G. Então a matriz de incidência com relação a essa ordenação de N e E é a matriz n×m, M = [m_{ij}], onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e_j \text{ é incidente com } v_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 6: Grafo não orientado



	e1	e2	e3
v	1	0	1
u	1	1	0
w	0	1	1

Matriz de adjacência: Mais útil quando as informações sobre os nós são mais desejáveis do que as informações sobre as arestas. Essa representação também é a mais popular, pois as informações sobre os nós são geralmente mais desejáveis do que as arestas na maioria das aplicações.

Seja uma matriz n×n, onde |N| = n. A matriz de adjacência n×n é A = [a_{ij}]

Para grafo não orientado

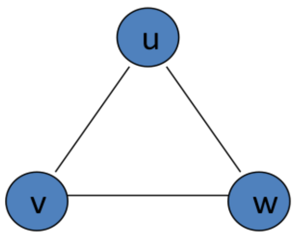
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \text{ é um nó de G} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para grafo orientado

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \text{ é um nó de G} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

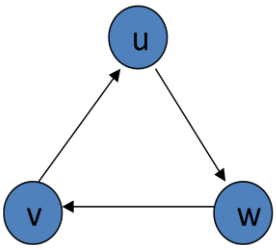
Observação: Quando há relativamente poucas arestas no grafo, a matriz de adjacência é uma matriz esparsa.

Exemplo 7: Grafo não orientado



	v	u	w
v	0	1	1
u	1	0	1
w	1	1	0

Exemplo 8: Grafo orientado



	v	u	w
v	0	1	0
u	0	0	1
w	1	0	0

Conectividade

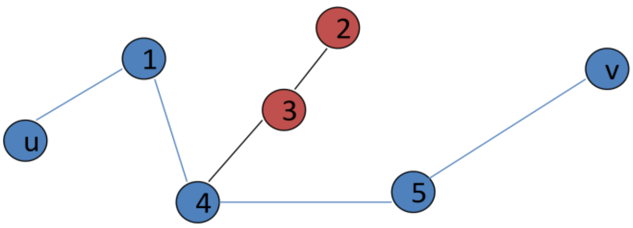
Ideia básica: Em um grafo a acessibilidade entre nós ao atravessar as arestas.

Exemplo de aplicação:

- Em uma rede viária de cidade para cidade, se uma cidade puder ser alcançada de outra cidade.
- Problemas ao determinar se uma mensagem pode ser enviada entre dois computadores usando links intermediários.
- Planejamento eficiente de rotas para entrega de dados na Internet.

Caminho: Um Caminho é uma sequência de arestas que começa em um nó de um grafo e percorre as arestas do grafo, sempre conectando pares de nós adjacentes.

Exemplo 9: G=(N,E), caminho P representado, de u para v é {{u,1}, {1,4}, {4,5}, {5,v}}



Portanto, caminho do nó v_0 ao nó v_k é uma sequência de arcos C coerentemente orientados e representado por $C=\{(v_0,v_1), (v_1,v_2),..., (v_{k-1},v_k)\}$, onde $v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k$ são todos diferentes.

Assim, num caminho temos uma sequência alternada de nós e arestas, começando e terminando com nós de tal forma que nenhuma aresta é percorrida ou coberta mais de uma vez.

O caminho é fechado se $v_0=v_k$. Neste caso o caminho também é denominado de **Ciclo**.

Caminho hamiltoniano é um caminho que visita cada nó uma única vez. Caso esse caminho descreva um ciclo, este é denominado **ciclo hamiltoniano**.

Caminho euleriano É um caminho que visita cada aresta apenas uma vez. Com caso especial, um Circuito **Euleriano** é um **caminho Euleriano** que começa e termina no mesmo vértice.

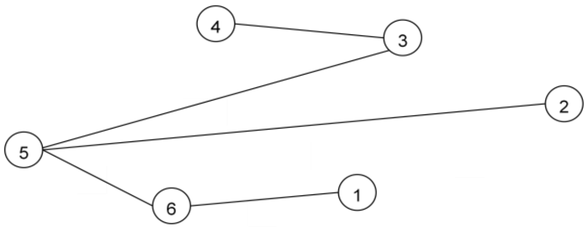
Então, grafo euleriano é um grafo no qual é possível caminhar por todas as suas arestas, visitando cada uma delas apenas uma única vez. Enquanto que grafo hamiltoniano é um grafo no qual é possível caminhar por todos os seus nós, visitando cada um deles apenas uma única vez.

Um grafo hamiltoniano pode não ser euleriano (porque há arestas não incluídas no ciclo hamiltoniano). No entanto, nem todos os grafos eulerianos também são hamiltonianos.

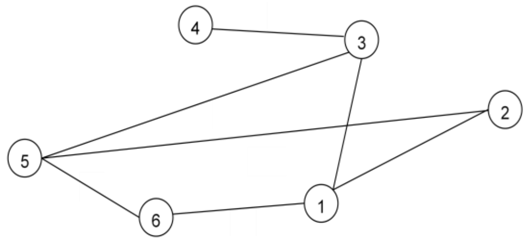
Árvore

Uma **árvore** é um grafo conectado <u>sem ciclos</u>.

1) Uma árvore com n nós contem $(n - 1)$ arcos.
2) Se um arco for adicionado à arvore, forma-se um ciclo.
3) Se um arco for eliminado da árvore, a rede deixa de ser conexa (tem-se 2 redes conexas).



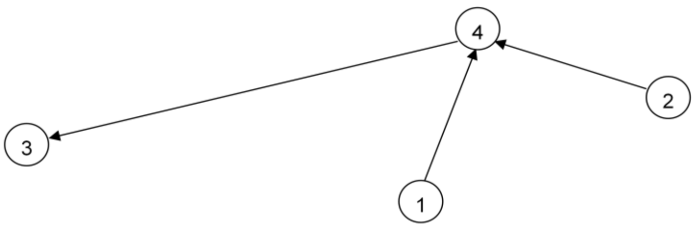
É árvore



Não é árvore

Árvore geradora de um grafo G (ou árvore de cobertura) é um subgrafo que é uma árvore e inclui todos os nós do grafo G.

Exemplo 10:



Árvore geradora mínima de G é a árvore geradora de menor custo.