PESQUISA OPERACIONAL

Método Simplex

Professor Volmir Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Limitações da programação linear

$$
\begin{aligned}
\max\ (\min)\ Z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Coeficientes constantes

2. Divisibilidade

3. Proporcionalidade

4. Aditividade

5. Parâmetros constantes/precisos (sem incertezas)

Prévia de um algoritmo de otimização SIMPLEX

1. Obter uma solução básica inicial – a mais trivial e mais fácil
2. Verificar se a solução atual é ótima
3. Se a solução atual não for ótima, procurar outra solução básica
4. Voltar ao passo 2

Questões

a) Como achar a solução inicial?
b) Que critério usar para gerar uma nova solução básica?
c) Como posso saber se a solução atual é ótima?

Formato dos PL´s

Formato Geral

$$
\begin{aligned}
\max\ (\min)\ Z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
& \ldots \\
& a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n \leq b_k \\
& \ldots \\
& a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + c_{\ln}x_n \geq b_l \\
& \ldots \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma Padrão

$$
\begin{aligned}
\max\ (\min)\ Z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma Padrão

Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está na *forma padrão*.

maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$
(minimizar)
sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N &= b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\geq 0
\end{aligned}
$$

Redução à Forma Padrão

I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\boxed{\min Z = -\max(-Z)}$$

Redução à Forma Padrão

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo "$\leq$" pode ser convertida numa restrição do tipo "$\geq$" multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$\boxed{a_{i\,1} x_1 + \; a_{i\,2} x_2 + \; \ldots + a_{i\,N} x_N \leq b_i}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-\,a_{i\,1} x_1 - \; a_{i\,2} x_2 - \; \ldots - a_{i\,N} x_N \; \geq -\,b_i}$$

Redução à Forma Padrão

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades "≤" equivalentes àquela.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N = b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$
$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \geq b_i$$

$\Updownarrow$

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i$$
$$-a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N \leq -b_i$$

Redução à Forma Padrão

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à Forma Padrão*. Para isto é preciso *converter* as *restrições* de *desigualdade* em *restrições equivalentes* de *igualdade*.

- uma *restrição de desigualdade* de tipo "≤" pode ser convertida numa *restrição de igualdade adicionando uma nova variável não negativa* (***variável de folga***) x_{N+1}:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$\boxed{a^t x \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x + F = b \\ F \geq 0 \end{cases}}$$

Redução à Forma Padrão

– uma *restrição de desigualdade* de tipo "≥" pode ser convertida numa *restrição de igualdade subtraindo uma nova variável não negativa* (***variável de excesso ou de folga***) x_{N+1}:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N - x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$\boxed{a^t x \geq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x - S = b \\ S \geq 0 \end{cases}}$$

Redução à Forma Padrão – Exemplo 1

Forma Geral

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \geq 18 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Forma Padrão

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & + x_4 & & = 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & & & - x_5 & = 18 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

As variáveis de folga (e excesso) têm coeficientes nulos na função objetivo

Redução à Forma Padrão – Exemplo 2

IV. Qualquer *variável negativa* x_j, deve ser substituida por uma variável não negativa $x_j = -x_j'$, $x_j' \geq 0$, fazendo:

$$\boxed{x_j = -x_j'}$$

Forma Geral

$$
\begin{array}{l}
\textbf{max} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\
sa \\
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & 2x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 18
\end{array} \\
x_1 \leq 0, \; x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Forma Padrão

$$
\begin{array}{l}
\textbf{max} \quad Z = -3x'_1 + 5x_2 \\
sa \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-x'_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
-3x'_1 & + & 2x_2 & & & & & - & x_5 & = & 18
\end{array} \\
x'_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Redução à Forma Padrão

V. Qualquer *variável livre* x_j, (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituida por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$\boxed{x_j = x_j' - x_j''}$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas novas variáveis.

Após substituir x_j por $x_j' - x_j''$, <u>deleta-se</u> a variável x_j do problema.

Redução à Forma Padrão – Exemplo 3

Forma Geral

max $Z = 3x_1 + 5x_2$

sa

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \geq 18
\end{aligned}
$$

x_1 livre, $x_2 \geq 0$

Forma Padrão

max $Z = 3(x'_1 - x''_1) + 5x_2$

sa

$$
\begin{aligned}
(x'_1 - x''_1) \qquad\quad + x_3 \qquad\quad & = 4 \\
2x_2 \quad + x_4 \quad & = 12 \\
3(x'_1 - x''_1) + 2x_2 \qquad - x_5 & = 18
\end{aligned}
$$

$x'_1, x''_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Método Simplex

Método Simplex

Teorema: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto das soluções (viáveis).

Examine uma seqüência de soluções básicas viáveis com o aumento dos valores da função objetivo até que uma solução ideal seja atingida ou seja provado que o PL é ilimitado.

(G. Dantzig, 1947).

Método Simplex

$$
\begin{array}{ll}
\max\ (\min)\ Z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Para ser iniciado, o método simplex necessita conhecer uma solução básica viável (**solução inicial**). **Se** a solução atual **não é ótima**, então o **simplex muda do ponto extremo atual ao ponto extremo adjacente**. Este processo continua até que a solução seja ótima.

Método Simplex

Passo 0: Achar uma solução viável básica inicial.

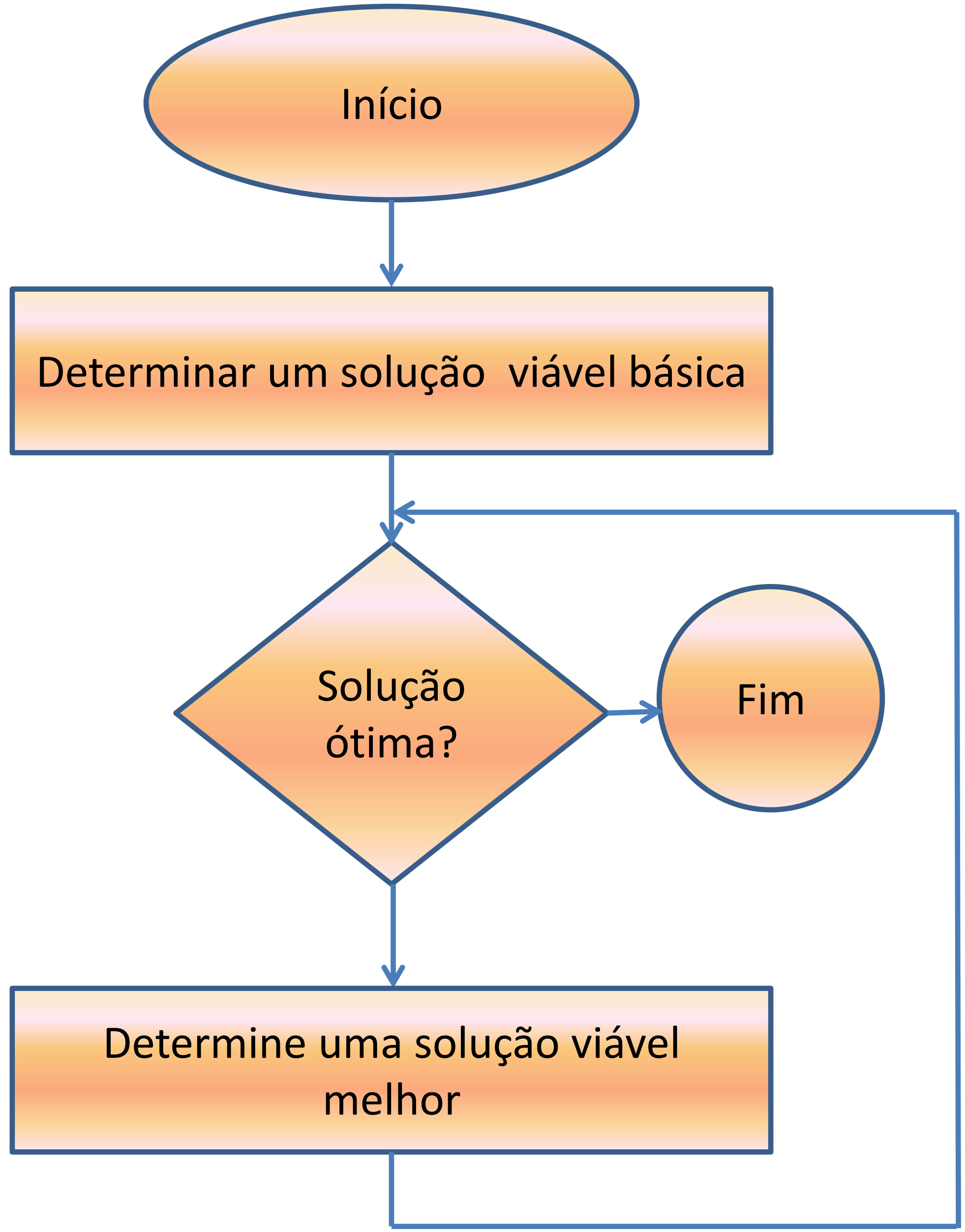
Passo 1: Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.

Passo 2: Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.

Passo 3: Determinar a variável básica que deve sair da base.

Passo 4: Achar a nova solução viável básica, e voltar ao **Passo 1**

Método Simplex



Método Simplex – Técnicas

- Algébrica
- Simplex por Quadros
- Simplex Revisado

Exemplo de uso do Simplex por Quadros

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 2x_1 + 1x_2 \\ sa \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 2x_1 + 1x_2 \\ sa \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

continua ...

Exemplo de uso do Simplex por Quadros

... continuação

Base	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2	-1	0	0	0
x_3	3	4	1	0	6
x_4	$\boxed{6}$	1	0	1	$3 \rightarrow$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Teste do Bloqueio: $\dfrac{\bar{b}_R}{\bar{a}_{RS}} = \min\limits_{j}\left\{\dfrac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{jS}},\ \bar{a}_{jS} > 0\right\}$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	$-2/3 \downarrow$	0	1/3	1
x_3	0	$\boxed{\mathbf{7/2}}$	1	-1/2	$9/2 \rightarrow$
x_1	1	1/6	0	1/6	1/2

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	4/21	5/21	13/7
x_2	0	1	2/7	-1/7	9/7
x_1	1	0	-1/21	4/21	2/7

$$B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 6\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}$$

$$\left(x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4\right)=\left(\frac{2}{7},\frac{9}{7},0,0\right) \qquad \Rightarrow \qquad Z^*=\frac{13}{7}$$

Simplex – casos especiais – pl minimização

Problemas de minimização (basta multiplicar a Função Objetivo por -1)

$$
\begin{array}{llll}
\min Z = & x_1 & -2x_2 & \\
s.a & 2x_1 & +x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\max -Z = & -x_1 & +2x_2 & \\
s.a & 2x_1 & +x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Solução: $(x_1, x_2) = (0{,}20)$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
-Z	1	-2 $\downarrow$			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	$\boxed{3}$		1	60 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
-Z	5/3			2/3	40
x_3	5/3		1	-1/3	20
x_2	1/3	1		1/3	20

Simplex – casos especiais – Solução Única

Problema com única solução (quando no quadro ótimo $\bar{c}_j > 0$, para toda variável x_j não básica)

$$\begin{aligned}
\max\ Z = \ & x_1 + 2x_2 \\
s.a \quad & 2x_1 + x_2 \le 40 \\
& x_1 + 3x_2 \le 60 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

<u>Solução única</u> $(x_1, x_2) = (12{,}16)$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	$-2\downarrow$			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	$\boxed{3}$		1/3	$60\rightarrow$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	$-1/3\downarrow$			2/3	40
x_3	$\boxed{5/3}$		1	-1/3	$20\rightarrow$
x_2	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			1/5	3/5	44
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Simplex – casos especiais – Soluções Múltiplas

Soluções Múltiplas (quando no quadro ótimo algum $\bar{c}_j = 0$, para x_j não básica)

$$
\begin{array}{llll}
\max Z = & x_1 & +3x_2 & \\
s.a & 2x_1 & +x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Soluções múltiplas $(x_1, x_2) = (0{,}20)$; $(x_1, x_2) = (12{,}16)$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-3 $\downarrow$			0
x_3	2	1	1		40
x_2	1	$\boxed{3}$		1	60 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0 $\downarrow$			1	60
x_3	$\boxed{5/3}$		1	-1/3	20 $\rightarrow$
x_2	1/3	1		1/3	20

Solução básica viável ótima alcançada

x_1 é VNB com coeficiente nulo na função o objetivo ($\bar{c}_1 = 0$)

Colocando na base x_1 para determinar a outra solução ótima

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z				1	60
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Outra solução básica viável ótima. Observe que o valor da função objetivo não mudou.

Simplex – casos especiais – Solução Ilimitada

Solução Infinita – Solução Ilimitada (quando a solução ainda não é ótima porém não há variável candidata para sair da base)

$$\begin{array}{llll} \max Z = & x_1 & +2x_2 & \\ s.a & -\frac{1}{3}x_1 & +x_2 & \leq 40 \\ & -x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Solução ilimitada

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2↓			0
x_3	-1/3	1	1		40
x_4	-1	$\boxed{3}$		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-5/3↓			2/3	40
x_3	0		1	-1/3	20
x_2	-1/3	1		1/3	20

Simplex – casos especiais – Empate na Entrada

Empate na Entrada (escolha qualquer variável para entrar na base)

$$
\begin{array}{llll}
\max Z = & 2x_1 & +2x_2 & \\
s.a & 2x_1 & +x_2 & \leq 40 \\
 & x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Solução: $(x_1, x_2) = (12{,}16)$

A) x_1 entra na base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2 $\downarrow$	-2			0
x_3	$\boxed{2}$	1	1		40 $\rightarrow$
x_4	1	3		1	60

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z		-1 $\downarrow$	1	0	40
x_1	1	1/2	1/2		20
x_4		$\boxed{5/2}$	-1/2	1	40 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			4/5	2/5	56
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

B) x_2 entra na base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2	-2 $\downarrow$			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	$\boxed{3}$		1	60 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-4/3 $\downarrow$			2/3	40
x_1	$\boxed{5/3}$		1	-1/3	20 $\rightarrow$
x_4	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			4/5	2/5	56
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Simplex – casos especiais – Degeneração

Empate na Saída – Degeneração (quando uma variável entra na base com valor nulo)

$$\begin{array}{llll} \max Z = & x_1 & +2x_2 & \\ s.a & 2x_1 & +2x_2 & \leq 40 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 60 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

<u>Solução</u>: $(x_1, x_2) = (0,20)$

A) x_3 sai da base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2			0
x_3	2	2	1		40
x_4	1	3		1	60

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	1	0	40
x_2	1	1	1/2		20
x_4	-2		-3/2	1	0

B) x_4 sai da base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2			0
x_3	2	2	1		40
x_4	1	3		1	60

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1/3	0		2/3	40
x_3	4/3		1	-2/3	0
x_2	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			1/4	1/2	40
x_1	1		3/4	-1/2	0
x_2		1	-1/4	½	20

Note que a variável básica x_1 é nula (b_1= 0).
Isso sempre ocorre quando houver empate na saída.