

Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia de Produção

Tese de Doutorado

# **Análise da Eficiência Técnica em Ambiente Difuso**

Volmir Eugênio Wilhelm, M.Eng  
Doutorando

Edgar Augusto Lanzer, Ph.D  
Orientador

Florianópolis - SC  
Fevereiro de 2000

# Análise da Eficiência Técnica em Ambiente Difuso

**Volmir Eugênio Wilhelm**

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Produção e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

Banca Examinadora:

---

Prof. Ricardo Miranda Barcia, Dr  
Coordenador do Curso

---

Prof. Edgar Augusto Lanzer, PhD  
Orientador

---

Prof. Aran Tcholakian Morales, Dr  
Examinador Externo, UNISUL

---

Prof. Celso Carnieri, Dr  
Examinador Externo, UFPR

---

Prof. Jair dos Santos Lapa, Dr  
Examinador, UFSC

---

Luiz Toresan, Dr  
Moderador, EPAGRI

---

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr  
Examinador, UFSC

## Agradecimentos

- Agradeço a DANIELLE pelo apoio e pelo carinho recebidos durante a realização deste trabalho.
- Aos meus pais, CELINA e EDVINO, exemplos de determinação, de coragem e de luta.
- A HELENA MARIA pelo tempo dispendido ao pesquisar artigos necessários para continuidade do trabalho.
- Ao Prof. EDGARD AUGUSTO LANZER, pela orientação prestada.
- Ao Prof. JAIR LAPA pela valiosa co-orientação.
- Aos Prof. CARLOS ERNANI FRIES e CARLOS HENRIQUE DOS SANTOS pelas sugestões que enriqueceram em muito este trabalho.
- Aos Prof. FLORINDA MIYAÒKA, CELSO CARNIERI e TEREZINHA ARNS STEINER pelo incentivo.
- Ao CNPQ e a CAPES pelo apoio financeiro recebido em forma de bolsa de estudos.

“Todos os que meditaram a arte de governar os homens, se convenceram de que o destino de um país depende da educação dos jovens.”

(Aristóteles)

## Resumo

Na década de 1950 Debreu e Farrell definiram a medida da eficiência técnica de um produtor como sendo a unidade menos a máxima redução radial do consumo tal que o produtor possa continuar a fabricar os mesmos produtos. Em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes-CCR desenvolveram uma medida radial da eficiência técnica e formularam a abordagem *Data Envelopment Analysis*-DEA constituindo um passo fundamental em relação a operacionalização do cálculo de índices da eficiência técnica através de programação matemática. Outras medidas da eficiência técnica derivados da medida de CCR foram desenvolvidas, destacando-se a medida radial de Banker, Charnes e Cooper [1984], a medida radial *Free Disposal Hull*-FDH de Deprins, Simar e Tulkens [1984], as medidas não radiais e as medidas de Girod [1996] aplicáveis quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

Neste trabalho propõem-se duas medidas para analisar a eficiência técnica em ambiente difuso, ou seja, quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas. A primeira medida, denominada de CCR<sub>g</sub>, é uma generalização da medida de CCR e será aplicável quando as quantidades consumidas e produzidas não são conhecidas com precisão e podem ser expressas através de números difusos do tipo *LR*. Com esta medida analisa-se a eficiência técnica para diferentes níveis cortes  $\mu$  das quantidades difusas dos fatores de produção, tais como 0; 0, 1; ...; 1. Se  $\mu = 1$ , então a medida sugerida coincide com a medida CCR.

A segunda medida sugerida, a medida FDH<sub>g</sub>, é uma generalização da medida FDH. Esta nova medida é aplicável nas situações em que os planos de produção observados podem ser contraídos e expandidos. As contrações ocorrem na direção da maior taxa e as expansões ocorrem na direção da menor taxa do retorno de escala dos planos de produção observados. Os planos de produção observados podem então ser vistos como sendo difusos se forem associados: a) grau de realismo igual a zero aos planos de produção construídos a partir das contrações e das expansões limites; b) grau de realismo pertencentes a  $(0, 1)$  quando as contrações e as expansões são menores que as contrações/expansões limites; c) grau de realismo igual a 1 se os planos construídos coincidirem com os observados (isto é, para contrações e expansões nulas). Neste cenário pode-se então analisar a eficiência técnica dos planos de produção observados considerando diferentes graus de realismo dos planos pertencentes a tecnologia de produção (tal como  $\{0; 0, 1; \dots; 1\}$ ), sugerindo que quanto maior o realismo mais realista é o índice da eficiência técnica calculado. Se o realismo mínimo é igual a 1, então as medidas FDH<sub>g</sub> e FDH coincidem.

# Abstract

In the 1950's Debreu and Farrell defined the measure of the technical efficiency of a producer as one minus the maximum radial reduction in inputs such that producer can continue to produce the same outputs. In 1978, Charnes, Cooper and Rhodes-CCR developed a radial measure of the technical efficiency and the Data Envelopment Analysis-DEA approach, which became a basic step for the calculus of the technical efficiency index through mathematical programming. With the development of DEA other models were formulated, namely the Banker, Charnes and Cooper [1984] radial measure, Deprins, Simar and Tulkens [1984] Free Disposal Hull-FDH measure, the nonradial measures and measures of Girod [1996] applicable when inputs and outputs are fuzzy quantities.

In this work we propose two measures to analyse the technical efficiency when inputs and outputs are fuzzy quantities. The first measure (CCRG measure) is a generalization of the CCR measure and is applicable when the inputs and outputs quantities are not known precisely and can be expressed through fuzzy numbers of the type  $LR$ . With this measures the efficiency indexes are calculated for different  $\mu$ -levels cuts of the production factors, such that  $0; 0; 1; \dots; 1$ . If  $\mu = 1$ , then the measures CCRg and CCR coincide.

The second suggested measure, the FDHg measures, is a generalization of the FDH measure. The new measure is applicable when the observed production plans can be contracted and expanded. The contractions occur towards the highest rate and the expansion towards the lowest rate of the return to scale of the observed production plans. The observed production planes can be seen as being fuzzy if we associate: a) degree of realism equal 0 (not feasible) to the production planes constructed from the threshold contractions and expansions; b) degrees of realism belonging to  $(0, 1)$  when the contractions and expansions are lower; c) degrees of realism equal 1 if the planes constructed match the observed ones (without contractions/expansions). In this scenario, we can analyze the technical efficiency considering different degrees of realism (such as  $0; 0, 1; \dots; 1$ ), suggesting as much as greater the realistic of the planes constructed, more realistic is the technical efficiency index calculated. When the realism is 1, then the FDHg and FDH measures coincide.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos do Trabalho . . . . .	2
1.2 Importância do Trabalho . . . . .	2
1.3 Metodologia . . . . .	3
1.4 Definições . . . . .	3
1.5 Estrutura do Trabalho . . . . .	6
<b>2 Medidas da Eficiência Técnica</b>	<b>7</b>
2.1 Eficiência Técnica . . . . .	9
2.2 Medida Radial da Eficiência Técnica . . . . .	14
2.2.1 Orientação Consumo . . . . .	14
2.2.2 Orientação Produção . . . . .	16
2.3 Medida Não Radial da Eficiência Técnica . . . . .	18
2.4 A Medida <i>Free Disposal Hull</i> -FDH . . . . .	21
2.5 Medidas da Eficiência Técnica Quando as Quantidades Consumidas e Produzidas são Imprecisas . . . . .	24
2.5.1 Medida de Sengupta . . . . .	25
2.5.2 Medidas de Girod . . . . .	25
2.5.3 Medida de Ueda e Kamimura . . . . .	28
2.6 Considerações Finais . . . . .	29
<b>3 Desenvolvimento de Medidas para Análise da Eficiência Técnica em Ambiente Difuso</b>	<b>30</b>
3.1 Desenvolvimento da Medida CCRg . . . . .	31
3.1.1 Relação de Ordem entre Números Difusos . . . . .	31
3.1.2 A Programação Linear Difusa de Campos e Verdegay . . . . .	33
3.1.3 A Medida CCRg . . . . .	34
3.2 Desenvolvimento da Medida FDHg . . . . .	36
3.2.1 Retornos de Escala . . . . .	37
3.2.2 Estimando a Produção . . . . .	40
3.2.3 Limites das Contrações e das Expansões . . . . .	41
3.2.4 Planos de Produção Difusos . . . . .	42
3.2.5 A Medida FDHg . . . . .	43

3.3	Considerações Finais . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Aplicação das Medidas Propostas</b>	<b>54</b>
4.1	Aplicação da Medida CCRg . . . . .	54
4.2	Aplicação da Medida FDHg . . . . .	56
4.2.1	Aplicação I . . . . .	58
4.2.2	Aplicação II . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusões e Recomendações</b>	<b>66</b>
5.1	Conclusões . . . . .	67
5.1.1	Conclusões da Aplicação da Medida CCRg . . . . .	67
5.1.2	Conclusões da Aplicação da Medida FDHg . . . . .	67
5.2	Recomendações . . . . .	68
	<b>Bibliografia</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Programação Linear Difusa</b>	<b>74</b>
A.1	Conjuntos Difusos . . . . .	74
A.1.1	Números Difusos . . . . .	75
A.1.2	Tomada de Decisão em Ambiente Difuso . . . . .	78
A.2	Programação Linear Difusa . . . . .	79
A.2.1	O Modelo Simétrico de Zimmermann . . . . .	80
A.2.2	O Modelo Não Simétrico de Carlsson e Korhonen . . . . .	81
<b>B</b>	<b>Tabelas de Dados</b>	<b>84</b>
<b>C</b>	<b>Lista de Símbolos Mais Usados</b>	<b>86</b>



# Lista de Figuras

2.1	Os conjuntos produção e consumo da tecnologia. . . . .	11
2.2	A tecnologia de produção. . . . .	11
2.3	Retornos de escala caracterizados pelo gráfico da tecnologia. . . . .	12
2.4	Medida radial da eficiência técnica orientação consumo supondo retornos constantes de escala. . . . .	15
2.5	Comparação das eficiências radiais orientação consumo supondo retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala. ( <i>Fonte: Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.67,69</i> ) . . . . .	16
2.6	Medida radial da eficiência técnica orientação produção supondo retornos constantes de escala. . . . .	17
2.7	Comparação entre as eficiências radiais orientação produção supondo retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala. ( <i>Fonte: Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.102,104</i> ) . . . . .	18
2.8	Eficiência técnica não radial orientação consumo considerando retornos constantes de escala. ( <i>Fonte: Charnes, Cooper e Rhodes, 1978, p.436</i> ) . . . . .	20
2.9	As fronteiras de produção CCR e FDH. . . . .	23
2.10	Função de pertinência dos insumos e dos produtos. ( <i>Fonte: Girod, 1996, p.91</i> ) . . . . .	26
2.11	Fatores de produção expressos através de números difusos do tipo $LR$ . . . . .	29
3.1	As tecnologias $TP_{BCC}$ e $TP_{FDH}$ e os planos de produção observados. . . . .	36
3.2	Imagem de $\Pi(3,7) \cap TP_{BCC}$ . . . . .	38
3.3	A tecnologia de produção $TP_{FDH}^{\mu}$ , $0 < \mu < 1$ . . . . .	46
4.1	A tecnologia de produção $TP_{FDH}$ (Aplicação I da medida FDHg). . . . .	59
4.2	As tecnologias de produção $TP_{BCC}$ e $TP_{FDH}^{\mu=0}$ (Aplicação I da medida FDHg). . . . .	59
4.3	Representação gráfica de $TP_{FDH}$ (Aplicação II da medida FDHg). . . . .	62
4.4	Representação gráfica de $TP_{BCC}$ e de $\Pi(P_4)$ (Aplicação II da medida FDHg). . . . .	64
4.5	Imagem de $TP_{BCC} \cap \Gamma(P_4)$ (Aplicação II da medida FDHg). . . . .	64
4.6	Tecnologia de produção $TP_{FDH}^{\mu=0}$ (Aplicação II da medida FDHg). . . . .	65
A.1	Número difuso do tipo $L$ . . . . .	76
A.2	Número difuso do tipo $R$ . . . . .	77
A.3	Número difuso do tipo $LR$ . . . . .	77

# Lista de Tabelas

4.1	Índices de eficiência (Aplicação da medida CCRg) . . . . .	56
4.2	As elasticidades do retorno de escala e os limites das contrações e expansões (Aplicação I da medida FDHg) . . . . .	60
4.3	Resultados considerando um grau de realismo igual a 0,7 (Aplicação I da medida FDHg) . . . . .	60
4.4	Eficiências considerando diferentes graus de realismo (Aplicação I da medida FDHg) . . . . .	60
4.5	As elasticidades do retorno de escala e os limites das contrações e expansões (Aplicação II da medida FDHg) . . . . .	63
4.6	Resultados considerando um grau de realismo igual a 0,7 (Aplicação II da medida FDHg) . . . . .	63
4.7	Eficiências considerando diferentes graus de realismo (Aplicação II da medida FDHg) . . . . .	63
B.1	Insumos difusos. ( <i>Fonte: Ueda, Kamimura, [1996, p.2]</i> ) . . . . .	84
B.2	Produtos difusos. ( <i>Fonte: Ueda, Kamimura, [1996, p.3]</i> ) . . . . .	84
B.3	Insumos e produtos (Aplicação I da medida FDHg) . . . . .	85
B.4	Insumos e produtos (Aplicação II da medida FDHg) . . . . .	85

# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos, países e empresas têm adquirido cada vez mais a consciência de que melhorias na produtividade<sup>1</sup> constituem-se em eficiente atalho para o progresso e o crescimento econômico. Para atingir maiores níveis de produtividade, administradores lançam mão de várias estratégias, dependendo principalmente da tecnologia disponível, do meio em que a produção ocorre e da eficiência do processo produtivo [Lovell, 1993, p.3]. A tecnologia compreende a maneira como a empresa converte os insumos em produtos. O meio em que a produção ocorre está relacionado com a localização geográfica. A eficiência produtiva do processo produtivo apresenta duas componentes: a eficiência técnica e a eficiência alocativa. A componente eficiência alocativa refere-se à habilidade do gerenciador de combinar, à luz dos preços, os insumos e os produtos numa proporção ótima. A componente eficiência técnica, objeto de estudo deste trabalho, refere-se à habilidade de transformar insumos em produtos [Lovell, 1993, p.9-10].

A mensuração da eficiência técnica originou-se da definição de eficiência técnica de Koopmans e da medida desenvolvida por Debreu [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.7]. Segundo Koopmans [*apud* Lovell, 1993, p.10] uma organização é eficiente tecnicamente se e somente se: 1) o aumento da produção de qualquer produto implica na redução do nível de produção de outro produto ou o aumento do consumo de pelo menos um insumo; 2) e se a redução do consumo de qualquer insumo implica no aumento do consumo de outro insumo ou a redução da produção de pelo menos um produto. Em 1951, Debreu [*apud* Russell, 1998, p.7 e 28] introduziu a primeira medida radial da eficiência técnica em termos de um “coeficiente de utilização dos recursos”, definindo-a como sendo a unidade menos a máxima redução proporcional<sup>2</sup> do consumo observado tal que o produtor continue a fabricar a mesma quantidade dos produtos. Um índice igual a

---

<sup>1</sup>É a medida de produtos físicos produzidos a partir do uso de um nível fixo de insumos. Isto pode incluir todos os insumos e todos os produtos ou um subconjunto de insumos e de produtos. Na presença de múltiplos insumos e/ou produtos deve-se reduzi-los a escalares positivos.

<sup>2</sup>A redução proporcional é a redução numa mesma proporção do consumo de todos os insumos.

unidade indica que o produtor é eficiente tecnicamente; um índice menor que a unidade indica a presença de ineficiência técnica e o consumo dos recursos pode ser reduzido. Em 1957 Farrell desenvolveu um método de programação matemática não paramétrica e empregou a medida de Debreu para mensurar índices de ineficiência.

A contribuição de Debreu/Farrell foi ignorada por mais de duas décadas e redescoberta em 1978 por Charnes, Cooper e Rhodes-CCR. Estes três pesquisadores estenderam a metodologia para múltiplos insumos e múltiplos produtos, desenvolvendo programas lineares para calcular índices radiais da eficiência técnica. CCR denominaram a metodologia de *Data Envelopment Analysis*-DEA, porque no processo de cálculo das eficiências é gerada uma ‘envoltória’ formada por facetas (definidas por hiperplanos) que são constituídas de planos de produção eficientes tecnicamente. Um plano de produção observado pertencente à envoltória é eficiente tecnicamente e a ele é atribuído grau de eficiência 1; um plano de produção pertencente ao interior da envoltória (envolvido pela envoltória) é ineficiente e seu índice de eficiência, diferente de 1, é obtido comparando-se o plano com sua projeção na envoltória. Várias medidas da eficiência técnica foram construídas após o desenvolvimento de DEA, destacando-se a medida de Banker, Charnes e Cooper [1984], a medida *free disposal hull*-FDH de Deprins, Simar e Tulkens [1984], as medidas não radiais e as medidas difusas de Girod [1996] que avaliam a eficiência técnica quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

## 1.1 Objetivos do Trabalho

Analisando a evolução da mensuração da eficiência técnica verifica-se que, após 1978, ocorreu um grande progresso na criação de novas metodologias e medidas da eficiência técnica baseadas em programação matemática. Atualmente os pesquisadores concentram seus esforços para extensões destas medidas às mais variadas situações da vida real.

O objetivo deste trabalho é desenvolver, as medidas CCRg (uma generalização da medida de CCR) e FDHg (uma generalização da medida *free disposal hull*) aplicáveis na mensuração de índices da eficiência técnica em ambiente difuso, ou seja, quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

## 1.2 Importância do Trabalho

Pelas publicações que tratam do planejamento da produção, observa-se que empresas e organizações de vários países estão empenhadas em melhorar seu processo produtivo e em aumentar os níveis de produtividade. Constantemente são reportados resultados de análise de eficiência e de produtividade envolvendo as mais diversas áreas, como a financeira, da saúde,

da educação e a agrícola. No Brasil, verifica-se que há uma crescente preocupação com os índices de eficiência e de produtividade, tanto na área pública como na privada. Observa-se, que principalmente o governo federal vem concentrando esforços com o intuito de aumentar a produtividade e a eficiência dos serviços prestados.

Em vista dos empenhos mencionados, o conjunto das medidas da eficiência técnica disponível deve ser o mais amplo possível. Deve-se ter medidas que possam ser aplicadas quando os fatores de produção são quantidades determinísticas e outras medidas quando forem quantidades difusas.

### 1.3 Metodologia

A medida CCRg será uma generalização da medida radial da eficiência técnica de CCR baseada na programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989]. O modelo de Campos e Verdegay, por sua vez, é baseado nas relações de ordem entre números difusos definidas por Ramík e Římánek [1985]. O cálculo dos índices da eficiência consiste então em comparar as quantidades difusas do consumo e da produção para diferentes conjuntos corte  $\mu$  destas quantidades, tal como 0; 0, 1; ...; 1.

No cálculo de índices da eficiência técnica via medida FDHg, o consumo e a produção de cada plano de produção observado poderá ser contraído e expandido por escalares positivos  $a \in (0, \alpha)$ ,  $\alpha < 1$  e  $b \in [0, \beta)$ ,  $\beta < +\infty$  respectivamente, onde  $(\alpha \times 100)\%$  e  $(\beta \times 100)\%$  são as variações máximas. Atribuindo diferentes graus de realismo aos planos construídos a partir das contrações e das expansões dos planos observados, estes últimos podem ser vistos como sendo difusos. Para calcular a eficiência pode-se então estipular graus mínimos de realismo, tal como 0; 0, 1; ...; 1, sugerindo que quanto maior o realismo mais próximo da realidade está o índice da eficiência técnica calculado.

### 1.4 Definições

Nesta seção serão estabelecidas as definições de alguns termos específicos da área de produção e constantemente utilizados neste texto. A maioria das definições foram extraídas do relatório de *Steering Committee for the Review of Commonwealth/State Service Provison* [1997].

1. **Benchmark:** *Benchmark* é algo que pode ser usado como padrão e que serve de referência para outras coisas.
2. **Conjunto difuso  $\tilde{A}$ :** Se  $X$  é uma coleção de objetos denotados genericamente por  $x$ , então o conjunto difuso  $\tilde{A}$  em  $X$  é um conjunto de pares ordenados  $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ .

$\mu_{\tilde{A}}(x)$  é chamado de função de pertinência ou grau de pertinência (também denominada de grau de compatibilidade ou grau de certeza) de  $x$  em  $\tilde{A}$  que mapeia  $X$  no espaço de pertinência  $P$ . Geralmente  $P = [0, 1]$ , porém se  $P = \{0, 1\}$ , então  $\tilde{A}$  não é difuso e  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  é idêntica à função característica de um conjunto não difuso [Zimmermann, 1991, p.12 e 13].

3. **Conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{A}$ :** O conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto difuso  $\tilde{A}$  e que apresentam pelo menos o grau de pertinência  $\mu$  é chamado de conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{A}$ . O conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{A}$ ,  $A_\mu = \{u \in R : \mu_{\tilde{A}}(u) \geq \mu\}$  é um subconjunto convexo de  $R$  tal que existe  $m \in R$  com  $\mu_{\tilde{A}}(m) = 1$ . Quando  $m$  é único, a quantidade difusa é denominada de número difuso, e se  $m$  não é único geralmente a quantidade difusa é denominada de intervalo difuso [Zimmermann, 1991, p.14].
4. **Conjunto eficiência:** É um subconjunto da fronteira de produção formado pelos planos de produção eficientes tecnicamente, segundo a definição de Koopmans. Para estes planos de produção, um aumento em qualquer produto requer uma redução em pelo menos um outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo, e uma redução em qualquer insumo requer um aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto.
5. **Data Envelopment Analysis-DEA:** Uma técnica de programação linear que identifica as melhores práticas de uma amostra de produtores e mede a eficiência técnica baseado na diferença entre o nível dos insumos (produtos) de um produtor observado e o nível dos insumos (produtos) daquele que apresenta a melhor prática mantendo fixo o nível dos produtos (insumos).
6. **Decision Making Unit-DMU:** As organizações ou unidades de produção ou produtores a serem analisadas num estudo de análise de eficiência ou produtividade. As organizações podem ser públicas ou privadas, com ou sem fins lucrativos.
7. **Eficiência alocativa:** Indica se o produtor emprega os insumos à luz dos preços (dos insumos) numa proporção ótima que minimiza os custos da produção.
8. **Eficiência técnica:** Pode ser obtida pela comparação entre os níveis dos insumos e dos produtos observados e os níveis ótimos. A comparação pode ser através da razão entre a produção observada e o potencial máximo atingível para um dado consumo, ou a razão entre a quantidade dos insumos observada e o potencial mínimo exigido para produzir uma quantidade fixa dos produtos.

9. **Fatores de produção:** São os insumos consumidos e os produtos gerados por um produtor. O conjunto dos fatores de produção também é denominado de plano de produção ou vetor insumo-produto.
10. **Folgas:** São as quantidades extras a serem reduzidas (aumentadas) nos insumos (produtos) para que o produtor atinja o conjunto eficiência após todos os insumos (produtos) terem sido reduzidos (aumentados) para atingir a isoquanta. Após as reduções (aumentos) adicionais, o plano de produção resultante pertence ao conjunto eficiência e portanto é eficiente tecnicamente segundo a definição de Koopmans.
11. **Fronteira de produção:** É a curva que representa a quantidade mínima de um insumo (ou combinação de insumos) requeridos para produzir uma dada quantidade de produtos (ou combinação de produtos). Também pode ser a curva que representa a quantidade máxima de produtos (ou combinação de produtos) produzidos a partir de uma dado nível de insumos (ou combinação de insumos).
12. **Isoquanta:** É a curva que representa a quantidade de insumos necessários para produzir um nível fixo de produtos. Diferentes produtores localizados na mesma isoquanta produzem o mesmo nível dos produtos podendo empregar níveis diferentes dos insumos.
13. **Medida *Free Disposal Hull-FDH*:** Medida de eficiência técnica derivada da medida BCC cuja condição de convexidade (exigida na medida BCC) não necessita ser atendida. Nesta medida os produtores *benchmarks* são produtores observados na prática.
14. **Melhores práticas:** É o conjunto de práticas de gerenciamento e de trabalho, de um grupo de organizações similares, que resultam no potencial de produção mais alto ou na quantidade ótima de combinação dos produtos para um dado nível fixo de combinação de insumos.
15. **Número difuso:** Um número difuso  $\tilde{M}$  é um conjunto difuso convexo normalizado contido na reta dos números reais  $R$  tal que: i) existe um único  $x_o \in R$ . com  $\mu_{\tilde{M}}(x_o) = 1$  ( $x_o$  é chamado de valor médio de  $\tilde{M}$ ); ii) a função  $\mu_{\tilde{M}}(x)$  é contínua por partes. [Zimmermann, 1991, p.57]
16. **Organizações:** São empresas públicas ou privadas com ou sem fins lucrativos. As empresas podem ser bancos, hospitais, bibliotecas, fazendas agrícolas, universidades, fundações e lojas de comércio.
17. **Plano de produção:** É o conjunto dos insumos utilizados e dos produtos gerados num determinado período de tempo por uma organização.

18. **Produtividade:** É a medida de produtos físicos produzidos a partir do uso de um nível fixo de insumos. Isto pode incluir todos os insumos e todos os produtos ou um subconjunto de insumos e de produtos. Na presença de múltiplos insumos e/ou produtos deve-se reduzi-los a escalares positivos.
19. **Quantidade crisp:** É um número exato, sem imprecisões e probabilidades associadas.
20. **Quantidade difusa:** É um conjunto difuso.
21. **Retorno de escala:** Relação entre produtos e insumos. Retornos podem ser constantes, crescentes ou decrescentes, dependendo se a produção cresce na mesma proporção, numa proporção maior ou numa proporção menor que os insumos, respectivamente.
22. **Tecnologia de produção:** Relação incorporada no processo de produção que determina a maneira de como os insumos podem ser convertidos em produtos.

## 1.5 Estrutura do Trabalho

O trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos.

No primeiro capítulo é apresentada uma breve introdução ao tema, são estabelecidos os problemas a serem abordados e uma breve noção de como serão resolvidos. Por último apresenta-se uma justificativa do trabalho e a definição de alguns termos específicos da área da produção utilizados no texto

O capítulo II descreve tecnologias de produção e algumas medidas radiais, não radiais e difusas da eficiência técnica.

No capítulo III serão desenvolvidas as duas novas medidas propostas para análise da eficiência técnica.

O capítulo IV consiste na explanação da aplicação das medidas definidas em três conjuntos de planos de produção.

No capítulo V apresentam-se as conclusões conseqüentes do desenvolvimento do trabalho e as recomendações para futuras pesquisas.



## Capítulo 2

# Medidas da Eficiência Técnica

Quando se discute o desempenho de uma empresa, é comum descrevê-la como sendo mais ou menos ‘eficiente’ ou mais ou menos ‘produtiva’ [Lovell, 1993, p.3]. A eficiência possui duas componentes: a componente referente à habilidade do gerenciador em transformar insumos em produtos denominada de eficiência técnica, e a componente referente à habilidade do gerenciador em definir proporções ótimas dos insumos e dos produtos à luz dos preços praticados no mercado, denominada de eficiência alocativa. A mensuração da eficiência técnica originou-se da definição de eficiência técnica de Koopmans e da medida desenvolvida por Debreu [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.7]. Segundo Koopmans [*apud* Lovell, 1993, p.10] uma organização é eficiente tecnicamente se e somente se um aumento em qualquer produto gerado pela organização requer a redução no nível de outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo empregado; e se uma redução em qualquer insumo empregado por ela implica num aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto. Em 1951 Debreu [*apud* Russell, 1998, p.7 e 28] introduziu a primeira medida radial da eficiência técnica em termos de um “coeficiente de utilização dos recursos”, definindo-a como sendo a unidade menos a máxima redução equiproporcional do consumo de todos os insumos observados tal que o produtor possa continuar a fabricar os mesmos produtos. Um índice igual à unidade indica que o produtor é eficiente tecnicamente; um índice menor que a unidade indica ineficiência técnica e que o consumo de todos os insumos pode ser reduzido na mesma proporção. Em 1957 Farrell desenvolveu um método de programação matemática não paramétrica e empregou a medida de Debreu para mensurar índices de ineficiência em fazendas agrícolas dos Estados Unidos.

A definição de Koopmans sugere a comparação dos níveis dos insumos e dos produtos praticados com os níveis ótimos [Lovell, 1993, p.4] de uma empresa. Por vários anos o maior problema em se mensurar a eficiência técnica era a determinação dos níveis ótimos de uma empresa até que em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes-CCR formularam a abordagem *Da-*

ta *Envelopment Analysis*-DEA para mensurar radialmente índices da eficiência técnica. Com o auxílio de programação matemática não paramétrica, DEA gera uma envoltória dos planos de produção observados. Todos os planos de produção pertencentes a esta envoltória, que é a fronteira de produção, são eficientes tecnicamente e seus níveis de consumo e de produção são ótimos<sup>1</sup>. Os índices da eficiência técnica associados aos demais planos de produção são os menores escalares positivos que contraem os consumos (ou os maiores escalares que expandem as produções) projetando os planos sobre planos *benchmarks*.

Após o desenvolvimento de DEA foram elaboradas outras medidas da eficiência técnica, como a medida radial de Banker, Charnes e Cooper-BCC [1984] e a medida radial de Deprins, Simar e Tulkens-DST [1984]. As medidas de CCR, BCC e DST deferenciam-se quanto a obtenção dos planos de produção *benchmarks* que constituem a envoltória. Na medida de CCR os *benchmarks* são gerados por combinações lineares positivas (e por isso é designada de *free disposal conical hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida radial de BCC as combinações lineares que geram os *benchmarks* são convexas (recebendo denominação de *convex free disposal hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida de DST os *benchmarks* são planos de produção observados na prática e portanto a fronteira de produção é constituída unicamente por planos observados, recebendo a denominação de *free disposal hull*.

Segundo Lovell [1993, p.13] as medidas radiais da eficiência técnica não são perfeitas pois em várias situações não coincidem com a definição de eficiência técnica de Koopmans. Empregando a notação de Färe, Grosskopf e Lovell [1994, p.26 e 39], seja a tecnologia de produção representada pela correspondência consumo  $C(y^o) = \{x : (x, y^o) \text{ é viável}\}$ , onde  $x \in R^N$  é um vetor de quantidades de insumos e  $y^o \in R^M$  é o vetor da quantidade fixa dos produtos (qualquer par  $(x, y^o)$ , com  $x \in C(y^o)$ , é um plano de produção viável). Sejam os subconjuntos  $Isoq_{C(y^o)} = \{x \in C(y^o) : \lambda x \notin C(y^o) \text{ se } \lambda < 1\}$  que é o conjunto isoquanta de  $C(y^o)$  e  $Efc_{C(y^o)} = \{x \in C(y^o) : x' \leq x \implies x' \notin C(y^o)\}$  que é o subconjunto eficiência de  $C(y^o)$ . Tem-se que  $Efc_{C(y^o)} \subseteq Isoq_{C(y^o)}$ . A definição de Koopmans é rigorosa e requer que o produtor eficiente tecnicamente pertença simultaneamente aos subconjuntos  $Efc_{C(y^o)}$  e  $Isoq_{C(y^o)}$ , porém as medidas radiais identificam como eficientes os planos de produção do conjunto  $Efc_{C(y^o)}$  e qualquer outro plano locado no conjunto  $Isoq_{C(y^o)}$  ‘fora’ do subconjunto eficiência.

Para eliminar esta deficiência das medidas radiais, várias medidas alternativas (denominadas de medidas não radiais) da eficiência técnica foram apresentadas com o objetivo de torná-las Koopmans [Lovell, 1993, p.14]. Lovell alerta que todas as medidas não radiais sugeridas tem suas deficiências, porém verifica-se na literatura que a mais empregada é a de Charnes,

---

<sup>1</sup>Neste trabalho os planos de produção pertencentes a fronteira de produção serão denominados de planos *benchmarks*.

Cooper e Rhodes [1978]. A solução sugerida por eles consiste em contrair radialmente os insumos ou expandir radialmente os produtos alocando o plano de produção no conjunto isoquanta e em seguida realocá-lo tal que passe a pertencer ao conjunto eficiência. O segundo passo pode ser obtido através da inclusão das variáveis de folga dos insumos e dos produtos na função objetivo do programa linear que calcula o índice da eficiência técnica radial o que leva a uma redução adicional do consumo de alguns insumos e/ou aumento da produção de alguns produtos.

Quanto às medidas da eficiência técnica comentadas anteriormente pressupõe-se a inexistência de incerteza em relação as quantidades consumidas e produzidas, ou seja, são consideradas quantidades determinísticas. Entretanto, em várias situações da vida real (p.ex. Campos e Verdegay [1989], Luhandjula [1989], Girod [1996], Triantis e Eeckaut [1997], Cooper, Park e Yu [1999]) é muito difícil conhecer o valor exato dos mesmos e segundo Triantis e Eeckaut [1997, p.2], na maioria dos estudos relativos a produção, os dados referentes aos planos de produção não podem ser coletados com exatidão e estas imprecisões são devidas ao fato dos sistemas de medição não serem originalmente projetados para o propósito de coletar dados e informações úteis para estudos da produção. Recentemente, a teoria dos conjuntos difusos tem sido proposta como ferramenta capaz de captar imprecisões associadas aos planos de produção [Triantis e Girod, 1998, p.2], sugerindo a avaliação da eficiência técnica em ambiente difuso, ou seja, quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

Para a avaliação da eficiência técnica em ambiente difuso, estão disponíveis alguns modelos que restringem as análises a poucas maneiras de expressar em termos de quantidades difusas os níveis consumidos e produzidos. A primeira medida desenvolvida por Sengupta [1992], não emprega quantidades difusas mas sugere a existência de imprecisões entre os planos de produção, o que é especificado através de restrições difusas no programa linear que mede o índice da eficiência técnica. O segundo trabalho envolvendo planos de produção difusos e a mensuração da eficiência técnica é o de Girod [1996]. Num trabalho mais completo que o de Sengupta, Girod desenvolveu um conjunto de medidas difusas derivadas das medidas de CCR, BCC e da medida FDH. Estas medidas são úteis nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são expressas através de limites inferiores e limites superiores, indicando ou níveis impossíveis de ocorrer na prática ou níveis que facilmente podem ser implementados pelos produtores.

## 2.1 Eficiência Técnica

O conceito de eficiência na produção tem recebido um significado mais preciso na economia depois que Koopmans e Debreu introduziram em 1951 a noção de conjunto produção [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.474], geralmente denominado de tecnologia da produção [Färe,

Grosskopf e Lovell, 1994, p.25]. Segundo a terminologia de Koopmans-Debreu, a tecnologia de produção é a coleção TP de pares  $(x, y)$  onde  $x \in R^N$  é um vetor de quantidades de insumos e  $y \in R^M$  um vetor das quantidades de produtos que possuem a propriedade de serem viáveis<sup>2</sup>

$$TP = \{(x, y) : x \in R^N, y \in R^M; (x, y) \text{ é viável}\}$$

A utilidade da noção de conjunto produção para o propósito deste trabalho é o fato de que nos traz a noção de *fronteira* e de *interior* do conjunto. Assim podem-se distinguir planos de produção pertencentes ao interior da tecnologia de produção, denominados de ineficientes, e aqueles que pertencem à fronteira, denominados de eficientes. Portanto, a eficiência de um plano de produção pode ser calculada em termos da distância entre este e a fronteira [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.475].

A eficiência técnica pode ser calculada segundo orientação consumo e orientação produção. Na orientação consumo procura-se a maior contração possível do consumo (mantendo o nível de produção observado). Na orientação produção procura-se pela maior expansão possível do vetor produção, sem alterar o nível atual de consumo. Devido a estas duas orientações será útil a representação da tecnologia pelos conjunto consumo  $(C(y))$ , conjunto produção  $(P(x))$  e o gráfico da tecnologia de produção (TP).

1.  $C : R_+^M \rightarrow C(y) \in R_+^N \Rightarrow C(y)$  é o conjunto dos vetores consumo que produzem pelo menos o vetor produção  $y$ ;
2.  $P : R_+^N \rightarrow P(x) \in R_+^M \Rightarrow P(x)$  é a coleção dos vetores produção possíveis de serem gerados a partir do consumo de  $x$ ;
3.  $TP = \{(x, y) \in R_+^{N+M} : y \in P(x), x \in R_+^N\} = \{(x, y) \in R_+^{N+M} : x \in C(y), y \in R_+^M\} \Rightarrow TP$  é a coleção de todos os vetores consumo-produção viáveis.

Na figura 2.1 encontram-se ilustrados os conjuntos  $P(x)$ -gráfico (a) e  $C(y)$ -gráfico (b). Na figura 2.2, página 11, o gráfico de TP da tecnologia, que é a área limitada pelo eixo dos  $x$  e a semi-reta  $\vec{0a}$ , e os conjuntos  $P(x^o) = [0, y^o)$  e  $C(y^o) = [x^o, +\infty)$  modelam a mesma tecnologia, porém representam diferentes aspectos da mesma. O conjunto consumo modela substituição de insumos e o conjunto produção modela substituição de produtos. O gráfico modela ambas as substituições e adicionalmente modela a transformação insumo-produto. A característica que  $P(x)$ ,  $C(y)$  e TP têm em comum é a possibilidade das representações de tecnologias em termos de quantidades de insumos e de quantidades de produtos que não envolvem o conhecimento de preços.

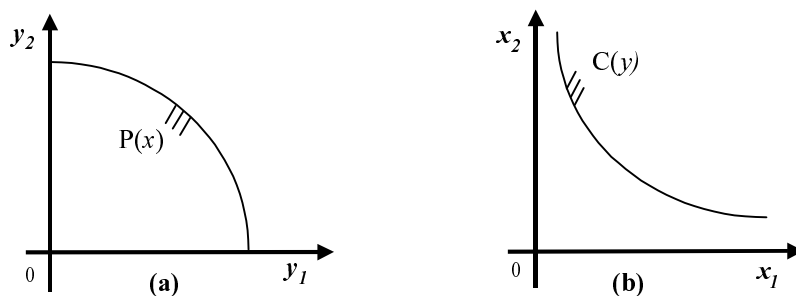


Figura 2.1: Os conjuntos produção e consumo da tecnologia.

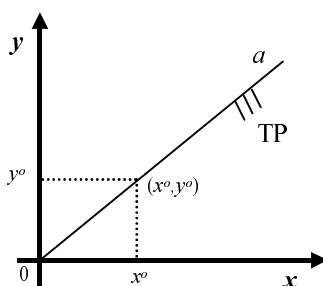


Figura 2.2: A tecnologia de produção.

A superfície do gráfico de TP, além de modelar a transformação insumo-produto, modela também mudanças proporcionais que ocorrem na tecnologia caracterizando o que se chama de retornos de escala. Os seguintes tipos de comportamento de escala exibidos por tecnologias, ilustrados nos três gráficos da figura 2.3, serão considerados neste trabalho.

1. *Retornos Constantes de Escala (RCE)*: se  $TP\theta \equiv TP$ ,  $\theta \in R$ ,  $\theta > 0$ ;
2. *Retornos Não Crescentes de Escala (RNCE)* (também denominado de diseconomia de escala): se  $TP\theta \subseteq TP$ ,  $0 < \theta \leq 1$ , ou seja, se  $TP \subseteq \theta TP$ ,  $\theta \geq 1$ ;
3. *Retornos Não Decrescentes de Escala (RNDE)* (também denominado de economia de escala): se  $TP\theta \subseteq TP$ ,  $\theta \geq 1$ , ou seja se  $TP \subseteq \theta TP$ ,  $0 < \theta \leq 1$ .

Numa tecnologia que exhibe retornos constantes de escala, duplicar o consumo acarreta na duplicação da produção. No caso de exhibir retornos não crescentes de escala a duplicação do nível de consumo geralmente não leva a duplicação da produção, mas sim a um valor abaixo deste. Quando a tecnologia apresenta retornos não decrescentes de escala, na duplicação do consumo geralmente ocorre mais que uma duplicação da produção.

---

<sup>2</sup>O par  $(x, y)$  também é denominado de vetor insumo-produto, ou de fatores de produção, ou ainda de plano de produção.

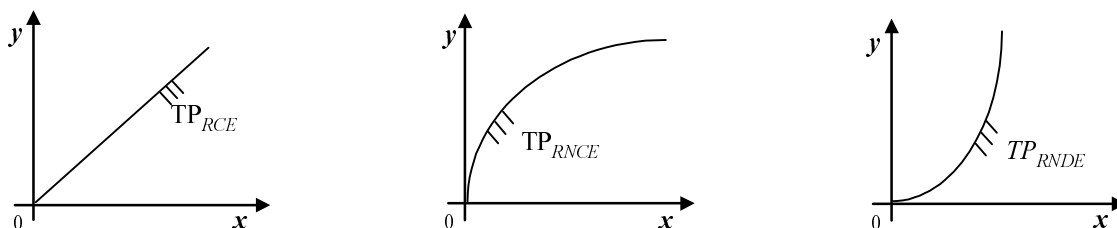


Figura 2.3: Retornos de escala caracterizados pelo gráfico da tecnologia.

Para garantir a existência das medidas da eficiência técnica que serão definidas nas próximas seções, os conjuntos  $C$ ,  $P$  e  $TP$  devem satisfazer as seguintes propriedades [Grosskopf, 1986, p.502; Färe, Grosskopf, Lovell, 1993, p.45, 63, 97]:

- T1.  $TP(x, y)$  é fechado;
- T2.  $0 \notin C(y)$ ;
- T3.  $C(y)$  é fechado;
- T4.  $u \geq x \in C(y) \Rightarrow u \in C(y)$  (propriedade do descarte forte dos insumos);
- T5.  $P(x)$  é fechado e limitado;
- T6.  $w \leq y \in P(x) \Rightarrow w \in P(x)$ , (propriedade do descarte forte dos produtos).

A primeira propriedade indica que para produzir  $y$  é necessário consumir uma quantidade positiva de pelo menos um insumo. T4 indica que o consumo pode ser aumentado sem restrições e T6 indica que se pode reduzir livremente a produção.

O cálculo da eficiência técnica requer ainda a definição de dois subconjuntos de  $C(x)$  em relação aos quais a eficiência técnica é mensurada. Por exemplo, pode-se observar que os planos de produção viáveis de  $C(y)$  são limitados superiormente, e dois subconjuntos contidos nestes limites são<sup>3</sup>:

1. O conjunto isoquanta de  $C(y)$ :  $Isoq_{C(y)} = \{x \in C(y) : \lambda x \notin C(y) \text{ se } \lambda < 1\}$ ,
2. O conjunto eficiência de  $C(y)$ :  $Efc_{C(y)} = \{x \in C(y) : x' \leq x \Rightarrow x' \notin C(y)\}$ <sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Se os insumos não satisfazem a propriedade do descarte forte então convém definir o conjunto de eficiência fraca de  $C(y)$ :  $Efc_{C(y)} = \{x \in C(y) : x' \leq x \Rightarrow x' \notin C(y)\}$ . No estudo desenvolvido neste trabalho o conjunto  $C$  apresenta a propriedade do descarte forte e portanto  $Isoq_{C(y)} \equiv Efc_{C(y)}$  [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.40, 41].

<sup>4</sup>Veja definição de  $\leq$  no apêndice B.

Se  $C(y)$  é fechado não vazio então  $Isoq_{C(y)}$  e  $Efc_{C(y)}$  também são conjuntos não vazios e  $Efc_{C(y)} \subseteq Isoq_{C(y)}$  [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.40]. Podem ser definidos subconjuntos semelhantes em  $P(x)$  e TP.

Mensurar a eficiência técnica orientação consumo do plano  $(x^o, y^o)$  consiste então, em determinar quão longe da fronteira de  $C(y^o)$  está  $x^o$  através de uma projeção de  $x^o$  sobre  $Efc_{C(y^o)}$  ou  $Isoq_{C(y^o)}$  e na orientação produção através de uma projeção de  $y^o$  sobre  $Efc_{P(x^o)}$  ou  $Isoq_{P(x^o)}$ . Dependendo do modelo de projeção, da tecnologia de produção e da parte da fronteira sobre a qual o plano será projetado, podem-se obter diferentes medidas da eficiência técnica. Em 1978 Färe e Lovell, [1978, p.157], sugeriram três condições que uma medida da eficiência técnica deve satisfazer<sup>5</sup>. Russell [1990, p.256] propôs, numa quarta propriedade, que uma medida da eficiência deve ser independente da unidade de medida. Assim, se  $EFC : C(x^o) \rightarrow R_+$  for uma medida de eficiência, então  $EFC(x^o, y^o)$ ,  $x^o \in C(y^o)$ ,  $y^o > 0$ , satisfaz as seguintes propriedades:

**I**  $EFC(x^o, y^o) = 1 \Leftrightarrow x \in Efc_{C(y^o)}$ ;

**H** Se  $\delta x^o \in C(y^o)$ , então  $EFC(\delta x^o, y^o) = \delta^{-1} EFC(x^o, y^o)$ ,  $\forall \delta > 0$ ;

**M** Se  $x^o \leq u$ ,  $u \in C(y^o)$ , então  $EFC(x^o, y^o) > EFC(u, y^o)$ ;

**Co**  $EFC(x^o, y^o)$  é independente da unidade de mensuração.

A propriedade **I** indica que aos planos de produção pertencentes ao conjunto eficiência de  $C(y^o)$  é atribuída eficiência igual à unidade. **H** reflete a homogeneidade de  $EFC$ , e diz que reescalonar radialmente o vetor insumo por  $\delta > 0$  implica no reescalonamento da eficiência técnica deste vetor na proporção  $\delta^{-1}$ . A propriedade **M** está relacionada com a monotonicidade de  $EFC$  e indica que se o consumo aumentar de  $x^o$  para  $u$ ,  $u \in C(y^o)$ , então a eficiência técnica de  $(u, y^o)$  será estritamente menor que a eficiência de  $(x^o, y^o)$ . A quarta propriedade relacionada, denominada por Russell de propriedade da comensurabilidade, sugere que trocar a medida das quantidade dos insumos e dos produtos não altera o índice de eficiência atribuído aos produtores por  $EFC$ .

Em 1986, Bol [apud Russell, 1998, p.34] enunciou, através de um teorema, que não existe nenhuma medida da eficiência técnica que satisfaz simultaneamente as propriedades **I**, **H** e **M** para todas as tecnologias de produção. Para superar este empecilho, Bol sugere dois caminhos: (i) relaxar os axiomas de Färe/Lovell; (ii) ou restringir a classe das tecnologias nas quais o índice de eficiência será aplicado. Neste estudo serão relaxados os axiomas **I** e **M**. Considerando  $x^o \in C(y^o)$ , com  $y^o > 0$ , estas duas propriedades serão substituídas por:

---

<sup>5</sup>Färe e Lovell também sugerem uma quarta propriedade - que  $EFC(x^o, y^o)$  "compara  $x$  com  $u \in Efc_{C(y)}$ ", mas segundo Russell [1985, p.113] esta condição não é bem definida para medidas arbitrárias da eficiência, sendo redundante quando for bem definida.

**WI**  $Efc(x^o, y^o) = 1 \Leftrightarrow x^o \in Isoq_C(y^o)$ ;

**WM** Se  $x^o \leq u$ ,  $u \in C(y^o)$ , então  $EFC(x^o, y^o) \geq EFC(u, y^o)$ .

Pela propriedade **WI**, se  $EFC$  for uma medida de eficiência, qualquer plano de produção pertencente ao conjunto isoquanta é eficiente tecnicamente. **WM** é denominada de propriedade de monotonicidade fraca pois exige que  $EFC$  atribua um índice de eficiência técnica a  $(u, y^o)$  menor ou igual ao de  $(x, y^o)$ , ao invés de um índice estritamente menor.

A seguir serão definidas as medidas radiais da eficiência técnica que mais comumente ocorrem na literatura e que satisfazem as propriedades **WI**, **H**, **WM** e **Co** ( as medidas não radiais a serem sugeridas não satisfazem a propriedade **Co**). Todas as medidas radiais orientação consumo a serem definidas neste trabalho são baseadas na medida de Debreu/Farrell, ou seja, na contração radial do consumo alocando o consumo no conjunto isoquanta de  $C$ . As medidas radiais orientação produção, também baseadas no trabalho de Debreu/Farrell, consistem na expansão da produção alocando o vetor produção no conjunto isoquanta de  $P$ . O cálculo da eficiência via medida não radial consiste em inicialmente alocar radialmente o consumo no conjunto isoquanta de  $C$  (ou a produção no conjunto isoquanta de  $P$ ) e em seguida na sua realocação no conjunto eficiência.

## 2.2 Medida Radial da Eficiência Técnica

Nesta seção serão desenvolvidas medidas radiais das eficiências orientação consumo e orientação produção. As medidas chamam-se de radiais pois na orientação consumo (orientação produção) contrai-se (expande-se) o vetor insumo (produto) através de um escalar positivo, ou seja, todas as componentes do vetor são escalonadas na mesma proporção. Para definir estas medidas sejam  $J$  planos de produção observados, cada um transformando  $n$  insumos para produzir  $m$  produtos. Seja  $M$  ( $j \times m$ ) a matriz das quantidades dos produtos observados e  $N$  ( $j \times n$ ) a matriz das quantidades dos insumos observados. O escalar  $y_{jm} \in M$  é a quantidade que o  $j$ -ésimo produtor gera do  $m$ -ésimo produto e  $x_{jn} \in N$  é a quantidade que o  $j$ -ésimo produtor consome do  $n$ -ésimo insumo.

### 2.2.1 Orientação Consumo

No cálculo da eficiência técnica radial orientação consumo, a tecnologia será modelada pela correspondência consumo  $y \rightarrow C(y)$ . No cálculo o nível de produção  $y^o$  observado será mantido inalterado e os recursos serão reduzidos até a isoquanta de  $C(y^o)$ . Se  $C_C(y^o) = \{x :$



$x \geq zN; zM \geq y^o; z \in R_+^J$  é o conjunto consumo que contém os vetores insumo que produzem pelo menos  $y^o$ , então uma indicação da proximidade de  $x^o$  da  $Isoq_{C_C}(y^o)$  é dada pela

**Definição 1** A função

$$EFC_{CIn}(y^o, x^o) = \min \lambda^{oc} \\ \text{s.a. } zM \geq y^o \\ \lambda^{oc} x^o \geq zN \\ z \in R_+^J$$

é chamada de medida radial da eficiência técnica orientação consumo supondo retornos constantes de escala.

A medida definida (geralmente denominada de medida radial de CCR orientação consumo) para uma tecnologia linear por partes mede a eficiência de  $x^o$  na produção de  $y^o$  assumindo retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos (figura 2.4). Seu valor está em  $(0, 1]$  (pois  $\vec{0} \notin C_C(y^o)$ ), e atinge seu limite superior se e somente se  $x^o$  pertence a isoquanta de  $C_C(y^o)$ -conjunto consumo supondo retornos constantes ( $C$ ) de escala. A medida também é independente de unidades, por exemplo trocar trabalho/hora por trabalho/ano não afeta o valor do índice de eficiência [Färe, Krosskopf e Lovell, 1994, p.64].

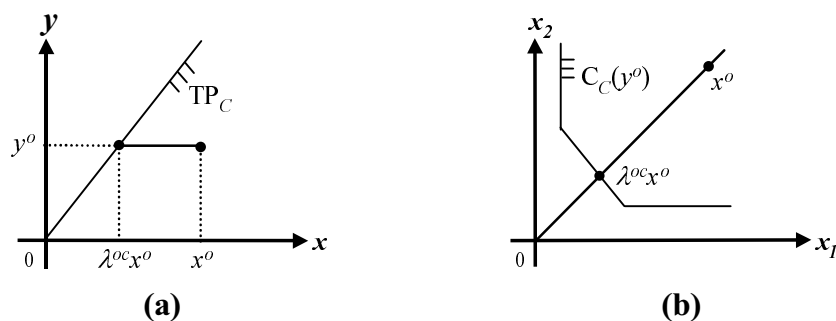


Figura 2.4: Medida radial da eficiência técnica orientação consumo supondo retornos constantes de escala.

A medida radial da eficiência técnica orientação consumo encontra-se ilustrada na figura 2.4. No gráfico (a) tem-se  $n = m = 1$  e no segundo  $n = 2$ . Em ambos os casos  $\lambda^{oc}$  é o valor ótimo do programa linear da definição 1 e  $\lambda^{oc} x^o$  é eficiente tecnicamente em relação a tecnologia considerada. O novo nível de consumo  $\lambda^{oc} x^o$  pertence a  $Isoq_{C_C}(y^o)$  (que é a envoltória gerada), e  $(\lambda^{oc} x^o, y^o)$  é o plano de produção *benchmark* de  $(x^o, y^o)$ .

Utilizando raciocínio análogo que levou à definição 1, podem ser definidas medidas radiais da eficiência técnica orientação consumo considerando diferentes economias de escala.

$$\text{Definição 2 } EFC_{NIn}(y^o, x^o) = \min \left\{ \lambda^{oN} : y^o \leq zM, zN \leq \lambda^{oN} x^o, \sum_{j=1}^J z_j \leq 1, z \in R_+^J \right\}$$

$$\text{Definição 3 } EFC_{VIn}(y^o, x^o) = \min \left\{ \lambda^{oV} : y^o \leq zM, zN \leq \lambda^{oV} x^o, \sum_{j=1}^J z_j = 1, z \in R_+^J \right\}$$

As tecnologias consideradas nas definições 2 e 3 (que são geradas pelos conjuntos de restrições) satisfazem, respectivamente, retornos não crescentes de escala- $(N)$  e retornos variáveis de escala- $(V)$ . A última medida foi desenvolvida por Banker, Charnes e Cooper em 1984 e geralmente é denominada de medida radial orientação consumo de BCC. Ambos os índices calculados nas definições 2 e 3 pertencem ao intervalo  $(0, 1]$ , e  $EFC_{VIn}(y^o, x^o)$  atinge 1 se e somente se  $x^o$  está na isoquanta de  $C_N(y^o)$  e  $EFC_{VIn}(y^o, x^o)$  atinge 1 se e somente se  $x^o$  está na isoquanta de  $C_V(y^o)$ .

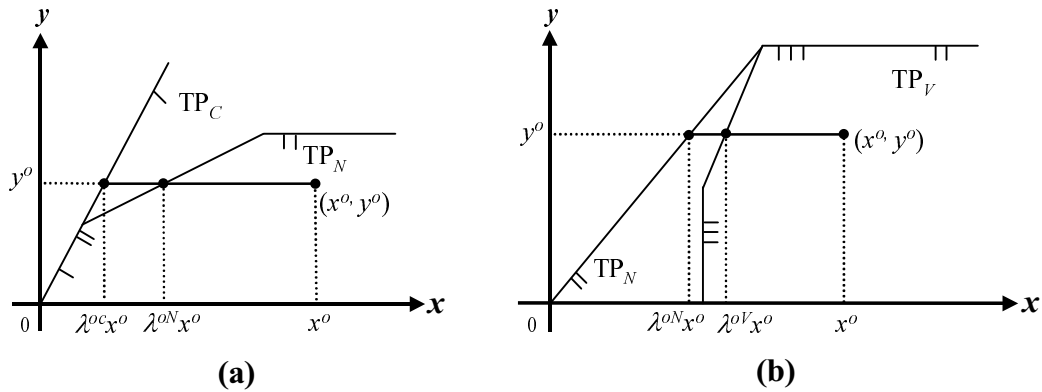


Figura 2.5: Comparação das eficiências radiais orientação consumo supondo retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala. (Fonte: Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.67,69)

A comparação das medidas com a hipótese de retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala, encontra-se no gráfico (a) da figura 2.5. A comparação entre as medidas considerando retornos variáveis de escala e retornos não crescentes de escala, está representada no gráfico (b).

## 2.2.2 Orientação Produção

Na seção anterior foram definidos índices da eficiência técnica relativos ao conjunto consumo. Na obtenção da eficiência da atividade de um produtor era dada a quantidade dos produtos e procurava-se a maior redução radial viável no consumo. Nesta seção a medida de

eficiência a ser desenvolvida é orientação produção e será relativa ao conjunto produção  $P(x)$ . Nos cálculos serão dadas as quantidades consumidas dos insumos e obter-se-á a eficiência a partir da máxima expansão radial do vetor dos produtos.

Seja  $P_C(x^o)$  o conjunto produção supondo retornos constantes de escala e descarte forte dos produtos. Deseja-se determinar a eficiência de  $y^o$ , isto é, quão próximo radialmente  $y^o$  está da fronteira superior de  $P_C(x^o)$ , ou seja, quão próximo  $y^o$  está da isoquanta de  $P_C(x^o)$ . Se  $P_C(x^o) = \{y : x^o \geq zN; zM \geq y; z \in R_+^J\}$  for o conjunto produção supondo retornos constantes de escala e descarte forte dos produtos, então uma indicação da proximidade de  $y^o$  da  $Isoq_{P_C(x^o)}$  é dada pela seguinte medida.

**Definição 4** A função

$$EFC_{COut}(y^o, x^o) = \begin{array}{ll} \max & \theta^{oc} \\ \text{s.a} & zM \geq \theta^{oc} y^o \\ & x^o \geq zN \\ & z \in R_+^J \end{array}$$

é chamada de medida radial da eficiência técnica orientação produção supondo retornos constantes de escala.

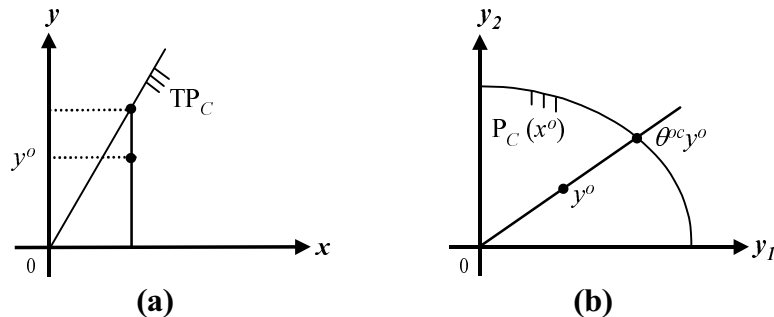


Figura 2.6: Medida radial da eficiência técnica orientação produção supondo retornos constantes de escala.

A medida  $EFC_{COut}(x^o, y^o)$  para uma tecnologia linear por partes, também denominada de medida de CCR orientação produção, ilustrada na figura 2.6, mede a eficiência técnica radial de  $y^o$  que é produzido a partir do consumo de  $x^o$  quando a tecnologia satisfaz retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos. Seu valor está contido no intervalo  $[1, \infty)$  e atinge a unidade se e somente se  $y^o \in Isoq_{P_C(x^o)}$ .

A medida da eficiência técnica orientação produção encontra-se ilustrada na figura 2.6 para  $n = m = 1$  (gráfico (a)) e  $n = 2$  (gráfico (b)). Em ambos os casos  $\theta^{oc}$  é o valor

ótimo do programa linear (da definição 4) e  $\theta^{oc}y^o$  é um nível de produção eficiente em relação à tecnologia considerada e portanto pertence a  $Isoq_{TP_C(x^o)}$ . (O plano  $(x^o, \theta^{oc}y^o)$  é o plano de produção *benchmark* de  $(x^o, y^o)$ ).

As medidas de eficiência definidas na seqüência são menos restritivas que as da definição 4. Incluindo uma nova equação no conjunto de restrições que gera o conjunto produção pode-se mensurar a eficiência técnica considerando retornos não crescentes de escala e retornos variáveis de escala.

**Definição 5**  $EFC_{NOut}(y^o, x^o) = \max \left\{ \theta^{oN} : \theta^{oN}y^o \leq zM, zN \leq x^o, \sum_{j=1}^J z_j \leq 1, z \in R_+^J \right\}$

**Definição 6**  $EFC_{VOut}(y^o, x^o) = \max \left\{ \theta^{oV} : \theta^{oV}y^o \leq zM, zN \leq x^o, \sum_{j=1}^J z_j = 1, z \in R_+^J \right\}$

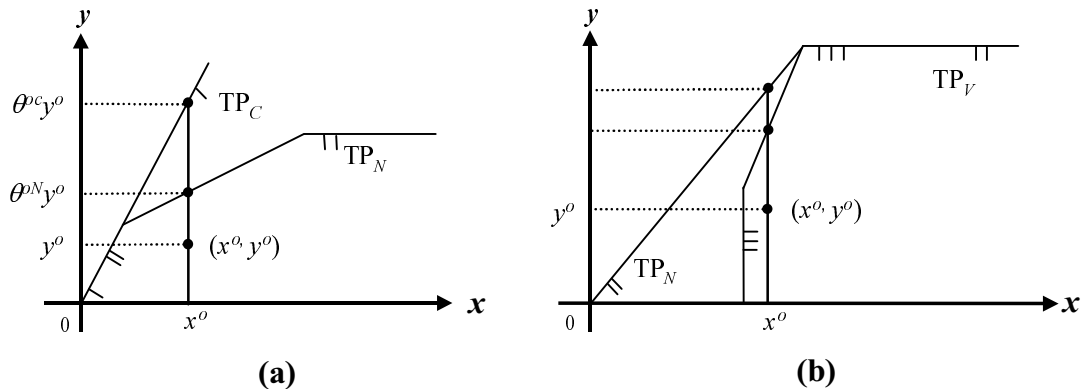


Figura 2.7: Comparação entre as eficiências radiais orientação produção supondo retornos constantes, variáveis e não crescentes de escala. (Fonte: Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.102,104)

A comparação das medidas considerando retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala orientação produção encontra-se ilustrada no painel (a) da figura 2.7. A comparação entre as medidas supondo retornos variáveis de escala e retornos não crescentes de escala está representada no painel (b).

### 2.3 Medida Não Radial da Eficiência Técnica

Na definição de Debreu/Farrell um produtor é tecnicamente eficiente se pertencer à isoquanta enquanto que a definição de Koopmans é mais restritiva e classifica como eficiente tecnicamente somente o produtor pertencente ao subconjunto de eficiência (que por sua vez

está contido na isoquanta). Como as medidas definidas na seção anterior geralmente não são Koopmans, surgiram algumas modificações (Färe e Lovell, [1978], Zieschang [1984], Charnes, Cooper, Golany, Seiford and Stuts, [1985]) na tentativa de torná-las Koopmans. Todas as variações sugeridas apresentam vantagens e desvantagens [Lovell, 1993, p.13-14]; entretanto a modificação mais empregada na literatura é a inserção, na função objetivo e nas restrições do programa linear que mede radialmente a eficiência técnica, das variáveis de folga fazendo com que o programa linear tenha somente restrições de igualdade [Charnes, Cooper, Rhodes, 1978, p.437]. A modificação é idêntica em todos os modelos de medidas radiais, e portanto o estudo será restrito à medida  $EFC_{ICS}$ .

A medida  $EFC_{ICIn}$  (da definição 1) pode ser escrita no seguinte programa linear (PL)

$$\begin{aligned}
 EFC_{ICIn}(y^o, x^o) = & \min \quad \lambda \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^J z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o, \quad k = 1, \dots, m \\
 & \lambda x_i^o - \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} - s_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n \\
 & z_j \in R_+^J, \quad s_k^1 \in R_+^n, \quad s_i^2 \in R_+^m
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $s^1$  e  $s^2$  são respectivamente as folgas dos produtos e dos insumos. A medida não radial da eficiência técnica supondo retornos constantes de escala (denominada de medida não radial de CCR orientação consumo) é dada por:

**Definição 7** A medida  $EFC_{ICIna}$  é a medida não radial da eficiência técnica orientação consumo com retornos constantes de escala, onde

$$\begin{aligned}
 EFC_{ICIna}(y^o, x^o) = & \min \quad \lambda - \varepsilon \left( \sum_{k=1}^m s_k^1 + \sum_{i=1}^n s_i^2 \right) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^J z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o, \quad k = 1, \dots, m \\
 & \lambda x_i^o - \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} - s_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n \\
 & z_j \in R_+^J, \quad s_k^1 \in R_+^n, \quad s_i^2 \in R_+^m
 \end{aligned} \tag{2}$$

e  $\varepsilon > 0$  é uma quantidade infinitesimal positiva.

No modelo radial um produtor é considerado eficiente tecnicamente quando  $\lambda = 1$  e na medida não radial o produtor é eficiente quando  $\lambda = 1$  e  $s^2 = s^1 = 0$ . Deve-se ressaltar que o índice de eficiência atribuído em (1) é igual ao atribuído em (2) entretanto o nível ótimo do consumo, que é comparado com o observado, pode ser diferente, ou seja, o plano de produção *benchmark*  $(x^*, y^o)$  de  $(x^o, y^o)$  pode ser diferente na medida não radial.

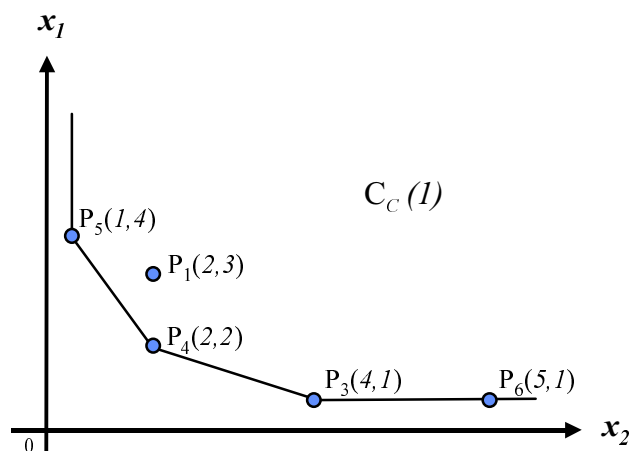


Figura 2.8: **Eficiência técnica não radial orientação consumo considerando retornos constantes de escala.** (Fonte: Charnes, Cooper e Rhodes, 1978, p.436)

No exemplo representado na figura 2.8 pode-se identificar a diferença entre a definição dos índices radial e não radial da eficiência técnica do produtor  $P_6$ . Para o produtor  $P_6$  existem duas possibilidades de mínimo: (i)  $\lambda = 1$  e todas as folgas nulas e (ii)  $\lambda = 1$  com a folga do primeiro insumo igual à unidade. É obvio que  $P_6$  é ineficiente tecnicamente pois emprega uma unidade de insumo a mais que  $P_3$  e produz a mesma quantidade que  $P_3$ . A solução ótima do PL (1), com  $\sigma = 6$ , é  $\lambda = 1$ ,  $z_6 = 1$ ,  $s_1^2 = s_2^2 = s_1^1 = 0$ , ou seja  $P_6$  é eficiente. O modelo (2) resulta em  $\lambda = 1$ ,  $z_3 = 1$ ,  $s_1^2 = 1$ ,  $s_2^2 = s_1^1 = 0$ , ou seja,  $P_6$  é ineficiente tecnicamente. O parâmetro  $\lambda = 1$  expressa a impossibilidade de qualquer contração radial do consumo dos dois insumos, porém o consumo de  $x_2$  pode ser reduzido em uma unidade (fazendo com que  $P_6 \equiv P_3$ ).

Dependendo do valor atribuído a  $\varepsilon$ , o programa linear (2) será resolvido em duas etapas. Seja então,  $\lambda^*$ ,  $s^{1*}$  e  $s^{2*}$  a solução ótima do programa linear (2). Na primeira etapa da sua resolução é determinada a maior contração radial do consumo, alocando o plano de produção observado num plano intermediário pertencente a  $Isoq_C(y^o)$ . Numa segunda etapa são determinadas as folgas máximas, realocando este plano intermediário até a fronteira de eficiência [Ali, Seiford, 1993, p.138]. Para que o programa linear (2) seja resolvido seguindo corretamente as duas etapas de cálculo mencionadas, não se pode atribuir qualquer valor a  $\varepsilon$  pois dependendo dos níveis dos insumos, a solução do programa não é a correta. Em 1993 Ali e Seiford [1993, p.292] apresentaram um teorema onde relacionam  $\varepsilon$  com os valores dos insumos. Segundo eles,

a solução do programa (2) é ilimitada sempre que  $\varepsilon \geq \left( \max_{j=1, \dots, J} \left\{ \sum_{i=1}^n x_{ij} \right\} \right)^{-1}$ , ou seja, sempre

que  $\varepsilon < \left( \max_{j=1, \dots, J} \left\{ \sum_{i=1}^n x_{ij} \right\} \right)^{-1}$  o programa linear (2) terá solução.

Como a maioria dos modelos de análise de eficiência é baseada em programação linear,

Ali e Seiford ainda chamam atenção ao seguinte detalhe. Ao determinar se uma variável não básica é ou não é candidata a entrar na base, o preço reduzido desta deveria ser comparado com o valor nulo. Entretanto, a maioria dos *softwares* não faz a comparação com o valor nulo mas sim com um preço tolerância, tal como  $10^{-5}$  ou  $10^{-15}$ . Dependendo do valor de  $\varepsilon$  usado e do valor dos insumos e dos produtos, o preço reduzido (*reduced cost*) da variável não básica pode tornar-se muito próximo a este preço tolerância; se for menor que o preço tolerância a variável será descartada e não será candidata a entrar na base quando na verdade deveria ser candidata. Assim, a verdadeira otimalidade não será alcançada. Portanto, ao utilizar-se um *software* de programação linear para implementar (2) deve-se descobrir, antes, qual o valor desta tolerância e não atribuir a  $\varepsilon$  qualquer quantidade que satisfaça a condição do teorema de Seiford e Ali.

Para evitar o uso de  $\varepsilon$  no cálculo do índice não radial da eficiência técnica orientação consumo considerando retornos constantes de escala, alguns pesquisadores sugerem que a resolução do programa (2) seja substituída pela resolução dos programas (1) e (2a)

$$\begin{aligned}
 \text{Máximo} \quad & \sum_{k=1}^m s_k^1 + \sum_{i=1}^n s_i^2 \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^J z_j y_{kj} - s_k^1 = y_k^o, \quad k = 1, \dots, m \\
 & \lambda^* x_i^o - \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} - s_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n \\
 & z_j \in R_+^J, \quad s_k^1 \in R_+^m, \quad s_i^2 \in R_+^n
 \end{aligned} \quad . \quad (2a)$$

Do programa (1) obtém-se o índice radial da eficiência técnica  $EFC_{In}(y^o, x^o) = \lambda^*$ , que é a maior contração radial viável do consumo, alocando o plano  $(x^o, y^o)$  sobre  $Isoq_C(y^o)$ . O programa linear (2a), onde  $\lambda^*$  é constante, tem a finalidade de maximizar as folgas dos insumos e dos produtos para realocar o plano intermediário  $(\lambda^* x^o, y^o)$  sobre  $Efc_C(y^o)$ .

## 2.4 A Medida *Free Disposal Hull*-FDH

Em geral as fronteiras de produção geradas pelas medidas radiais e não radiais da eficiência técnica são definidas por combinações lineares entre planos de produção observados eficientes tecnicamente. Portanto, a fronteira de produção pode ser formada por planos de produção observados e planos de produção hipotéticos. Esta característica, de planos de produção que não ocorreram na prática pertencerem à fronteira de produção, é considerada indesejável por alguns pesquisadores. Para suprir esta lacuna, em 1984 Deprins, Simar e Tulkens introduziram uma medida radial denominada por eles de *Free Disposal Hull*-FDH que gera uma fronteira de produção constituída apenas por planos de produção observados.

Na medida radial desenvolvida, Deprins, Simar e Tulkens mantêm o descarte forte dos insumos e dos produtos bem como a propriedade de retornos variáveis de escala. Para obter a medida FDH orientação consumo basta adicionar em  $EFC_{VIN}$  a restrição  $z_j \in \{0, 1\}$ ,  $j = 1, \dots, J$  que tem o objetivo de ‘enfraquecer’ a necessidade de convexidade da tecnologia de produção. Embora a adição desta restrição transforme o cálculo num problema de programação com variáveis discretas, existem algoritmos baseados no conceito de dominância<sup>6</sup> que simplificam a solução.

Na figura 2.9 encontram-se ilustrados o conjunto  $C_C(1)$  e a fronteira gerada pela medida radial de CCR, e o conjunto  $C_{FDH}(1)$  e a fronteira gerada pela medida FDH. Pode-se observar que a fronteira gerada pela medida FDH, é a isoquanta de  $C_{FDH}(1)$  e que coincide com o conjunto de eficiência fraca. Portanto, a medida FDH classifica os planos de produção pertencentes a isoquanta como eficientes tecnicamente e projeta os planos pertencentes ao interior de  $C_{FDH}(1)$  sobre esta. Por exemplo, o plano de produção  $P_7$  é ineficiente tecnicamente pois é dominado pelos planos de produção observados  $P_1, P_2, P_3, P_8, P_{10}$  e  $P_{11}$ . Graficamente o escore da eficiência de  $P_7$  orientação consumo é  $EFC_{FDHIn}(x^7, y^7) = \frac{2}{4}$  e seu plano de produção *benchmark* é  $P_2$ .<sup>7</sup>

A medida *Free Disposal Hull* orientação consumo do  $o$ -ésimo produtor tem a seguinte definição:

**Definição 8** A função  $EFC_{FDHIn}(y^o, x^o) = \min\{\lambda^o : y^o \leq zM, zN \leq \lambda^o x^o, \sum_{j=1}^J z_j = 1, z_j \in \{0, 1\}\}$  é a medida FDH da eficiência técnica orientação consumo do  $o$ -ésimo produtor.

Tulkens [1993] demonstrou que é possível calcular a eficiência técnica via FDH sem resolver qualquer problema de programação matemática, e sugere o uso de um algoritmo constituído de dois passos que é baseado no conceito de dominância orientação consumo. Se o decisor pretende calcular o índice da eficiência técnica orientação consumo do  $o$ -ésimo produtor, basta executar o seguinte algoritmo, que mede  $EFC_{FDHIn}$  através de comparações entre as unidades de produção observadas:

**Passo 1:** Associar ao  $o$ -ésimo produtor o conjunto  $D_o$  contendo os índices de todos os vetores  $(x_k, y_k)$  satisfazendo  $x_{io} \geq x_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com desigualdade estrita para pelo menos um elemento, e  $y_{jk} \geq y_{jo}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

<sup>6</sup>Sejam os planos de produção  $p^o = (x^o, y^o)$  e  $p^d = (x^d, y^d)$ .  $p^d$  domina  $p^o$  se  $x^d \leq x^o$  e  $y^d \geq y^o$ , ou se  $x^d \leq x^o$  e  $y^d \geq y^o$  [Tulkens, 1993, p.4].

<sup>7</sup> $EFC_{FDHIn}(x^7, y^7) = \min\left\{\frac{x_{17}}{x_{12}}, \frac{x_{27}}{x_{22}}\right\} = \frac{x_{17}}{x_{12}} = \frac{2}{4}$



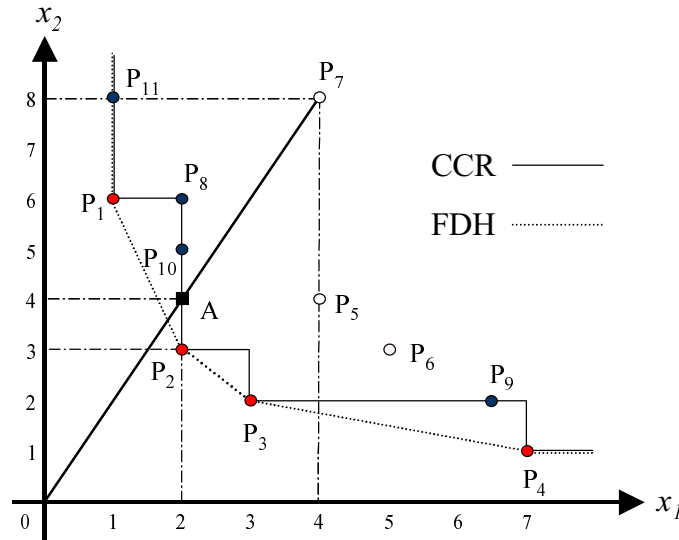


Figura 2.9: As fronteiras de produção CCR e FDH.

**Passo 2:** Calcular o índice de eficiência técnica FDH usando

$$EFC_{FDHI_n}(x^o, y^o) = \min_{d \in D_o} \left\{ \max_{i=1..n} \left( \frac{x_{id}}{x_{io}} \right) \right\}.$$

Seja  $o = l$  e  $z_k = 1$  para algum  $k \in \{1, \dots, J\}$ . Então o  $k$ -ésimo produtor (que é *benchmark* do  $l$ -ésimo produtor) produz pelo menos o que o  $l$ -ésimo produz, porém consumindo menos. Esta medida é muito restritiva pelo fato de um produtor ser *benchmark* apenas quando: (i) o nível de todos os produtos é maior ou igual aos do produtor em análise; e (ii) o nível de todos os insumos empregados for menor ou igual aos do produtor em análise e com desigualdade estrita para pelo menos um deles. Se nenhuma destas duas condições for verificada (quando  $D_o = \phi$ ) então o produtor analisado é eficiente tecnicamente.

A implementação computacional desta medida então, consiste em implementar comparações do vetor insumo/produto de cada produtor com todos os demais vetores verificando a existência de ineficiência no sentido direto da definição de Koopmans: um produtor é ineficiente se existir outro que emprega quantidades de recursos menores ou iguais (valendo pelo menos uma desigualdade estrita), e seja capaz de produzir as quantidades de produtos iguais ou maiores. Assim um produtor é ineficiente se for possível encontrar outro que o domine no sentido recém exposto; o dominante (ou referência) se constitui um *benchmark* para a dominada.

Muitas vezes a abordagem FDH é considerada o melhor cenário para calcular a eficiência pois sua fronteira de produção é envolvida pelas fronteiras definidas na seção 2.2.1, resultando em escores de eficiência maiores que  $EFC_{CI_n}$ ,  $EFC_{NI_n}$  e  $EFC_{VI_n}$ . FDH apresenta duas vantagens em relação a outras medidas: (a) seus escores transmitem maior credibilidade pois sua fronteira de produção possui ajuste maior aos dados; (b) compara cada unidade de produção

com outra unidade de produção observada e não com cenários hipotéticos (que são planos de produção que nunca ocorreram na prática [Girod, 1996, p.53]).

## 2.5 Medidas da Eficiência Técnica Quando as Quantidades Consumidas e Produzidas são Imprecisas

Na literatura encontram-se três alternativas para lidar com a eficiência técnica ao ocorrer imprecisão na mensuração de quantidades dos insumos e dos produtos [Girod, 1996, p.56]. A primeira alternativa assume que existe um processo estocástico que gera os níveis dos insumos e os produtos. A dificuldade associada a esse enfoque é a determinação das distribuições das probabilidades das variáveis envolvidas nos cálculos, pois a escolha de tais distribuições se faz muitas vezes mais em função do instrumental matemático/estatístico disponível do que de evidências empíricas. A segunda alternativa envolve o uso de técnicas de pós-otimização tal como análise de sensibilidade, preços sombra e programação paramétrica. Mas como enfatizado por Carlsson e Korhonen [1986, p.17], estas técnicas são inapropriadas em análises quando há incerteza associada à medida dos insumos e dos produtos. Por exemplo, a análise de sensibilidade é usada para gerar soluções alternativas situadas na vizinhança de um ótimo; preços sombra indicam o quanto a solução ótima melhorará em função do vetor restrição; e com a programação paramétrica é viável analisar mudanças em uma variável no conjunto de restrições e na função objetivo. Portanto, nenhuma destas técnicas orienta o decisor no sentido de seguir uma política melhor dado o grande número de cenários de produção implementáveis e plausíveis associados aos insumos e aos produtos [Triantis e Girod, 1998, p.2].

A terceira alternativa, baseada na teoria dos conjuntos difusos, foi inicialmente introduzida por Sengupta [1992]. Ele propôs que as restrições e a função objetivo (dos programas lineares empregados no cálculo da eficiência técnica) sejam difusas e que sejam essencialmente satisfeitas ou essencialmente não satisfeitas. Em sua abordagem as relações entre insumos e produtos são difusas e os insumos e os produtos são tratados como determinísticos. Em 1996 Girod desenvolveu uma metodologia de análise da eficiência técnica empregando quantidades difusas nos cálculos; em sua abordagem o decisor é capaz de definir um “nível fora de risco” e um “nível impossível” de ocorrer para cada insumo e cada produto (figura 2.10, pág.26). Níveis consumidos e produzidos fora de risco são conservadores e podem ser realmente obtidos na produção, enquanto que níveis impossíveis estão associados àqueles valores que representam cenários de produção menos realísticos (tal como grande quantidade de produtos sem defeitos).

Em 1998 Ueda e Kamimura propõem uma medida aplicável nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo  $LR$  (figura 2.11, pág.29). Os

pesquisadores sugerem uma agregação das quantidades difusas transformando-as em quantidades determinísticas.

Nesta seção serão abordadas as medidas difusas da eficiência técnica comentadas<sup>8</sup>. Para o desenvolvimento destas medidas, suponhamos que tenham sido observadas as atividades de  $J$  produtores, cada um transformando  $n$  insumos em  $m$  produtos. Seja  $\widetilde{M}$  ( $j \times m$ ) a matriz contendo as quantidades difusas dos produtos observados e  $\widetilde{N}$  ( $j \times n$ ) a matriz das quantidades difusas dos insumos. Então,  $\widetilde{x}_{ji} \in N$  é a quantidade difusa consumida do  $i$ -ésimo insumo pelo  $j$ -ésimo produtor e  $\widetilde{y}_{jk} \in \widetilde{M}$  é a quantidade difusa do  $k$ -ésimo produto do  $j$ -ésimo produtor.

### 2.5.1 Medida de Sengupta

Sengupta [1992] desenvolveu uma medida da eficiência técnica para avaliar planos de produção envolvendo múltiplos insumos e um único produto. O abordagem de Sengupta é baseada no programa linear dual da medida radial de CCR e na programação linear difusa simétrica de Zimmermann e sugere a existência de imprecisões entre os planos de produção observados. O modelo pode ser escrito no programa linear difuso

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad \omega \\
 & \text{s.a} \quad \quad \omega d_o + X_o \beta \leq g_o + d_o \\
 & \quad \quad \omega d_j \leq d_j + X_j^T \beta - Y_j, \quad j = 1, 2, \dots, J \\
 & \quad \quad 0 \leq \omega \leq 1 \\
 & \quad \quad \beta \geq 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

onde  $g_o$  representa o “nível de aspiração” da função objetivo e  $d_j$  é a violação permitida da  $j$ -ésima restrição. A eficiência técnica do  $o$ -ésimo produtor é  $\frac{Y_o}{X_o \beta}$  [Girod, 1996, p.88].

Sengupta não propõe nenhum procedimento para a especificação e  $g_o$  e  $d_j$ . A dificuldade de fixar os níveis de tolerância e a limitação de trabalhar com apenas um produto são impedimentos para a aplicação prática do modelo de Sengupta.

### 2.5.2 Medidas de Girod

Na medida desenvolvida por Sengupta não podem ser inseridas as quantidades difusas dos fatores de produção. Girod foi mais além e desenvolveu um conjunto de medidas cujos programas lineares empregam quantidades difusas semelhantes às representadas na figura 2.10. A questão central da abordagem envolve a especificação dos limites inferior e superior para cada insumo e para cada produto. Tais limites são considerados valores “livres de risco” (valores conservadores, certamente alcançáveis com os procedimentos tecnológicos disponíveis para cada

---

<sup>8</sup>No Apêndice A deste trabalho encontram-se noções básicas sobre conjuntos difusos e programação linear difusa.

produtor) aos quais se associa um grau de possibilidade de ocorrer na prática igual a 1, e valores “impossíveis” (limites além dos quais os planos de produção seriam certamente irrealistas) associados a um grau de possibilidade zero de ocorrer. A quantidade de cada fator de produção caracteriza-se assim, como um conjunto difuso cuja função de pertinência (ou distribuição de possibilidade) alcança grau 1 no limite “livre de risco” e grau zero no limite “impossível”, decrescendo monotonicamente de um até zero nesse intervalo.

Sejam  $x_{io}$  o limite inferior e  $\bar{x}_{io}$  o limite superior do  $i$ -ésimo insumo do  $o$ -ésimo produtor. A função de pertinência associada ao insumo  $x_{io}$  é

$$\mu_x(x_{io}) = \frac{x_{io} - \underline{x}_{io}}{\bar{x}_{io} - \underline{x}_{io}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad o = 1, 2, \dots, J,$$

Sejam  $y_{ko}$  o limite inferior e  $\bar{y}_{ko}$  o limite superior do  $k$ -ésimo produto do  $o$ -ésimo produtor. A função de pertinência associada ao produto  $y_{ko}$  é

$$\mu_y(y_{ko}) = \frac{y_{ko} - \underline{y}_{ko}}{\bar{y}_{ko} - \underline{y}_{ko}}, \quad k = 1, \dots, M, \quad o = 1, 2, \dots, J.$$

As duas funções de pertinência encontram-se ilustradas nos painéis (a) e (b) da figura 2.10.

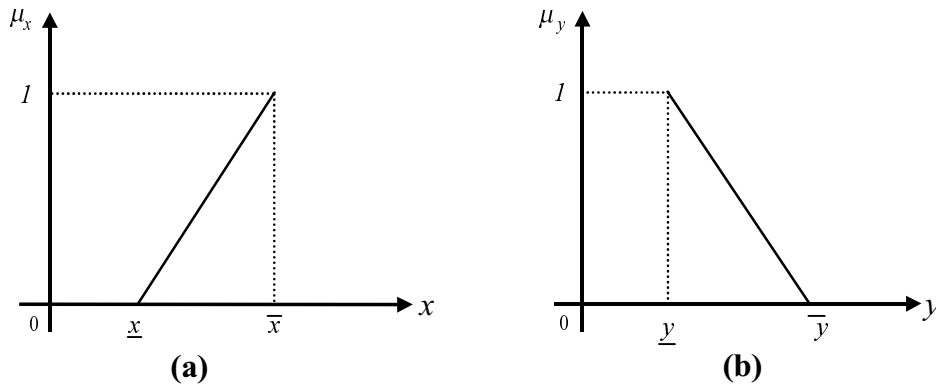


Figura 2.10: **Função de pertinência dos insumos e dos produtos.** (Fonte: Girod, 1996, p.91)

Das funções de pertinência pode-se expressar ambos,  $x_{io}$  e  $y_{ko}$ , como combinação linear dos seus respectivos limites.

$$\begin{aligned} x_{io} &= \underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu_x(x_{io}) \\ y_{ko} &= (\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}) \times \mu_y(y_{ko}) + \bar{y}_{ko} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo estas quantidades na definição 1 (seção 2.2) tem-se a medida da eficiência técnica considerando retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos. O índice da eficiência técnica  $EFC_{CGIn}(y^o, x^o)$  então é obtido com o auxílio do seguinte programa linear difuso paramétrico (os parâmetros são  $\mu_x(x^o)$  e  $\mu_y(y^o)$ )

$$\begin{aligned}
& \min \quad \lambda \\
s.a \quad & \mu_y(y^o) \times (\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [\mu_y(y_{kj}) \times (\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}) + \bar{y}_{jh}] \\
& \sum_{j=1}^J z_j [\underline{x}_{ij} - (\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}) \times \mu_x(x^{ij})] \leq \lambda (\underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu_x(x^o)) \\
& z_j \in R_+^J
\end{aligned} \tag{5}$$

Para Carlsson e Korhonen [1986, p.25] o melhor valor da função objetivo, a um nível fixo de precisão  $\mu$ , sempre ocorrerá quando todas as funções de pertinência forem iguais, ou seja,  $\mu_x(x_{ih}) = \mu_y(y_{kh}) = \mu$ . Rescrevendo (5) tem-se

$$\begin{aligned}
& \min \quad \lambda \\
s.a \quad & \mu \times (\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [\mu \times (\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}) + \bar{y}_{jh}] \\
& \sum_{j=1}^J z_j [\underline{x}_{ij} - (\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}) \times \mu] \leq \lambda (\underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu) \\
& z_j \in R_+^J
\end{aligned} \tag{6}$$

A medida da eficiência orientação consumo supondo retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos  $EFC_{VGI_n}(x^o, y^o)$  será calculada com auxílio do seguinte programa linear difuso

$$\begin{aligned}
& \min \quad \lambda \\
s.a \quad & \mu \times (\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [\mu \times (\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}) + \bar{y}_{jh}] \\
& \sum_{j=1}^J z_j [\underline{x}_{ij} - (\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}) \times \mu] \leq \lambda (\underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu) \\
& \sum_{j=1}^J z_j = 1, \quad z_j \in R_+^J
\end{aligned} \tag{7}$$

Mantendo a suposição de funções de pertinência lineares e monotônicas crescentes para os insumos e funções lineares monotonicamente decrescentes para os produtos, o decisor, para uma dada função de pertinência  $\mu$ , pode transformar a medida  $FDH$  numa medida correspondente. Incluindo a restrição  $z_j \in \{0, 1\}$  em (7) obtém-se então o programa linear difuso para calcular o índice da eficiência técnica orientação consumo  $EFC_{FDHGI_n}(y^o, x^o)$ .

$$\begin{aligned}
& \min \quad \lambda \\
& s.a \quad \mu \times (\underline{y}_{ko} - \bar{y}_{ko}) + \bar{y}_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [\mu \times (\underline{y}_{kj} - \bar{y}_{kj}) + \bar{y}_{kj}] \\
& \quad \sum_{j=1}^J z_j [\underline{x}_{ij} - (\underline{x}_{ij} - \bar{x}_{ij}) \times \mu] \leq \lambda (\underline{x}_{io} - (\underline{x}_{io} - \bar{x}_{io}) \times \mu) \quad (8) \\
& \quad \sum_{j=1}^J z_j = 1, \quad z_j \in R_+^J \\
& \quad z_j \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

OBS.:A medida  $EFC_{FDHGI_n}(y^o, x^o)$  também pode ser calculada através de um algoritmo semelhante ao processo descrito na seção 2.4.

Para resolver (6)-(8) o decisor deve experimentar diferentes valores para a função pertinência  $\mu$ , por exemplo 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1 e resolver o programa linear difuso correspondente [Girod, 1996, p.99]. O conjunto de soluções resultante desta série de programas lineares pode ser representado graficamente em termos do conjunto de valores de  $\mu$ . Do gráfico, o decisor terá uma visão do comportamento da função objetivo segundo a variação de  $\mu$ , e permite extrair conclusões apropriadas.

A determinação dos limites “livres de risco” e “impossível” é essencial nesse procedimento pois a eles serão associados graus de possibilidades de implementação dos planos de produção. Por exemplo, segundo os termos de Girod [1996, p.99], os índices de eficiência técnica associados a  $\mu = 0,6$  serão interpretados como tendo 60% de possibilidade de serem realistas, uma vez que são construídos a partir de planos de produção que têm, eles mesmos, 60% de possibilidades de serem realistas.

### 2.5.3 Medida de Ueda e Kamimura

Ueda e Kamimura [1989] desenvolveram uma metodologia para mensurar a eficiência técnica quando as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo  $LR$ . Os pesquisadores sugeriram uma agregação das quantidades imprecisas transformando-as em quantidades determinísticas (crisp). Seja  $\tilde{A} = (\underline{a}, a, \bar{a})$  (ilustrado na figura 2.11) a quantidade difusa de um fator de produção, onde  $\underline{a}$  é o limite inferior,  $\bar{a}$  é o limite superior e  $a$  é a quantidade média, então segundo a metodologia de Ueda e Kamimura a quantidade determinística que corresponde a  $\tilde{A}$  é

$$A = \frac{(\underline{a} + 2a + \bar{a})}{4}. \quad (9)$$

Como as quantidades dos fatores de produção são expressas através de intervalos contínuos, a agregação resulta em quantidades pertencentes aos intervalos ( $A \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ) e geralmente tem-se

$A \neq a$ .

Após transformados todos os insumos e produtos em quantidades determinísticas, basta substituí-las na medida radial de CCR. Neste caso o programa linear resultante é independente de parâmetros e os resultados obtidos não indicam ao decisor o comportamento da eficiência técnica em função de diferentes conjuntos corte  $\mu$  dos fatores de produção.

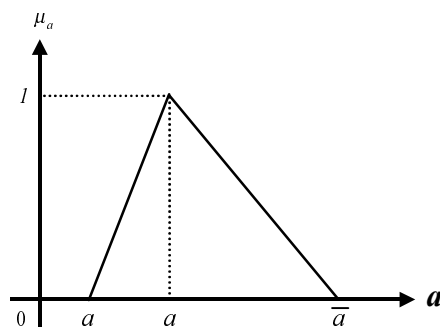


Figura 2.11: Fatores de produção expressos através de números difusos do tipo *LR*.

## 2.6 Considerações Finais

Em 1951 Debreu e em 1957 Farrell definiram uma medida radial da eficiência técnica como sendo a unidade menos a máxima redução proporcional dos insumos tal que o produtor possa continuar a fabricar os mesmos produtos. Em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes desenvolveram a abordagem DEA e o primeiro programa linear para calcular o índice definido por Debreu/Farrell. Várias medidas da eficiência técnica foram construídas após o desenvolvimento de DEA, destacando-se a medida de Banker, Charnes e Cooper [1984], a medida *free disposal hull*-FDH de Deprins, Simar e Tulkens [1984], as medidas não radiais e as medidas aplicáveis nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

## Capítulo 3

# Desenvolvimento de Medidas para Análise da Eficiência Técnica em Ambiente Difuso

No capítulo anterior foram apresentadas e discutidas algumas medidas da eficiência técnica baseadas em programação matemática. Dessa exposição pode-se concluir que após 1978 várias medidas foram desenvolvidas, dentre as quais destacam-se as medidas de CCR [Charnes, Cooper, Rhodes, 1978], a medida de BCC [Banker, Charnes, Cooper, 1984], a medida *Free Disposal Hull*-FDH [Deprins, Simar, Tulkens, 1984], as medidas não radiais e algumas medidas aplicáveis nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas são difusas.

Neste capítulo serão desenvolvidas duas novas medidas para avaliar a eficiência técnica em ambiente difuso, ou seja, quando as quantidades consumidas e produzidas são difusas. A primeira seção descreve a medida CCR<sub>g</sub> que é uma generalização da medida de CCR. Tal medida será aplicável na mensuração da eficiência técnica nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas não são conhecidas com exatidão e podem ser expressas através de números difusos do tipo *LR*. A medida será baseada na medida radial de CCR, na relação de ordem entre números difusos desenvolvida por Ramík e Římánek [1985] e na programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989]. A mensuração da eficiência consiste em avaliar a eficiência técnica para diferentes conjuntos corte  $\mu$  dos insumos e dos produtos, como por exemplo  $\mu \in \{0; 0,1; \dots; 0,9; 1\}$ . Se  $\mu = 0$ , então nos cálculos da eficiência consideram-se níveis de consumo e de produção que apresentam possibilidade maior que 0 de terem ocorrido na prática e em consequência os índices da eficiência técnica calculados apresentam possibilidade maior ou igual a 0 de terem ocorrido na prática; quanto maior o nível de  $\mu$  ( $\mu \rightarrow 1$ ), mais os conjuntos corte  $\mu$  restringem as possíveis quantidades consumidas e produzidas e, portanto, maior é a certeza em



relação aos índices da eficiência calculados; se  $\mu = 1$ , então os níveis consumidos e produzidos utilizados nos cálculos apresentam a possibilidade igual a 1 de terem ocorrido, e aos índices da eficiência calculados é associada igual grau de possibilidade de ocorrência na prática.

A segunda seção descreve a medida FDHg que é uma generalização da medida *Free Disposal Hull*. A medida FDHg será aplicável nas situações em que são conhecidos os níveis atuais do consumo  $X^o$  e da produção  $Y^o$ , e a redução  $\alpha_o$  e a expansão  $\beta_o$  do consumo tal que consumindo  $X_{oi} = (1 - \alpha_o)X^o$  e  $X_{os} = (1 + \beta_o)X^o$  o produtor ainda gera quantidades plausíveis  $Y_{oi}$  e  $Y_{os}$  da produção. Para proceder a análise da eficiência o decisor deverá estimar os níveis da produção se o consumo for  $X^{oc} = (1 - c)X^o$  e  $X^{oe} = (1 + e)X^o$ ,  $\forall c \in [0, \alpha_o]$  e  $\forall e \in [0, \beta_o]$  então a tecnologia de produção será constituída por planos de produção resultantes de contrações e expansões dos planos de produção observados e pelos planos dominados pelos primeiros. A mensuração da eficiência técnica orientação consumo consiste em determinar a maior contração radial viável do consumo alocando o plano na isoquanta do conjunto consumo da tecnologia de produção.

### 3.1 Desenvolvimento da Medida CCRg

Em algumas situações as quantidades consumidas e produzidas podem não ser mensuradas exatamente. Sempre que as quantidades consumidas e produzidas não são conhecidas com exatidão, o decisor poderá ser capaz de especificar seus limites inferiores e superiores. Além destes limites, suponhamos que o decisor seja capaz de especificar as quantidades médias que ocorreram com maior possibilidade, caracterizando números difusos do tipo *LR* (figura 2.11). Nesta seção será desenvolvida uma generalização da medida de CCR, denominada de medida CCRg, que será aplicável na mensuração da eficiência técnica quando as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo *LR*. O programa linear que definirá a medida CCRg será baseado em relações de ordem entre números difusos e na programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989].

Inicialmente será definida a relação de ordem entre números difusos desenvolvida por Ramík e Římánek [1985]. A seguir será descrito o modelo de programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989] cujas restrições são relações de ordem. Por último será sugerida a generalização da medida radial de CCR

#### 3.1.1 Relação de Ordem entre Números Difusos

O conceito de relação de desigualdade entre dois números difusos  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  é baseado nas seguintes definições [Ramík e Římánek, 1985].

**Definição 9**  $\tilde{a} \lesssim_R \tilde{b}$  se  $\sup \tilde{a}_\gamma \leq \sup \tilde{b}_\gamma, \forall \gamma \in [0, 1]$ .

Se  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  expressam quantidades não bem conhecidas representadas por números ou intervalos difusos, então a relação  $\tilde{a} \lesssim_R \tilde{b}$  tem a seguinte interpretação: se  $u$  é o valor atual da quantidade  $\tilde{a}$  então a possibilidade do atual valor  $v$  de  $\tilde{b}$  não ser menor que  $u$  é pelo menos tão grande quanto a possibilidade da ocorrência de  $u$ . Em outras palavras, para qualquer valor  $u$  de  $\tilde{a}$  existe um valor  $v$  de  $\tilde{b}$  não menor que  $u$  com pelo menos a mesma possibilidade de ocorrência do valor  $u$  tem na distribuição possibilidade de  $\tilde{a}$ , ou seja:  $\forall u \in R \exists v \in R, [u \leq v \wedge \mu_{\tilde{a}}(u) \leq \mu_{\tilde{b}}(v)]$ .

**Definição 10**  $\tilde{a} \lesssim_L \tilde{b}$  se  $\inf \tilde{a}_\gamma \leq \inf \tilde{b}_\gamma, \forall \gamma \in [0, 1]$ .

Se  $\tilde{a} \lesssim_L \tilde{b}$  então sempre que o atual valor  $v$  de  $\tilde{b}$  ocorrer, a possibilidade do atual valor  $u$  de  $\tilde{a}$  não ser maior que  $v$  é pelo menos tão grande quanto a possibilidade da ocorrência de  $v$  na distribuição de possibilidade de  $\tilde{b}$ . A condição na definição é equivalente a:  $\forall u \in R \exists v \in R, [u \leq v \wedge \mu_{\tilde{a}}(u) \geq \mu_{\tilde{b}}(v)]$ .

Baseados nas definições 9 e 10, Ramík e Římanek [1985, p.126] constróem a relação usada para comparar números difusos.

**Definição 11**  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  se  $\tilde{a} \lesssim_R \tilde{b}$  e  $\tilde{a} \lesssim_L \tilde{b}$ .

Pode-se interpretar estas três definições da seguinte maneira: enquanto que  $\tilde{a} \lesssim_R \tilde{b}$  indica que  $\tilde{a}$  não pode ser maior que  $\tilde{b}$ , a relação  $\tilde{a} \lesssim_L \tilde{b}$  indica que  $\tilde{b}$  não pode ser menor que  $\tilde{a}$ , e a relação  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  significa que, simultaneamente,  $\tilde{a}$  não pode ser maior que  $\tilde{b}$  e  $\tilde{b}$  não pode ser menor que  $\tilde{a}$ .

Campos e Verdegay [1989, p.5] então, a partir da definição 11, expressaram  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  em termos de cortes  $\mu$  de  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$ .

**Conclusão 12** Sejam  $\tilde{a}, \tilde{b} \in R$  números difusos do tipo  $LR$ , tais que  $\tilde{a} = (a, a, \bar{a})$  e  $\tilde{b} = (\underline{b}, b, \bar{b})$ , com subconjuntos corte  $\mu [a_\mu, \bar{a}_\mu]$  e  $[b_\mu, \bar{b}_\mu]$  respectivamente, onde  $\mu \in (0, 1]$ . Então,  $\tilde{a} \lesssim_R \tilde{b}$  se  $\bar{a}_\mu \leq \bar{b}_\mu, \forall \mu \in (0, 1]$ , e  $\tilde{a} \lesssim_L \tilde{b}$  se  $a_\mu \leq b_\mu, \forall \mu \in (0, 1]$ , e  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  se  $\bar{a}_\mu \leq \bar{b}_\mu$  e  $a_\mu \leq b_\mu$ .

Quando for conhecido *a priori* um valor de  $\mu \in (0, 1]$ , correspondendo ao grau de otimismo do decisor em relação a aceitação de  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  pode-se considerar a seguinte versão da conclusão 12 [Tanaka, Ichihachi e Asai, 1984 *apud* Campos, Verdegay, 1989, p.5]:

$$\tilde{a} \lesssim^\mu \tilde{b} \Rightarrow a_h \leq b_h \text{ e } \bar{a}_h \leq \bar{b}_h, \forall h \in [\mu, 1].$$

Como os números difusos são do tipo  $LR$ , então a desigualdade  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  pode ser substituída pelas equações

$$\underline{a}_\mu \leq \underline{b}_\mu \quad \text{e} \quad \bar{a}_\mu \leq \bar{b}_\mu, \quad (1)$$

onde  $\underline{a}_\mu = \mu a + (1 - \mu)\bar{a}$ ,  $\underline{b}_\mu = \mu b + (1 - \mu)\bar{b}$ ,  $\bar{a}_\mu = \mu a + (1 - \mu)\underline{a}$  e  $\bar{b}_\mu = \mu b + (1 - \mu)\underline{b}$  e  $\mu \in [0, 1]$ .

Portanto,  $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$  vale somente se as duas desigualdades expressas em (1) valerem para qualquer conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$ . Ou seja, quando o limite inferior ( $\underline{a}_\mu$ ) do conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{a}$  for menor que o limite inferior ( $\underline{b}_\mu$ ) do conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{b}$  e quando o limite superior do conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{a}$  for menor que o limite superior do conjunto corte  $\mu$  de  $\tilde{b}$ .

### 3.1.2 A Programação Linear Difusa de Campos e Verdegay

Seja o programa linear difuso

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & \tilde{a}_i x \lesssim \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{is})$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  é um vetor de números difusos,  $\tilde{b}_i$  é outro número difuso, e os vetores  $x$  e  $c^T$  são determinísticos (ou seja, as suas componentes não são difusas). Sejam  $\tilde{a}_{ji}$  e  $\tilde{b}_i$  números difusos do tipo *LR* expressos por  $\tilde{a}_{ji} = (\underline{a}_{ji}, a_{ji}, \bar{a}_{ji})$  e  $\tilde{b}_i = (\underline{b}_i, b_i, \bar{b}_i)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  e  $i = 1, 2, \dots, r$  cujas distribuições de possibilidade (ou funções de pertinência) são do tipo<sup>1</sup>

$$\mu_{\tilde{p}}(u) = \begin{cases} \frac{u - \underline{p}}{p - \underline{p}} & \text{se } \underline{p} \leq u \leq p \\ \frac{\bar{p} - u}{\bar{p} - p} & \text{se } p \leq u \leq \bar{p} \\ 0 & \text{se } u \notin [\underline{p}, \bar{p}] \end{cases} \quad (3)$$

A solução de problemas de programação linear difusa com estrutura semelhante ao de (2) e distribuições de possibilidade representadas em (3) são amplamente estudadas, como por exemplo em Campos e Verdegay [1989], Delgado, Verdegay e Vila [1989], Ramík e Římánek [1985], Hu e Hung [1996], Davis [1995] e Fullér e Zimmermann [1992]. Neste trabalho o desenvolvido será restrito ao modelo de Campos e Verdegay [1989].

Campos e Verdegay [1989, p.7] utilizaram as equações expressas em (1) e rescreveram o programa linear difuso (2) no seguinte programa linear paramétrico

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & [(1 - \mu)\bar{a}_i + \mu a_i] x \leq (1 - \mu)\bar{b}_i + \mu b_i \\ & [(1 - \mu)\underline{a}_i + \mu a_i] x \leq (1 - \mu)\underline{b}_i + \mu b_i \\ & x \geq 0, \quad i = 1, \dots, r; \quad \mu \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4)$$

Para fins computacionais  $\mu$  pode assumir os valores 0; 0,1; 0,2; ...; 1.

---

<sup>1</sup>Se  $\tilde{p} = (\underline{p}, p, \bar{p})$ .

### 3.1.3 A Medida CCRg

Seja a medida radial de CCR

$$\begin{aligned}
 EFC_{ICS}(X^o, Y^o) = \min \quad & \theta \\
 \text{s.a.} \quad & zM \geq Y^o \\
 & \theta X^o \geq zN \\
 & z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J
 \end{aligned} \tag{5}$$

Analisando este programa linear verifica-se que a função objetivo é formada apenas por  $\theta$  (sem presença de insumos e de produtos) e que as restrições são relações de desigualdade entre quantidades determinísticas.

Suponhamos que os insumos e os produtos sejam quantidades difusas do tipo *LR* associados a distribuições de possibilidade semelhantes à especificada em (3). Seja  $\widetilde{M}$  a matriz dos produtos e  $\widetilde{N}$  a matriz dos insumos. Substituindo em (5),  $M$  e  $N$  por  $\widetilde{M}$  e  $\widetilde{N}$  respectivamente, e  $Y^o$  por  $\widetilde{Y}^o$  e  $X^o$  por  $\widetilde{X}^o$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \\
 \text{s.a.} \quad & z\widetilde{M} \geq \widetilde{Y}^o \\
 & \lambda\widetilde{X}^o \geq z\widetilde{N} \\
 & z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J
 \end{aligned} \tag{6}$$

No programa linear difuso (6) verifica-se que a função objetivo é formada apenas por quantidades determinísticas, e que as restrições são relações de desigualdade entre números difusos. Devido a estas características, a solução ótima do *pld* (6) pode ser obtida a partir da programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989]. Então, o *pld* para calcular a eficiência técnica orientação consumo supondo retornos constantes de escala- $EFC_{CCRgIn}^\mu(x^o, y^o)$  do  $o$ -ésimo produtor, será

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta_o^\mu \\
 \text{s.a.} \quad & (1 - \mu)\bar{y}_{ko} + \mu y_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [(1 - \mu)\bar{y}_{kj} + \mu y_{kj}], \quad k = 1, \dots, m \\
 & (1 - \mu)\underline{y}_{ko} + \mu y_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j [(1 - \mu)\underline{y}_{kj} + \mu y_{kj}], \quad k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^J z_j [(1 - \mu)\bar{x}_{ij} + \mu x_{ij}] \leq \theta_o^\mu [(1 - \mu)\bar{x}_{io} + \mu x_{io}], \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^J z_j [(1 - \mu)\underline{x}_{ij} + \mu x_{ij}] \leq \theta_o^\mu [(1 - \mu)\underline{x}_{io} + \mu x_{io}], \quad i = 1, \dots, n \\
 & z_j \in R_+^J, \quad \mu \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{7}$$

No cálculo da eficiência técnica, considerando  $J$  produtores, cada um consumindo  $n$  insumos para produzir  $m$  produtos, e considerando  $k$  conjuntos corte  $\mu$ , devem ser resolvidos  $(J \times K)$  programas lineares formados por  $2 \times (n + m)$  restrições e  $(J + 1)$  variáveis cada.

A mensuração da eficiência via medida (7) consiste então, em avaliar a eficiência técnica para diferentes conjuntos corte  $\mu$  das quantidades consumidas e produzidas, tal como 0; 0,1; ...; 0,9; 1. Por exemplo, para  $\mu = 0$  avalia-se a eficiência considerando nos cálculos as quantidades dos fatores de produção que apresentam grau de pertinência maior que 0, e em conseqüência  $\theta_o^{\mu=0}$  apresenta possibilidade maior ou igual a 0 de ser o verdadeiro índice da eficiência do  $o$ -ésimo produtor. Quanto maior o nível de  $\mu$  mais restrita é a possível variação das quantidades consumidas e produzidas, e conseqüentemente maior o realismo em relação ao índice da eficiência técnica calculado. Por exemplo, se  $\mu = 0,4$ , então nos cálculos utiliza-se quantidades de consumo e de produção que apresentam grau de pertinência maior que 0,4, e conseqüentemente os índices da eficiência técnica calculados apresentam no mínimo a mesma possibilidade de terem ocorrido. Variando-se então  $\mu$  em  $[0, 1]$ , com a medida CCRg avalia-se a eficiência técnica de um plano de produção para diferentes graus de otimismo em relação a ocorrência na prática das quantidades dos fatores de produção. Análogo a metodologia de Girod [1996], o decisor terá em mãos um conjunto de soluções resultante desta série de programas lineares, sendo possível analisá-las graficamente em termos dos níveis  $\mu$ .

Se  $\mu = 1$ , então verifica-se que os conjuntos corte 1 dos fatores de produção reduzem-se a quantidades crisp que são iguais as quantidades dos fatores de produção que ocorreram com maior possibilidade, e portanto, os dois primeiros conjuntos de restrições do programa linear (7) são iguais. Igual fato verifica-se com as restrições do terceiro e quarto conjuntos. Portanto, se  $\mu = 1$  então o modelo (7) é totalmente crisp, ou seja, a medida CCRg à medida CCR.

**Proposição 13** *Seja o conjunto corte  $\mu$  dos fatores de produção de todos os produtores. Se  $\mu = 1$ , então a medida CCRg é igual a medida radial de CCR.*

*Demonstração:* Se  $\mu = 1$ , então o programa linear (7) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta_o^{\mu=1} \\
 \text{s.a} \quad & y_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j y_{kj}, \quad k = 1, \dots, m \\
 & y_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j y_{kj}, \quad k = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} \leq \theta_o^{\mu=1} x_{io}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} \leq \theta_o^{\mu=1} x_{io}, \quad i = 1, \dots, n \\
 & z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J
 \end{aligned}$$

Os dois primeiros conjuntos de restrições são iguais, e os terceiro e quarto conjuntos também são iguais. Portanto, o programa linear (7) reduz-se a

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o^{\mu=1} \\
\text{s.a.} \quad & y_{ko} \leq \sum_{j=1}^J z_j y_{kj}, \quad k = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^J z_j x_{ij} \leq \theta_o^{\mu=1} x_{io}, \quad i = 1, \dots, n \\
& z_j \in R_+^J
\end{aligned}$$

que é a medida radial de CCR considerando que os planos de produção são formados pelas quantidades consumidas e produzidas que apresentam a possibilidade máxima de terem ocorrido.

■

### 3.2 Desenvolvimento da Medida FDH<sub>g</sub>

A principal característica que diferencia a medida *free disposal hull*-FDH da medida radial de BCC é que, na primeira, a fronteira de produção é formada unicamente por planos de produção observados. Esta característica está ilustrada na figura 3.1 onde estão plotados 5 planos de produção observados (Tabela B.3, Apêndice B) e duas fronteiras de produção: no gráfico (a) a fronteira de produção da tecnologia, sob hipótese de retornos variáveis de escala, é formada pelos segmentos  $\overline{P_1P_4}$  e  $\overline{P_4P_5}$ ; no gráfico (b) a fronteira de produção gerada pela medida FDH é formada pelos planos de produção observados  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ .

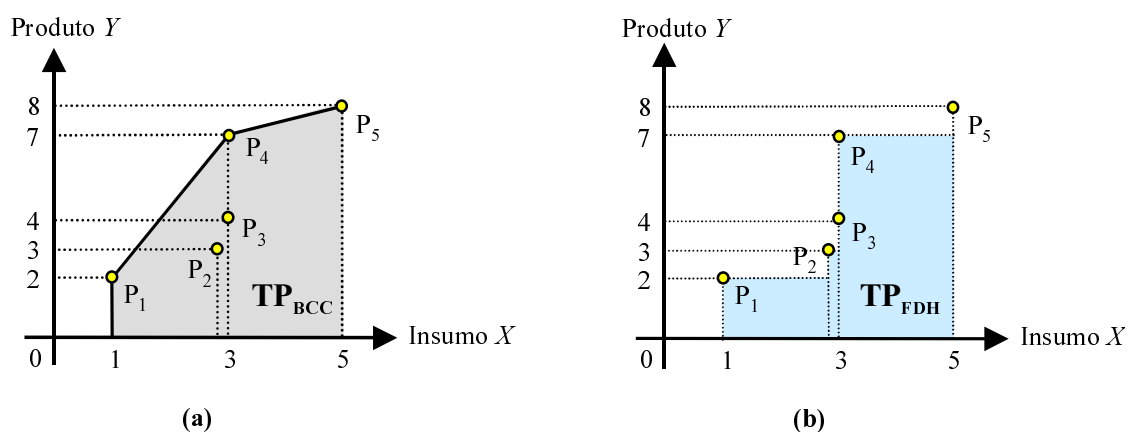


Figura 3.1: As tecnologias  $TP_{BCC}$  e  $TP_{FDH}$  e os planos de produção observados.

Suponhamos que a tecnologia de produção seja formada pelos planos de produção observados, pelos planos resultantes de contrações e de expansões destes (sem combinações lineares) e pelos planos dominados por estes. O modelo de programação matemática para calcular a eficiência neste cenário pode ser obtido através da introdução de pequenas alterações

na medida FDH permitindo contrações e expansões controladas dos planos de produção. Um modelo assim construído retém a característica desejável do *benchmark* ser construído sobre um único produtor mas flexibiliza o modelo FDH.

Nesta seção será desenvolvida uma generalização da medida *Free Disposal Hull*-FDH, denominada de FDHg, para calcular a eficiência considerando que os planos de produção podem ser contraídos e expandidos. Inicialmente será definido o que é retorno de escala e será exposto o método de Banker e Thrall [1992] para calculá-lo. Em seguida será apresentada uma metodologia para contrair e expandir os planos de produção observados de modo que a contração ocorra na direção da maior taxa do retorno de escala e a expansão ocorra na direção da menor taxa do retorno de escala. Por último será definido o problema de programação através do qual será calculado o índice da eficiência FDHg.

### 3.2.1 Retornos de Escala

Retorno de escala, ou economia de escala, é uma relação entre insumos e produtos [Steering Committee, 1997]. Os retornos podem ser constantes, crescentes ou decrescentes, dependendo do nível da produção crescer na mesma proporção, numa proporção maior ou numa proporção menor que o consumo, respectivamente. Portanto, conhecendo-se o retorno de escala pode-se conhecer a variação da produção quando ocorrer uma redução ou um aumento do consumo.

O emprego de DEA na determinação do retorno de escala originou-se do trabalho de Banker [1984] quando introduziu a noção de *most productive scale size*-mpss<sup>2</sup>, e mostrou como a medida CCR poderia ser empregada para obter uma estimativa do retorno de escala. O trabalho de Banker é limitado à consideração de uma única solução ótima para o programa linear da medida CCR o que corresponde à ocorrência de um único hiperplano suporte para a tecnologia de produção, restringindo bastante suas aplicações empíricas [Banker e Thrall, 1992, p.74-75]. Banker e Thrall [1992] foram mais além, e modelaram uma metodologia para mensurar retornos de escala de planos de produção pertencentes ao conjunto eficiência que é aplicável tanto nas situações em que a solução ótima é única quanto naquelas em que a tal solução não é única. Para descrever a metodologia é necessário definir os conjuntos

1.  $TP_{BCC} \equiv \left\{ (X, Y) : X \geq \sum_{j=1}^J z_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^J z_j Y_j, \sum_{j=1}^J z_j = 1, z \in R_+^J \right\}$ ,
2.  $\Pi(X^o, Y^o) \equiv \{(X, Y) : X = xX^o, Y = yY^o, x, y \in R_+, x \neq 0\}$ ,

---

<sup>2</sup>Um plano de produção  $(X_m, Y_m) \in T$  é um mpss se e somente se para todo  $(xX_m, yY_m) \in T$  tem-se  $x \geq y$ .

$$3. \Gamma(X^o, Y^o) \equiv \left\{ (x, y) : xX^o \geq \sum_{j=1}^J z_j X_j, yY^o \leq \sum_{j=1}^J z_j Y_j, \sum_{j=1}^J z_j = 1, z \in R_+^J \right\},$$

onde  $X$  é a matriz dos insumos,  $Y$  é a matriz dos produtos e  $J$  é o número de produtores. O conjunto  $TP_{BCC}$  é formado por todos os planos de produção viáveis considerando retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos; o conjunto  $\Pi$  é formado por planos de produção do tipo  $(xX^o, yY^o)$ ,  $x, y \geq 0$ ,  $x \neq 0$ ; o terceiro conjunto diferencia-se dos anteriores quanto as quantidades pertencentes a ele. Enquanto que  $TP_{BCC}$  e  $\Pi$  são formados por planos de produção,  $\Gamma$  é constituído por todos os pares de números reais positivos  $(x, y)$  utilizados na contração e na expansão de  $X^o$  e de  $Y^o$  tal que  $(xX^o, yY^o)$  pertença a  $TP_{BCC}$ . Os conjuntos  $TP_{BCC}$  e  $\Gamma$  encontram-se exemplificados respectivamente nos gráficos (a) da figura 3.1 e na figura 3.2. (Nas situações de um único insumo e de um único produto o conjunto  $\Pi$  coincide com o primeiro quadrante do plano  $XY$ ).

Na figura 3.2 estão ilustrados os pares  $(x, y)$  que contraem e expandem o consumo e a produção de  $P_4$  e geram planos de produção pertencentes a  $TP_{BCC}$ . Com os pares de números locados no interior de  $\Gamma$  são gerados planos de produção pertencentes ao interior de  $TP_{BCC}$ , e com os pares locados na borda de  $\Gamma$  ( $P_4$ ) são gerados planos de produção pertencentes a fronteira de produção de  $TP_{BCC}$ . Sejam então os segmentos

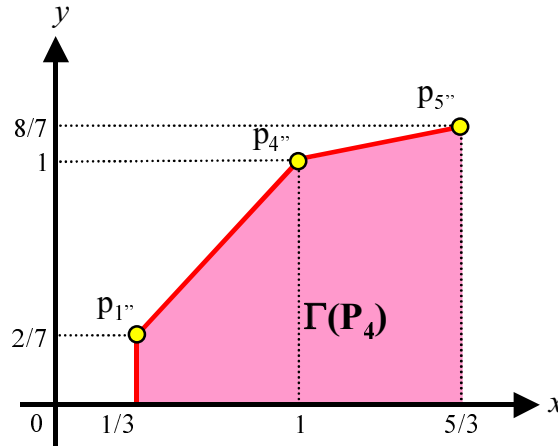


Figura 3.2: Imagem de  $\Pi(3,7) \cap TP_{BCC}$ .

$$\overline{P_1''P_4''} : \begin{cases} x = 1 - t & 0 < t < \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{15t}{14} \end{cases}$$

$$\text{e } \overline{P_4''P_5''} : \begin{cases} x = 1 + t & 0 < t < \frac{2}{3} \\ y = 1 + \frac{3t}{14} \end{cases}$$



que definem a borda superior de  $\Gamma(P_4)$ . Qualquer par de escalares  $(x, y) = (1 - t, 1 - \frac{15}{14}t)$ ,  $0 < t \leq \frac{2}{3}$ , pertencente ao primeiro segmento contrai  $(3, 7)$  e o plano  $(3x, 7y)$  pertence ao segmento  $\overline{P_1P_4} \subset TP_{BCC}$ . Pares  $(x, y) = (1 + t, 1 + \frac{3}{14}t)$  pertencentes a  $\overline{p_1p_5}$  expandem  $(3, 7)$  e geram planos de produção do tipo  $(3x, 7y)$  pertencentes ao segmento  $\overline{P_4P_5} \subset TP_{BCC}$ . Analisando a inclinação das retas  $\overrightarrow{p_1p_4}$  e  $\overrightarrow{p_4p_5}$  pode-se concluir que<sup>3</sup>:

1. se o consumo de  $X^o = 3$  for contraído para  $X = 3(1 - t)$ , ou seja,  $X^o$  será decrescido em  $t \times 100$  por cento, então o novo nível da produção será no máximo  $Y = 7(1 - \frac{15}{14}t)$ , com  $0 < t < \frac{2}{3}$ .
2. se  $X^o = 3$  for acrescido em  $(t \times 100)\%$ , então o novo nível da produção será acrescido em  $(\frac{3}{14}t \times 100)\%$ , com  $0 < t < \frac{2}{3}$ .

O retorno de escala numa vizinhança<sup>4</sup> próxima ao plano de produção  $(3, 7)$ , denominado neste trabalho por  $REsc_{(3,7)}$ , é dado pela inclinação das retas que passam por  $(1, 1)$  e que definem a borda de  $\Gamma(P_4)$  [Banker e Thrall, 1992, p.78]. No exemplo acima as retas  $\overrightarrow{p_1p_4}$  e  $\overrightarrow{p_4p_5}$  passam por  $(1, 1)$ , e observam-se portanto dois valores para o retorno de escala em  $(3, 7)$ , ou seja  $REsc_{(3,7)} = \frac{15}{14}$  e  $REsc_{(3,7)} = \frac{3}{14}$ . Banker e Thrall [1992, p.79] denominam o intervalo definido por estes dois valores de “elasticidade do retorno de escala” numa vizinhança de  $(3, 7)$ .

Para estender a noção de retornos de escala à situação em que ocorrem múltiplos insumos e produtos, Banker e Thrall [1992, p.79] consideram aumentos proporcionais nos insumos e nos produtos, mantendo fixo o mix insumo-produto igual ao de  $(X^o, Y^o)$ . Os dois pesquisadores desenvolveram a metodologia de cálculo atendo-se à interseção dos conjuntos  $TP_{BCC}$  e  $\Pi(X^o, Y^o)$ , e à solução do programa linear

$$EFC_{IVa}(X^o, Y^o) = \max \{(WY^o + u^o) : WM - VN + u^o \leq 0; VX^o = 1; W, V \geq \varepsilon\}$$

onde  $\varepsilon$  é uma quantidade infinitesimal positiva. Este programa linear é o dual do programa linear utilizado para mensurar o índice não radial da eficiência técnica de BCC.

Seja  $W^*$ ,  $V^*$  e  $u^{o*}$  a solução ótima de  $EFC_{IVa}$  para o plano de produção  $(X^o, Y^o)$  pertencente à fronteira de produção. Logo  $W^*Y^o + u^{o*} = 1$  e  $V^*X^o = 1$ . Esta solução identifica um hiperplano suporte no ponto  $(X^o, Y^o)$ , e a imagem em  $\Gamma$  de sua interseção com o plano  $\Pi(X^o, Y^o)$  será da forma  $(W^*Y^o)y = (V^*X^o)x - u^{o*}$  [Banker e Thrall, 1992, p.79]<sup>5</sup>. Se esta

<sup>3</sup>Banker e Thrall, [1992, p.78-79].

<sup>4</sup>Chama-se vizinhança de raio  $r$  de um ponto  $a \in R_+^N$  ao conjunto dos pontos  $z$  tais que  $\|z - a\| < r$ , onde  $\|x\|$  é uma norma Euclideana.

<sup>5</sup>Pois se  $(X, Y) \in P$  então  $X = xX^o$  e  $Y = yY^o$ , e qualquer ponto  $(X, Y)$  no hiperplano satisfaz a condição de  $W^*Y + u^{o*} = V^*X$ .

for a única reta que passa por  $(1, 1) \in \Gamma(X^o, Y^o)$  então pode-se calcular o retorno de escala em  $(X^o, Y^o)$ , ou seja,  $REsc_{(X^o, Y^o)} = \frac{V^* X^o}{W^* Y^o} = \frac{1}{W^* Y^o} = \frac{1}{1 - u^{o*}}$ .

Para determinar a elasticidade do retorno de escala nas situações em que a reta passante por  $(1, 1) \in \Gamma$  não é única, Banker e Thrall [1992, p.81] sugerem o cálculo dos limites inferior e superior de  $REsc$  a partir das relações

$$REsc_{(X^o, Y^o)}^- = \frac{1}{1 - u^{o-*}} \leq REsc_{(X^o, Y^o)} \leq REsc_{(X^o, Y^o)}^+ = \frac{1}{1 - u^{o+*}} \quad (a)$$

onde

$$u^{o-*} = \min \{u^{o-} : W^- Y^o + u^{o-} = 1; W^- M - V^- N + u^{o-} \leq 0; V^- X^o = 1; W^-, V^- \geq \varepsilon\} \quad (b)$$

e

$$u^{o+*} = \max \{u^{o+} : W^+ Y^o + u^{o+} = 1; W^+ M - V^+ N + u^{o+} \leq 0; V^+ X^o = 1; W^+, V^+ \geq \varepsilon\}. \quad (c)$$

No programa linear (b), é minimizada a constante utilizada no cálculo do limite inferior do retorno de escala, e no programa (c) maximiza-se a constante, determinando o limite superior do retorno de escala. Portanto, para calcular os limites máximo e mínimo do retorno de escala de um plano de produção basta determinar a solução ótima dos programas lineares (b) e (c) e substituir a solução ótima das funções objetivo nas relações de desigualdade expressas em (a).

A metodologia sugerida por Banker e Thrall [1992] também pode ser empregada quando  $(X^o, Y^o)$  não pertence ao conjunto eficiência, empregando as seguintes projeções de  $(X^o, Y^o)$  no conjunto eficiência:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{io} &= \theta^* x_{po} - s_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \\ \hat{y}_{pr} &= y_{po} + s_p^*, \quad p = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

onde  $\theta^*$ ,  $s_i^*$  e  $s_p^*$  constituem a solução ótima do programa linear que calcula o índice não radial da eficiência técnica considerando retornos variáveis de escala (medida BCC não radial). Após executar estas alterações,  $(\hat{X}^o, \hat{Y}^o)$  pertence a fronteira de produção recaindo-se na análise do retorno de escala detalhado nesta seção [Banker, Bardhan e Cooper, 1996, p.584].

### 3.2.2 Estimando a Produção

No exemplo ilustrado na figura 3.1, painel (b), são detectadas duas deficiências da medida FDH. A primeira deficiência pode ser observada no índice de eficiência atribuído aos planos de produção  $P_3 = (3, 4)$  e  $P_4 = (3, 7)$ . Apesar de ambos serem considerados FDH-eficientes<sup>6</sup> verifica-se claramente que o processo produtivo de  $P_4$  é melhor que o de  $P_3$ . A

---

<sup>6</sup>Apesar de  $P_3$  ser classificado como ineficiente tecnicamente pela medida FDH orientação produção, será classificado como eficiente pela medida orientação consumo.

segunda deficiência pode ser observada nos índices de eficiência técnica atribuídos aos planos  $P_4 = (3, 7)$  e  $P_2 = (2, 9; 3)$ ; apesar de  $P_2$  consumir 96,6% do nível dos insumos de  $P_4$  e produzir apenas 42,8% do nível produzido por  $P_4$ , o índice de eficiência técnica atribuído a ambos é o mesmo.

Seja o plano de produção  $\hat{P}_4 = (\hat{X}_4, \hat{Y}_4)$ , com  $\hat{X}_4 = 3 \times (1 - 0,04)$  e  $0 < \hat{Y}_4 \leq Y_4$  ( $\hat{P}_4$  foi construído a partir da contração do consumo de  $P_4$  em 4%). Dependendo do nível da produção  $\hat{Y}_4$ , o produtor hipotético  $\hat{P}_4$  passa a dominar o produtor observado  $P_2$ . Então, se o produtor  $P_4$  reduziu o consumo em 4%, qual será o novo nível da produção (supondo retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos)? A solução desta questão foi sugerida anteriormente e baseia-se no estudo do retorno de escala numa vizinhança de  $P_4$ . Suponhamos que a elasticidade do retorno de escala numa vizinhança do  $o$ -ésimo produtor seja  $[REsc_{(X^o, Y^o)}^-, REsc_{(X^o, Y^o)}^+]$ , e que  $(a \times 100)$  % seja a redução proporcional no consumo e  $(b \times 100)$  % o aumento proporcional no consumo. Logo:

1. se a quantidade consumida decrescer proporcionalmente e passar de  $X^o$  para  $X^o \times (1 - a)$ , então a produção decrescerá de  $Y^o$  para  $Y^o \times (1 - a \times REsc_{(X^o, Y^o)}^+)$ ;
2. se a quantidade consumida aumentar proporcionalmente de  $X^o$  para  $X^o \times (1 + b)$ , então a produção crescerá de  $Y^o$  para  $Y^o \times (1 + b \times REsc_{(X^o, Y^o)}^-)$ .

### 3.2.3 Limites das Contrações e das Expansões

A elasticidade numa vizinhança do plano de produção  $P_4$  do exemplo acima é  $[\frac{3}{14}, \frac{15}{14}]$ . Considerando-se portanto, uma redução no consumo em 4%, passando das atuais 3 unidades para  $3 \times (1 - 0,04) = 2,88$  unidades, então segundo a metodologia descrita na seção acima, a produção de  $P_4$  passará de 7 unidades observadas para  $7 \times (1 - 0,04 \times \frac{15}{14}) = 6,7$  unidades. Este novo plano ( $\hat{P}_4$ ) domina  $P_2$  e  $P_3$  sendo então classificados como ineficientes tecnicamente ( $\hat{P}_4$  é o plano de produção *benchmark* de  $P_2$  e  $P_3$ ).

Novamente surge uma questão: quais são os limites da contração e da expansão do consumo de um produtor? Esta questão depende do decisor, porém sugere-se uma das duas alternativas:

1. o decisor fixa os limites das contrações e das expansões;
2. os limites são calculados pelo decisor de modo que os planos de produção resultantes da contração e da expansão ainda pertençam a  $TP_{BCC}$ .

Independente da alternativa empregada, pode-se afirmar que o consumo de cada produtor poderá ser reduzido no máximo em  $(\alpha \times 100)$  %,  $0 \leq \alpha < 1$  e expandido em  $(\beta \times 100)$  %,  $\beta \geq 0$ .

### 3.2.4 Planos de Produção Difusos

Suponhamos que o plano de produção observado do  $o$ -ésimo produtor seja  $(X^o, Y^o) = (x_{o1}, \dots, x_{on}, y_{o1}, \dots, y_{om})$ , que  $REsc_{(X^o, Y^o)}^- = I_o$  e  $REsc_{(X^o, Y^o)}^+ = S_o$  e que os escalares positivos a serem utilizados para contrair e expandir  $(X^o, Y^o)$  estejam em  $[0, \alpha_o)$ ,  $\alpha < 1$  e  $[0, \beta_o)$  respectivamente. O intervalo que contem as possíveis quantidades a serem consumidas do  $i$ -ésimo insumo é  $(\underline{x}_{oi}, \bar{x}_{oi}) = (x_{oi}(1 - \alpha_o), x_{oi}(1 + \beta_o)) \subset R$  e o intervalo que contem as possíveis quantidades produzidas do  $k$ -ésimo produto é  $(\underline{y}_{ok}, \bar{y}_{ok}) = (y_{ok}(1 - \alpha_o \times S_o), y_{ok} \times (1 - \beta_o \times I_o)) \subset R$ . Se for associado ao consumo do  $i$ -ésimo insumo a distribuição de possibilidade (ou função de pertinência)

$$\mu_{x_{oi}}(u) = \begin{cases} \frac{u_{oi} - \underline{x}_{oi}}{x_{oi} - \underline{x}_{oi}} & \text{se } \underline{x}_{oi} < u_{oi} \leq x_{oi} \\ \frac{\bar{x}_{oi} - u_{oi}}{\bar{x}_{oi} - x_{oi}} & \text{se } x_{oi} \leq u_{oi} < \bar{x}_{oi} \\ 0 & \text{se } u_{oi} \notin (\underline{x}_{oi}, \bar{x}_{oi}) \end{cases}, \quad (\text{I})$$

então o consumo realizado pode ser visto como uma quantidade difusa. A quantidade difusa  $\tilde{x}_{oi}$  é um número difuso do tipo  $LR$  que pode ser representada pelo terno  $(\underline{x}_{oi}, x_{oi}, \bar{x}_{oi})$ , onde  $\underline{x}_{oi}$  e  $\bar{x}_{oi}$  são os limites inferior e superior e  $x_{oi}$  é o nível que apresenta a maior possibilidade de ter ocorrido.<sup>7</sup>

Associando também à produção do  $k$ -ésimo produto a distribuição de possibilidade

$$\mu_{y_{ok}}(v) = \begin{cases} \frac{v_{ok} - \underline{y}_{ok}}{y_{ok} - \underline{y}_{ok}} & \text{se } \underline{y}_{ok} < v_{ok} \leq y_{ok} \\ \frac{\bar{y}_{ok} - v_{ok}}{\bar{y}_{ok} - y_{ok}} & \text{se } y_{ok} \leq v_{ok} < \bar{y}_{ok} \\ 0 & \text{se } v_{ok} \notin (\underline{y}_{ok}, \bar{y}_{ok}) \end{cases}, \quad (\text{II})$$

a quantidade produzida deste produto é um número difuso do tipo  $LR$  representado pelo terno  $\tilde{y}_{ok} = (\underline{y}_{ok}, y_{ok}, \bar{y}_{ok})$ , onde  $\underline{y}_{ok}$  e  $\bar{y}_{ok}$  são os limites mínimo e máximo de produção e  $y_{ok}$  é o nível de produção que apresenta a maior possibilidade de ter ocorrido na prática. Portanto, se às quantidades consumidas e produzidas são associadas as distribuições de possibilidade (I) e (II) respectivamente, então o plano de produção observado  $(X_o, Y_o)$  pode ser visto como sendo um plano de produção difuso, ou seja  $(\tilde{X}_o, \tilde{Y}_o) = (\tilde{x}_{o1}, \dots, \tilde{x}_{on}, \tilde{y}_{o1}, \dots, \tilde{y}_{om})$ .

Os parâmetros  $\mu_x$  e  $\mu_y$ , das equações (I) e (II), são os níveis de realismo desejado aos fatores de produção. Fixando o mesmo grau de realismo  $\mu$  às quantidades consumidas e produzidas, ou seja,  $\mu = \mu_x = \mu_y$ , os planos de produção construídos a partir do plano de produção observado  $(X^o, Y^o)$  e que apresentam o grau de realismo igual a  $\mu$ , são

---

<sup>7</sup> $x_{oi}$  é o nível de consumo observado pelo decisor.

$$\begin{aligned} X^{oL} &= X^o (1 - \alpha_o \times (1 - \mu)) \\ Y^{oL} &= Y^o (1 - \alpha_o \times REsc^+ \times (1 - \mu)) \end{aligned}$$

e

(III)

$$\begin{aligned} X^{oU} &= X^o (1 + \beta_o \times (1 - \mu)) \\ Y^{oU} &= Y^o (1 + \beta_o \times REsc^- \times (1 - \mu)) \end{aligned} \cdot$$

Dado o grau de realismo  $\mu$ , os escalares  $c$  e  $e$  que contraem e expandem o vetor consumo do plano  $(X^o, Y^o)$  são respectivamente

$$c = \alpha_o (1 - \mu) \quad e \quad e = \beta_o (1 - \mu). \quad (IV)$$

Os dois planos de produção cujo grau de realismo é igual a  $\mu$  são

$$\begin{aligned} X^{oc} &= X^o (1 - c) \\ Y^{oc} &= Y^o (1 - c \times REsc^+) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X^{oe} &= X^o (1 + e) \\ Y^{oe} &= Y^o (1 + e \times REsc^-) \end{aligned} \cdot$$

Sejam  $c \in [0, \alpha_o)$  e  $e \in [0, \beta_o)$  respectivamente os escalares empregados para contrair e expandir o consumo do plano de produção do  $o$ -ésimo produtor. Se  $c = e = 0$  então as quantidades consumidas e produzidas atribuídos para  $\tilde{x}_{oi}$  e para  $\tilde{y}_{oj}$  respectivamente coincidem com as observadas. Neste caso tem-se  $\mu = \mu_{x_{oi}}(u) = \mu_{y_{ok}}(v) = 1$  o que indica que os níveis de consumo e de produção atribuídos às quantidades difusas apresentam possibilidade máxima de ocorrerem na prática e de serem implementadas (ou ainda, de serem realistas).

Se  $c \rightarrow \alpha_o$  ou  $e \rightarrow \beta_o$ , então  $\mu_{x_{oi}}(u) \rightarrow 0$  e  $\mu_{y_{ok}}(v) \rightarrow 0$ , sugerindo que quanto maior a expansão ou a contração, menor a possibilidade associada à ocorrência na prática do consumo e da produção atribuídos ao  $i$ -ésimo insumo e ao  $k$ -ésimo produto respectivamente (ou seja, menos realista é o plano de produção gerado através da contração ou da expansão do plano observado). Se  $c = \alpha_o$  ou  $e = \beta_o$ , então  $\mu_{x_{oi}}(u) = \mu_{y_{ok}}(v) = 0$ , indicando que o plano gerado apresenta possibilidade nula de ocorrer na prática (ou seja, é um plano de produção não realizável).

### 3.2.5 A Medida FDHg

Suponhamos que o decisor observou  $J$  planos de produção, consistindo cada um de  $n$  e de  $m$  produtos<sup>8</sup>. Seja  $PLA = \{1, \dots, J\}$  o conjunto dos índices dos produtores,  $INS = \{1, \dots, n\}$  o conjunto dos índices dos insumos e  $PRO = \{1, \dots, m\}$  o conjunto dos índices dos produtos. Suponhamos tenham sido calculados a elasticidade dos retornos de escala e que tenham sido fixados os limites máximos e mínimos das contrações e das expansões dos  $J$  planos de produção.<sup>9</sup>

<sup>8</sup>O plano de produção do  $o$ -ésimo produtor é  $(X^o, Y^o) = (x_{o1}, \dots, x_{on}, y_{o1}, \dots, y_{om})$ .

<sup>9</sup>A elasticidade do  $o$ -ésimo produtor é  $[REsc_{(X^o, Y^o)}^-, REsc_{(X^o, Y^o)}^+] = [I^o, S^o]$  e os limites da contração e da expansão respectivamente são  $\alpha_o$  e  $\beta_o$ .

### 3.2.5.1 A Tecnologia de Produção $TP_{FDH_g}$

As mensurações dos índices da eficiência técnica definidos no capítulo 2 são feitos a partir de construções de representações da tecnologia de produção (que são as restrições dos programas lineares utilizados para calcular os índices). Utilizando a fronteira desta tecnologia empírica são mensurados os índices da eficiência técnica dos planos de produção observados. A tecnologia construída, além dos planos de produção observados, também é formada por planos de produção não observados que são (necessariamente) resultantes de postulados relacionados com a economia de escala e com relações de dominância. A seguir serão relacionados os três postulados que geram a tecnologia de produção FDH ( $TP_{FDH_g}$ ) não convexa (como em Tulkens e Eeckaut [1995, p.475]).

- **Postulado (i):** *Cada plano de produção observado pertence a tecnologia de produção.*
- **Postulado (ii):** *Os planos de produção não observados dominados<sup>10</sup> pelos planos observados também pertencem à tecnologia de produção.*

Estes dois postulados definem a tecnologia de produção *free disposal hull* -  $TP_{FDH}$  - que pode ser escrita como segue:

$$TP_{FDH} = \{(X, Y) \in R_+^{N+M} : \sum_{j=1}^J z_j x_{ji} \leq x_i, i \in INS;$$

$$y_k \leq \sum_{j=1}^J z_j y_{jk}, k \in PRO;$$

$$\sum_{j=1}^J z_j = 1; z_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}.$$

Conforme a seção anterior, a cada plano de produção gerado pela contração e pela expansão de um plano de produção observado é associado um grau de realismo. Dependendo então do grau de realismo desejado, a tecnologia de produção será constituída por diferentes conjuntos de planos de produção viáveis. Por exemplo, se desejamos que os planos pertencentes à tecnologia tenham um grau de realismo maior ou igual a 0,4 então a tecnologia de produção será constituída por planos cujos níveis de consumo e de produção tem grau de pertinência maior ou igual a 0,4. O terceiro postulado a ser enunciado envolve os planos de produção gerados a partir das contrações e das expansões dos planos de produção observados e o grau mínimo de realismo  $\mu$  desejado.

- **Postulado (iii):** *Os planos de produção não observados que apresentam realismo mínimo igual a  $\mu$  que são resultantes de contrações e de expansões dos planos de produção*

---

<sup>10</sup>Sendo  $p^o = (x^o, y^o)$  e  $p^d = (x^d, y^d)$  os planos de produção,  $p^d$  domina  $p^o$  se  $x^d \leq x^o$  e  $y^d \geq y^o$ , ou se  $x^d \leq x^o$  e  $y^d \geq y^o$  [Tulkens, 1993, p.4] (também veja o apêndice C).

observados, e também os dominados por aqueles, pertencem à tecnologia de produção.

A tecnologia  $TP_{FDHg}^\mu$  sugerida pelos postulados (i)-(iii) poderá ser escrita como união das tecnologias

$$\begin{aligned} TP_{FDHg1}^\mu &= \{(X, Y) : \sum_{j=1}^J x_{ji} (\gamma_j - c_j) \leq x_i, i \in INS, \\ &\quad y_k \leq \sum_{j=1}^J y_{jk} (\gamma_j - c_j \times S^j), k \in PRO; \\ &\quad \sum_{j=1}^J \gamma_j = 1; 0 \leq c_j \leq \alpha_j (1 - \mu) \gamma_j; \gamma_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}, \text{ e} \\ TP_{FDHg2}^\mu &= \{(X, Y) : \sum_{j=1}^J x_{ji} (\delta_j + e_j) \leq x_i, i \in INS, \\ &\quad y_k \leq \sum_{j=1}^J y_{jk} (\delta_j + e_j \times I^j), k \in PRO; \\ &\quad \sum_{j=1}^J \delta_j = 1; 0 \leq e_j \leq \beta_j (1 - \mu) \delta_j; \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}. \end{aligned}$$

O primeiro conjunto gera os planos de produção que apresentam realismo maior ou igual a  $\mu$  e que são resultantes de contrações dos planos de produção observados e os dominados pelos primeiros. O segundo conjunto consiste nos planos de produção que também apresentam realismo maior ou igual a  $\mu$  e são resultantes das expansões dos planos observados e pelos planos dominados. Fazendo  $TP_{FDHg}^\mu = TP_{FDHg1}^\mu \cup TP_{FDHg2}^\mu$ , a tecnologia  $TP_{FDHg}^\mu$  que é constituída por planos que apresentam realismo maior ou igual a  $\mu$ , poderá ser escrita em termos do conjunto de equações

$$\begin{aligned} TP_{FDHg}^\mu &= \{(X, Y) : \sum_{j=1}^J x_{ji} ((\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)) \leq x_i, i \in INS, \\ &\quad y_k \leq \sum_{j=1}^J y_{jk} ((\gamma_j - c_j \times S^j) + (\delta_j + e_j \times I^j)), k \in PRO; \\ &\quad \sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) = 1; 0 \leq c_j \leq \alpha_j (1 - \mu) \gamma_j; 0 \leq e_j \leq \beta_j (1 - \mu) \delta_j; \\ &\quad \gamma_j, \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}. \end{aligned}$$

As variáveis  $\gamma_j$  e  $\delta_j$  tem as seguintes propriedades: se  $\gamma_o = 1$  então  $\delta_j = 0 \forall j \in PLA$ , e os planos gerados são dominados por um plano viável resultante de uma contração de  $(X^o, Y^o)$ ; se  $\delta_o = 1$  então  $\gamma_j = 0, \forall j \in PLA$ , e os planos gerados são dominados por um plano viável resultante da expansão de  $(X^o, Y^o)$ . Um exemplo de tecnologia  $TP_{FDHg}^\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) gerada a partir de 5 planos de produção observados encontra-se ilustrada na figura 3.3, cuja fronteira de produção é constituída por planos de produção observados e pelas contrações e expansões destes.

Para a tecnologia de produção  $TP_{FDHg}^\mu$  podem ser definidos também os conjuntos consumo e produção. Dado o vetor produção  $Y^o = (y_{o1}, \dots, y_{om})$  e o grau de realismo  $\mu$ , então o conjunto consumo  $C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ , que é constituído pelos vetores consumo  $X = (x_1, \dots, x_n)$  que produzem pelo menos o vetor produção  $Y^o$ , é

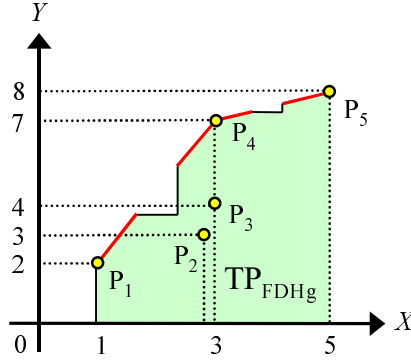


Figura 3.3: A tecnologia de produção  $TP_{FDHg}^\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ .

$$C_{FDHg}^\mu(Y^o) = \{X : \sum_{j=1}^J x_{ji} ((\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)) \leq x_i, i \in INS,$$

$$y_{ok} \leq \sum_{j=1}^J y_{jk} ((\gamma_j - c_j \times S^j) + (\delta_j + e_j \times I^j)), k \in PRO;$$

$$\sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) = 1; 0 \leq c_j \leq \alpha_j (1 - \mu) \gamma_j; 0 \leq e_j \leq \beta_j (1 - \mu) \delta_j;$$

$$\gamma_j, \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}.$$

Seja o consumo  $X^o = (x_{o1}, \dots, x_{on})$ , então o conjunto produção  $P_{FDHg}(X^o)$ , que é formado pelos vetores  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  possíveis de serem produzidos a partir do consumo de  $X^o$  e que apresentam grau de realismo mínimo igual a  $\mu$  é

$$P_{FDHg}^\mu(X^o) = \{Y : \sum_{j=1}^J x_{ji} ((\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)) \leq x_{oi}, i \in INS,$$

$$y_k \leq \sum_{j=1}^J y_{jk} ((\gamma_j - c_j \times S^j) + (\delta_j + e_j \times I^j)), k \in PRO;$$

$$\sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) = 1; 0 \leq c_j \leq \alpha_j (1 - \mu) \gamma_j; 0 \leq e_j \leq \beta_j (1 - \mu) \delta_j;$$

$$\gamma_j, \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA\}.$$

Para que possa ser definida uma medida da eficiência técnica em relação a tecnologia de produção proposta, os conjuntos  $TP_{FDHg}^\mu$ ,  $C_{FDHg}^\mu$  e  $P_{FDHg}^\mu$  devem satisfazer as seguintes propriedades [Färe, Grosskopf, Lovell, 1993, p.45, 63, 97].



**Proposição 14**  $TP_{FDHg}^\mu$  é fechado. (Propriedade T1, seção 2.1)

*Demonstração:* Suponhamos que  $\gamma_s = 1$ , com  $s \in PLA$ , e mostremos inicialmente que  $TP_{FDHg1}^\mu(P^s)$ , que é a tecnologia de produção gerada a partir das contrações do plano de produção  $P^s = (X^s, Y^s)$  é fechada. Seja  $(X^L, Y^L)$  uma seqüência tal que  $(X^L, Y^L) \rightarrow (X^o, Y^o)$ , e  $(X^L, Y^L) \in TP_{FDHg1}^\mu(P^s)$ ,  $\forall L$ . Logo existe uma seqüência  $c^L$  tal que  $X^s(1 - c^L) \leq X^L$  e  $Y^s(1 - c^L S^s) \geq Y^L$ ,  $\forall L$ . Como  $X^L$  e  $Y^L$  são convergentes, então são limitadas, logo existe  $(\bar{X}, \bar{Y})$  tal que  $\bar{X} \geq X^L$  e  $\bar{Y} \leq Y^L$ ,  $\forall L$ . Seja o conjunto  $\{c \in [0, \alpha_s] : X^s(1 - c) \leq \bar{X}, Y^s(1 - c^L S^s) \geq \bar{Y}\}$ . Este conjunto é compacto (pois é fechado e limitado)<sup>11</sup> o que implica na existência de uma subsequência  $c^{LK} \subset c^L$  tal que  $c^{LK} \rightarrow c^o$ ,  $X^s(1 - c^{LK}) \leq \bar{X}$  e  $Y^s(1 - c^{LK} S^s) \geq \bar{Y}$ ,  $\forall LK$ . Como  $X^s(1 - c)$  e  $Y^s(1 - c^L S^s)$  são funções contínuas, então  $X^s(1 - c^o) \leq X^o$ ,  $Y^s(1 - c^o S^o) \geq Y^o$ , ou seja,  $(X^o, Y^o) \in TP_{FDHg1}^\mu(P^s)$ , e portanto  $TP_{FDHg1}^\mu(P^s)$  é fechado. Para concluir, tem-se que  $TP_{FDHg1}^\mu = TP_{FDHg1}^\mu(P^1) \cup \dots \cup TP_{FDHg1}^\mu(P^n)$ , e como a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado então  $TP_{FDHg1}^\mu$  é um conjunto fechado. De modo análogo pode-se mostrar que  $TP_{FDHg2}^\mu$  é um conjunto fechado e portanto  $TP_{FDHg}^\mu = TP_{FDHg1}^\mu \cup TP_{FDHg2}^\mu$  também é um conjunto fechado. ■

**Proposição 15**  $0 \notin C_{FDHg}^\mu(Y^o)$  ( $Y^o > 0$ ) e  $C_{FDHg}^\mu(0) = R_+^n$ . (Propriedade T2, seção 2.1)

Segundo esta proposição, consumir a quantidade nula de cada insumo não produz quantidade positiva dos produtos. A segunda condição da proposição impõe que pode-se produzir a quantidade nula consumindo qualquer quantidade dos insumos.

**Proposição 16**  $C_{FDHg}^\mu(Y^o)$  é fechado. (Propriedade T3, seção 2.1)

*Demonstração:* Semelhante a demonstração da Proposição 14. ■

**Proposição 17** Se  $X^1 \geq X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$  então  $X^1 \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ . (Propriedade do descarte dos insumos)

*Demonstração:* Seja  $X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ , logo  $X^j(1 - c_j) \leq X^o$  ou  $X^j(1 + e_j) \leq X^o$  para algum  $j \in PLA$ . Se  $X^1 \geq X^o$  então  $X^j(1 - c_j) \leq X^o \leq X^1$  ou  $X^j(1 + e_j) \leq X^o \leq X^1$  e portanto  $X^1 \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ . ■

**Proposição 18** Se  $\mu^o < \mu^1$ , então  $C_{FDHg}^{\mu^o}(Y^o) \subset C_{FDHg}^{\mu^1}(Y^o)$ .

*Demonstração:* Como as restrições  $0 \leq c_j \leq \alpha_j(1 - \mu^1)\gamma_j$ ;  $0 \leq e_j \leq \beta_j(1 - \mu^1)\delta_j$ ,  $j \in PLA$ , são mais restritivas que as restrições  $0 \leq c_j \leq \alpha_j(1 - \mu^o)\gamma_j$ ;  $0 \leq e_j \leq \beta_j(1 - \mu^o)\delta_j$ ,  $j \in PLA$ , pois  $(1 - \mu^1) < (1 - \mu^o)$ , então  $C_{FDHg}^{\mu^o}(Y^o) \subset C_{FDHg}^{\mu^1}(Y^o)$ . (Propriedade semelhante vale para  $P_{FDHg}^\mu(X^o)$ )

<sup>11</sup>Porque as restrições que definem o conjunto são do tipo  $\leq$  e  $\geq$  e  $0 \leq c \leq \alpha_o$ .

**Proposição 19**  $P_{FDHg}^\mu(X^o)$  é fechado e limitado. (Propriedade T5, seção 2.1)

*Demonstração:* A demonstração de que o conjunto  $P_{FDHg}^\mu(X^o)$  é fechado é semelhante a demonstração da Proposição 14. A propriedade de ser limitado é caracterizada pelo segundo conjunto de desigualdades que definem  $P_{FDHg}^\mu(X^o)$  que são do tipo  $\leq$ . ■

**Proposição 20** Se  $Y^1 \leq Y^o \in P_{FDHg}^\mu(X^o)$  então  $Y^1 \in P_{FDHg}^\mu(X^o)$ . (Propriedade do descarte dos produtos)

*Demonstração:* Seja  $Y^o \in P_{FDHg}^\mu(X^o)$ , logo  $Y^s(1 - c_s S^o) \geq Y^o$  ou  $Y^s(1 + e_s I^o) \geq Y^o$  para algum  $s \in PLA$ . Se  $Y^1 \leq Y^o$  então  $Y^s(1 - c_s S^o) \geq Y^1 \geq Y^o$  ou  $Y^s(1 + e_s S^o) \geq Y^1 \geq Y^o$  e portanto  $Y^1 \in P_{FDHg}^\mu(X^o)$ . ■

Das Proposições 17 e 20 os insumos e os produtos satisfazem a propriedade do descarte forte, ou seja, qualquer incremento no consumo (mesmo que não proporcional) é viável e qualquer redução nos níveis da produção é viável.

### 3.2.5.2 Definição da Medida FDHg

Na seção anterior foi construída a tecnologia de produção e foram demonstradas as propriedades pertinentes aos conjuntos  $TP_{FDHg}^\mu$ ,  $C_{FDHg}^\mu$  e  $P_{FDHg}^\mu$ . A eficiência técnica orientação consumo do plano de produção  $(X^o, Y^o)$  em relação a esta tecnologia considerando, um grau de realismo mínimo igual a  $\mu$  é

$$\begin{aligned}
 EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = \min \quad & \theta_o^\mu \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^J x_{ji} ((\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)) \leq \theta_o^\mu x_{oi}, i \in INS \\
 & \sum_{j=1}^J y_{jk} ((\gamma_j - c_j \times S^j) + (\delta_j + e_j \times I^j)) \geq y_{ok}, k \in PRO \\
 & \sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) = 1 \\
 & 0 \leq c_j \leq \alpha_j (1 - \mu) \gamma_j, j \in PLA \\
 & 0 \leq e_j \leq \beta_j (1 - \mu) \delta_j, j \in PLA \\
 & \gamma_j, \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA
 \end{aligned} \tag{V}$$

onde:

- $\theta_o^\mu \rightarrow$  aloca  $X^o$  no conjunto isoquanta de  $C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ ;
- $\mu \rightarrow 0 \leq \mu \leq 1$  é especificado *a priori* pelo decisor e indica o grau mínimo de realismo dos plano de produção pertencentes à tecnologia de produção;

- $\alpha_j \rightarrow$  é o limite da contração do vetor consumo do  $j$ -ésimo plano de produção;
- $\beta_j \rightarrow$  é o limite da expansão do vetor consumo do  $j$ -ésimo plano de produção;
- $I^j \rightarrow$  é o limite inferior do retorno de escala do  $j$ -ésimo plano de produção;
- $S^j \rightarrow$  é o limite superior do retorno de escala do  $j$ -ésimo plano de produção;
- $c_j \rightarrow$  Se  $\gamma_s = 1$  para algum  $s \in PLA$ , então  $0 \leq c_s \leq \alpha_s (1 - \mu)$ ,  $c_j = 0 \forall j \neq s$ , e  $e_j = 0 \forall j \in PLA$ . Neste caso  $c_s$  contrai  $(X^s, Y^s)$  e o grau de otimismo em relação a implementabilidade do plano *benchmark* gerado e em relação ao índice da eficiência é  $\left(1 - \frac{c_s^*}{\alpha_s}\right)$ ;
- $e_j \rightarrow$  Se  $\delta_t = 1$  para algum  $t \in PLA$ , então  $0 \leq e_t \leq \beta_t (1 - \mu)$ ,  $e_j = 0 \forall j \neq t$ , e  $c_j = 0 \forall j \in PLA$ . Neste caso  $e_t$  expande  $(X^t, Y^t)$  e o grau de otimismo em relação a implementabilidade do plano *benchmark* gerado e ao índice da eficiência é  $\left(1 - \frac{e_t^*}{\beta_t}\right)$ ;
- $\gamma_j \rightarrow$  Se  $\gamma_s = 1$  para algum  $s \in PLA$ , então  $(X^s, Y^s)$  será contraído;
- $\delta_j \rightarrow$  Se  $\delta_t = 1$  para algum  $t \in PLA$ , então  $(X^t, Y^t)$  será expandido.

A mensuração da eficiência consiste então, na seguinte seqüência:

1. **Calcular a elasticidade do retorno de escala dos produtores.**
2. **Informar ou calcular os limites das contrações e das expansões do consumo dos produtores.**
3. **Calcular a eficiência técnica orientação consumo dos planos de produção observados utilizando o programa misto (V).**

Sejam  $J$  produtores, dos quais  $C \geq 0$  é o número de produtores são BCC-ineficientes e  $K$  conjuntos corte  $\mu$  das quantidades difusas dos insumos e dos produtos. Esta seqüência de cálculos envolve a seguinte complexidade de cálculos:

- Resolução de  $C$  programas lineares para projetar os  $C$  produtores BCC-ineficientes sobre a fronteira da tecnologia de produção  $TP_{BCC}$  através da medida não radial de BCC;
- Resolução de  $(2 \times J)$  programas lineares para calcular a elasticidade do retorno de escala dos  $J$  produtores;
- Calcular os limites inferior e superior dos conjuntos corte  $\mu$  dos  $J$  produtores através das equações em (III), resultando em  $J \times (K \times (n + m))$  procedimentos de cálculos;

- Resolução de  $(K \times J)$  problemas de programação mista.

No total devem ser resolvidos  $C + (2 \times J) + (K \times J)$  problemas de programação.

No cálculo da eficiência o decisor pode optar por vários níveis de otimismo, ou seja vários conjuntos corte  $\mu$ , por exemplo  $0, 1; 0, 2; \dots; 0, 9; 1$ . Sugerindo que quanto maior a quantidade  $\mu$ , mais realistas são os planos de produção pertencentes à tecnologia de produção e os índices da eficiência técnica calculados.

Suponhamos que no cálculo da eficiência técnica de  $(X^o, Y^o)$ , considerando um grau de realismo  $0 \leq \mu \leq 1$ , tem-se  $\gamma_l = 1$  para algum  $l \in PLA$  (então  $\gamma_j = 0, \forall j \neq l$  e  $\delta_j = 0 \forall j \in PLA$ ). O programa (V) poderá ser simplificado em

$$\begin{aligned}
 EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = & \min \theta_o^\mu \\
 \text{s.a} & \quad x_{li}(1 - c_l) \leq x_{oi}\theta_o^\mu, \quad i \in INS \\
 & \quad y_{lk}(1 - c_l \times S^l) \geq y_{ok}, \quad k \in PRO \\
 & \quad 0 \leq c_l \leq \alpha_l(1 - \mu)
 \end{aligned} \tag{VI}$$

Seja  $\theta_o^{\mu*}$  e  $c_l^*$  a solução ótima de (V). Então o plano de produção *benchmark* do  $o$ -ésimo produtor é  $(X^l \times (1 - c_l^*), Y^l \times (1 - c_l^* \times S^l))$ . Das equações em (IV) tem-se que o grau de realismo da eficiência calculada e do plano de produção *benchmark* é  $\left(1 - \frac{c_l^*}{\alpha_l}\right)$ . Suponhamos que  $l = o$ , ou seja, o  $o$ -ésimo produtor é *benchmark* dele mesmo. Neste caso a única solução ótima viável de (V) é  $c_o^* = 0$  e  $\theta_o^{\mu*} = 1$  pois se  $c_o^* \neq 0$  então  $y_{lk}(1 - c_l \times S^l)$  é estritamente menor que  $y_{ok}$ ,  $\forall k \in PRO$ , violando o segundo conjunto de restrições.

A função definida no programa (V) mede a eficiência de  $X^o$  na produção de  $Y^o$  quando a tecnologia de produção é  $TP_{FDHg}^\mu$ . Isto é feito a partir do cálculo da medida da maior contração viável de  $X^o$  em  $C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ . A medida  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o)$  é homogênea de grau 1 e seu valor é limitado por zero e pela unidade, atingindo seu limite superior se e somente se  $X^o$  pertence ao conjunto isoquanta de  $C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ . A medida é independente de unidade, isto é, trocar a unidade de medida de um insumo de ‘trabalho/horas’ pela unidade ‘trabalho/ano’ por exemplo, não afeta a medida da eficiência. Estas propriedades são provadas nas proposições 21 a 26.

Sejam  $X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ , com  $Y^o > 0$ , e  $0 \leq \mu \leq 1$  o grau de realismo mínimo dos planos de produção pertencentes à tecnologia de produção  $TP_{FDHg}$ :

**Proposição 21**  $0 < EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) \leq 1$ .

*Demonstração:*  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) > 0$ , pois  $0 \notin C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ ;  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) \leq 1$  pois  $X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$  pois a medida é um problema de minimização. ■

**Proposição 22**  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = 1 \Leftrightarrow X^o \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ . (Propriedade WI, seção 2.1)

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = 1$ , logo  $(1 \times X^o) \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ , e portanto  $X^o \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ . Se  $X^o \notin Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$  então  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) < 1$ , o que é uma contradição.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $X^o \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$  e  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = \theta_o^\mu < 1$ . Como  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o)$  é uma medida radial e os insumos satisfazem a propriedade do descarte forte, então  $\theta_o^\mu X^o \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$  e portanto  $X^o \notin Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ , o que é uma contradição. ■

**Proposição 23**  $\varphi X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o) \Rightarrow EFC_{FDHgIn}^\mu(\varphi X^o, Y^o) = \varphi^{-1} EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o)$ ,  $\forall \varphi > 0$ . (Propriedade H, seção 2.1)

*Demonstração:* Seja  $(X^o, Y^o) \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ ,  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = Min\{\theta_o^\mu : \theta_o^\mu X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)\} = \theta_o^{\mu*}$  e  $\varphi X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$ . Do programa (V) tem-se que  $\exists l \in PLA$ , tal que  $x_{li}(1 - c_l) \leq (\varphi x_{oi}) \theta_o^{\mu 1}$  ou  $x_{li}(1 + e_l) \leq (\varphi x_{oi}) \theta_o^{\mu 1}$ ,  $i \in INS$ ; fazendo  $\theta_o^{\mu 1} = \frac{\theta_o^\mu}{\varphi}$  pode-se rescrever a função objetivo e o segundo conjunto de restrições:  $Min\left(\frac{\theta_o^\mu}{\varphi}\right)$  e  $x_{li}(1 - c_l) \leq x_{oi} \theta_o^{\mu 1}$ ,  $i \in INS$ , ou seja, o cálculo da eficiência consiste em determinar  $EFC_{FDHgIn}^\mu(\varphi X^o, Y^o) = \left(\frac{1}{\varphi}\right) Min\{\theta_o^\mu : \theta_o^\mu X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)\}$ , cuja solução é  $\left(\frac{1}{\varphi}\right) \theta_o^{\mu*}$ . Portanto  $EFC_{FDHgIn}^\mu(\varphi X^o, Y^o) = \left(\frac{1}{\varphi}\right) \theta_o^{\mu*} = \left(\frac{1}{\varphi}\right) EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = \varphi^{-1} EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o)$ ,  $\forall \varphi > 0$ . ■

**Proposição 24**  $X^o \leq X^1 \Rightarrow EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) \geq EFC_{FDHgIn}^\mu(X^1, Y^o)$ . (Propriedade WM, seção 2.1)

*Demonstração:* Seja  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) = \theta_o^{\mu*}$ ,  $X^o \leq X^1$  e  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^1, Y^o) = \theta_1^{\mu*}$ . Como  $EFC_{FDHgIn}^\mu$  é uma medida radial, então  $\theta_o^{\mu*} X^o \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$  e  $\theta_1^{\mu*} X^1 \in Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ . Se  $\theta_o^{\mu*} < \theta_1^{\mu*}$ , então  $\theta_o^{\mu*} X^o < \theta_1^{\mu*} X^1$ , e como  $\theta_o^{\mu*} X^o \in C_{FDHg}^\mu(Y^o)$  então  $\theta_1^{\mu*} X^1 \notin Isoq_{C_{FDHg}^\mu(Y^o)}$ , o que é uma contradição. Portanto, se  $X^o \leq X^1$  então  $\theta_o^{\mu*} \geq \theta_1^{\mu*}$ , ou seja  $EFC_{FDHgIn}^\mu(X^o, Y^o) \geq EFC_{FDHgIn}^\mu(X^1, Y^o)$ . ■

**Proposição 25**  $EFC_{FDHgIn}^\mu$  é independente de unidade. (Propriedade U, seção 2.1)

*Demonstração:* Seja  $\sum_{j=1}^J x_{jq}[(\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)] \leq \theta_o^\mu x_{oq}$ , para algum  $q \in INS$ . Se a unidade de medida for trocada, então  $\hat{x}_{jq} = vx_{jq}$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $v > 0$ ; portanto a restrição envolvendo o  $q$ -ésimo insumo poderá ser rescrita em função da constante  $v$ , ou seja  $\sum_{j=1}^J vx_{jq}[(\gamma_j - c_j) + (\delta_j + e_j)] \leq \theta_o^\mu vx_{oq}$ , para algum  $q \in INS$ . Simplificando  $v$  em ambos os lados da desigualdade, a solução ótima da variável  $\theta_o^\mu$  não será alterada. A demonstração de que a troca da unidade de medida de algum produto não altera o índice da eficiência é semelhante. ■

**Proposição 26**  $\mu^o < \mu^1 \Rightarrow EFC_{FDHgIn}^{\mu^o}(X^o, Y^o) \leq EFC_{FDHgIn}^{\mu^1}(X^o, Y^o)$ .

*Demonstração:*  $C_{FDHg}^{\mu^o}(X^o) \subset C_{FDHg}^{\mu^1}(X^o)$  (da Proposição 18), logo  $EFC_{FDHgIn}^{\mu^o}(X^o, Y^o) \leq EFC_{FDHgIn}^{\mu^1}(X^o, Y^o)$  sempre que  $\mu^o < \mu^1$ . ■

A última proposição sugere que quanto maior o grau de realismo mínimo desejado dos planos de produção pertencentes a tecnologia de produção, maior é o índice da eficiência técnica dos planos de produção observados. A seguinte proposição mostra que se o grau de realismo dos planos que constituem a tecnologia de produção FDHg é igual a 1, então o índice da eficiência calculado pela medida FDHg coincide com o índice calculado pela medida FDH

**Proposição 27** Se  $\mu = 1$ , então  $EFC_{FDHgIn}^{\mu}(X^o, Y^o) = EFC_{FDHIn}(X^o, Y^o)$ .

*Demonstração:* Se o decisor optou por um realismo igual a 1, ou seja  $\mu = 1$ , então não permite-se a contração e a expansão de qualquer plano de produção observado, ou seja  $c_j = e_j = 0 \forall j \in PLA$ . Neste caso o programa linear (V) reduz-se a

$$EFC_{FDHgIn}^{\mu=1}(X^o, Y^o) = \min \theta_o^{\mu=1} \\ s.a \quad \sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) x_{ji} \leq x_{oi} \theta_o^{\mu=1}, \quad i \in INS \\ \sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) y_{tk} \geq y_{ok}, \quad k \in PRO \\ \sum_{j=1}^J (\gamma_j + \delta_j) = 1 \\ \gamma_j, \delta_j \in \{0, 1\}, j \in PLA$$

Fazendo  $(\gamma_j + \delta_j) = \lambda_j$ , pois somente uma das duas variáveis poderá ser não nula, então a medida FDHg orientação consumo coincide com a medida FDH orientação consumo. ■

### 3.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram desenvolvidas duas medidas para avaliar a eficiência técnica em ambiente difuso: a medida CCRg e a medida FDHg. A medida CCRg, que é uma generalização da medida de CCR, é aplicável nas situações em que as quantidades consumidas e produzidas não são conhecidas com precisão e podem ser expressos por números difusos do tipo LR. A medida é baseada na programação linear difusa de Campos e Verdegay [1989] que por sua vez é fundamentada no conceito da relação de ordem entre números difusos desenvolvida por Ramík e Římanek [1985]. A mensuração da eficiência consiste em avaliar a eficiência técnica para diferentes conjuntos corte  $\mu$  das quantidades consumidas e produzidas, como por exemplo  $\mu \in \{0;$

$0, 1; \dots; 0, 9; 1\}$ . Se  $\mu = \mu_o$ , então nos cálculos da eficiência considera-se níveis de consumo e de produção que apresentam graus de pertinência maiores que  $\mu_o$  e conseqüentemente os índices da eficiência técnica calculados apresentam possibilidade maior que  $\mu_o$  de terem ocorrido na prática. Se  $\mu = 1$  os fatores de produção utilizados nos cálculos são crisp (não difusos) e a medida CCRg é igual a medida radial de CCR.

A segunda medida sugerida é a medida FDHg, que é uma generalização da medida *free disposal hull*. A medida FDHg é aplicável nas situações em que são conhecidos os níveis atuais do consumo ( $X^o$ ), da produção ( $Y^o$ ), e a redução ( $\alpha_o$ ) e a expansão ( $\beta_o$ ) do consumo tal que com os consumos  $X_i = (1 - \alpha_o)X^o$  e  $X_s = (1 + \beta_o)X^o$  o produtor ainda gera quantidades plausíveis da produção. Para proceder a análise da eficiência o decisor deverá estimar os níveis da produção  $\forall c \in [0, \alpha_o]$  e  $\forall e \in [0, \beta_o]$ : quando o nível do consumo for  $X^{oc} = (1 - c)X^o$  e  $X^{oe} = (1 + e)X^o$  os níveis da produção são respectivamente  $Y^{oc} = (1 - c \times REsc_{(X^o, Y^o)}^+)Y^o$  e  $Y^{oe} = (1 + e \times REsc_{(X^o, Y^o)}^-)Y^o$ , onde  $REsc_{(X^o, Y^o)}^-$  é a menor taxa e  $REsc_{(X^o, Y^o)}^+$  é a maior taxa do retorno de escala numa pequena vizinhança de  $(X^o, Y^o)$ . Dependendo dos limites de contração e de expansão estipulados pelo decisor, cada plano de produção observado pode ser contraído e expandido de forma contínua sobre a superfície ou no interior da  $TP_{BCC} \subset R_+^{m+n}$ . Associando graus de realismo nulos aos planos resultantes das contrações e das expansões máximas dos planos observados, graus de realismo crescentes para menores contrações e expansões e grau de realismo máximo (igual a 1) se os planos gerados coincidem com os observados, então os planos observados podem ser vistos como sendo difusos.

A mensuração da eficiência via medida FDHg consiste então em avaliar a eficiência técnica para diferentes graus de pertiência ( $\mu$ ) dos planos pertencentes à tecnologia de produção, tal como  $\mu \in \{0; 0, 1; \dots; 0, 9; 1\}$ . Se  $\mu = 0$ , então os planos de produção pertencem à tecnologia de produção com um grau maior ou igual a 0 e o índice da eficiência técnica calculado apresenta grau de realismo maior ou igual a 0; quanto maior o valor de  $\mu$  ( $\mu \rightarrow 1$ ) maior é o grau de pertinência dos planos de produção utilizados nos cálculos e conseqüentemente mais realista é o índice da eficiência calculado. Se  $\mu = 1$ , então o grau de pertinência dos planos de produção utilizados nos cálculos é máximo e a medida FDHg coincide com a medida FDH. Assim, do mesmo modo como nas medidas de Girod [1996], tanto na medida CCRg como na medida FDHg, o decisor tem em mãos um conjunto de soluções resultante de uma série de programas lineares, sendo possível representá-las graficamente em termos dos níveis dos conjunto corte  $\mu$  especificados.

## Capítulo 4

# Aplicação das Medidas Propostas

Neste capítulo serão descritas aplicações das medidas CCRg e FDHg. O conjunto de planos de produção difusos a serem avaliados pela primeira medida foi extraído do trabalho de Ueda, Kamimura [1998, p.2,3]. A medida FDHg será aplicada na análise da eficiência técnica de dois conjuntos de planos de produção: no primeiro conjunto os planos de produção são formados por 1 insumo e 1 produto; no segundo conjunto são formados por 2 insumos e 1 produto.

### 4.1 Aplicação da Medida CCRg

Nesta seção será descrita a aplicação da medida CCRg ao conjunto de planos de produção das tabelas B.1 e B.2 do Apêndice B. Nenhum dos 11 produtores avaliados conhece precisamente as quantidades consumidas e produzidas, porém todos conhecem os intervalos que contém as possíveis quantidades, e conhecem as quantidades que ocorreram com a maior possibilidade. Por exemplo, a quantidade que o segundo produtor consumiu do insumo  $X_1$  não é conhecida com exatidão porém sabe-se que pertence ao intervalo  $[27093, 37253]$  e a quantidade que apresenta a maior possibilidade de ter sido consumida, é 33867.

O programa linear utilizado para calcular a eficiência técnica dos 11 planos de produção é



$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta_o^\mu \\
s.a \quad & (1 - \mu)\bar{y}_{ko} + \mu y_{ko} \leq \sum_{j=1}^{11} z_j [(1 - \mu)\bar{y}_{kj} + \mu y_{kj}], \quad k = 1, \dots, 2 \\
& (1 - \mu)\underline{y}_{ko} + \mu y_{ko} \leq \sum_{j=1}^{11} z_j [(1 - \mu)\underline{y}_{kj} + \mu y_{kj}], \quad k = 1, \dots, 2 \\
& \sum_{j=1}^{11} z_j [(1 - \mu)\bar{x}_{ij} + \mu x_{ij}] \leq \theta_o^\mu [(1 - \mu)\bar{x}_{io} + \mu x_{io}], \quad i = 1, \dots, 2 \\
& \sum_{j=1}^{11} z_j [(1 - \mu)\underline{x}_{ij} + \mu x_{ij}] \leq \theta_o^\mu [(1 - \mu)\underline{x}_{io} + \mu x_{io}], \quad i = 1, \dots, 2 \\
& z_j \geq 0
\end{aligned}$$

para  $\mu \in \{0; 0,2; 0,5; 0,8; 1\}$ .

Variando  $\mu$  gera-se diferentes conjuntos corte  $\mu$  das quantidades difusas dos insumos e dos produtos resultando em índices da eficiência que apresentam diferentes possibilidades de ocorrência na prática. O limite superior do conjunto corte  $\mu$  de cada produto é substituído no primeiro conjunto de restrições e o limite inferior no segundo conjunto de restrições. O limite superior do conjunto corte  $\mu$  de cada insumo é substituído no terceiro conjunto de restrições e o limite inferior no quarto conjunto. Procedendo assim, para cada  $\mu$  tem-se um programa linear, gerando 5 índices da eficiência para cada produtor.

Por exemplo, se  $\mu = 0$  então utiliza-se nos cálculos da eficiência técnica quantidades consumidas e produzidas que apresentam graus de pertinência maiores ou iguais a 0 e os índice da eficiência apresentam possibilidade maior ou igual a 0 de terem ocorrido na prática; se  $\mu = 0,5$  o índice da eficiência  $\theta_o^{\mu=0,5}$  apresenta a possibilidade maior ou igual a 0,5 de ser o verdadeiro índice da eficiência técnica do  $o$ -ésimo produtor; se  $\mu = 1$  então o otimismo em relação as quantidades consumidas e produzidas é máxima (neste caso os conjuntos corte 1 são iguais as quantidades consumidas e produzidas com maior possibilidade) e o índice da eficiência  $\theta_o^{\mu=1}$  apresenta a possibilidade igual a 1 de ter ocorrido na prática.

Na tabela 4.1, encontram-se discriminados os índices da eficiência considerando os 5 conjuntos corte  $\mu$  das quantidades difusas dos fatores de produção. As duas últimas colunas contêm, respectivamente, as eficiências calculadas pelas medidas CCR e de Ueda e Kamimura [1998].

Analisando os resultados obtidos, verifica-se que a medida de Ueda e Kamimura sugere uma redução do consumo maior ou igual aos da medida CCRg, independente do corte  $\mu$ . Verifica-se também que alguns produtores (p.ex. P<sub>4</sub>) são menos eficientes quando o  $\mu$  é maior; para outros produtores ocorre o inverso (p.ex. P<sub>8</sub>), ou seja, quanto maior é  $\mu$  maior é a eficiência; e para outro conjunto de produtores (p.ex. P<sub>10</sub>) a eficiência independe da magnitude de  $\mu$ .

	$\mu = 0$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,8$	$\mu = 1$	CCR	Ueda
Produtor 1	0,2305	0,2296	0,2283	0,2270	0,2260	0,2260	0,2150
Produtor 2	0,6367	0,6368	0,6371	0,6375	0,6377	0,6377	0,5983
Produtor 3	0,5567	0,5505	0,5459	0,5406	0,5401	0,5401	0,5400
Produtor 4	0,6056	0,5999	0,5959	0,5930	0,5930	0,5930	0,5914
Produtor 5	0,9290	0,9233	0,9187	0,9127	0,9113	0,9113	0,9011
Produtor 6	0,6786	0,6786	0,6786	0,6787	0,6787	0,6787	0,6392
Produtor 7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Produtor 8	0,7859	0,7861	0,7864	0,7869	0,7872	0,7872	0,7385
Produtor 9	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450	0,7450
Produtor 10	0,6806	0,6806	0,6806	0,6806	0,6806	0,6806	0,6806
Produtor 11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 4.1: Índices de eficiência (Aplicação da medida CCRg).

## 4.2 Aplicação da Medida FDHg

Outro modelo sugerido para mensurar a eficiência técnica em ambiente difuso foi a medida FDHg que é aplicável nas situações em que são conhecidas as quantidades consumidas ( $X^o$ ) e produzidas ( $Y^o$ ). Também devem ser conhecidas a contração limite  $\alpha_o$  e a expansão limite  $\beta_o$  do consumo tal que consumindo as quantidades  $X_i^o = (1 - \alpha_o)X^o$  e  $X_s^o = (1 + \beta_o)X^o$  o produtor ainda gera quantidades plausíveis dos produtos. Os produtores não conhecem as quantidades produzidas se o consumo pertencer aos intervalos  $(X^o(1 - \alpha_o), X^o)$  e  $(X^o, X^o(1 + \beta_o))$  mas pode-se estimar tais quantidades.

O processo de estimar o nível da produção, dada uma alteração proporcional no consumo de um plano de produção observado, envolve o cálculo do limite inferior e superior do retorno de escala próximo ao plano de produção. Banker e Thrall [1992] denominaram estes limites de “elasticidade do retorno de escala” e para determiná-la basta resolver os programas lineares

$$\begin{aligned} u^{o-*} &= \min \{u^{o-} : P^- Y^o + u^{o-} = 1; P^- M - I^- N + u^{o-} \leq 0; I^- X^o = 1; P^-, I^- \geq \varepsilon\}, \\ u^{o+*} &= \max \{u^{o+} : P^+ Y^o + u^{o+} = 1; P^+ M - I^+ N + u^{o+} \leq 0; I^+ X^o = 1; P^+, I^+ \geq \varepsilon\}, \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $M$  é a matriz das quantidades produzidas pelos produtores observados e  $N$  a matriz das quantidades consumidas. A elasticidade é dada pelas equações

$$\begin{aligned} REsc_{(X^o, Y^o)}^- &= \frac{1}{1 - u^{o-*}} \\ REsc_{(X^o, Y^o)}^+ &= \frac{1}{1 - u^{o+*}} \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $u^{o-*}$  e  $u^{o+*}$  são as soluções ótimas dos dois programas lineares.

A constante  $REsc_{(X^o, Y^o)}^-$  é o limite inferior do retorno de escala próximo ao plano de produção  $(X^o, Y^o)$  e  $REsc_{(X^o, Y^o)}^+$  é o limite superior. Segundo a metodologia desenvolvida na seção 3.2.1, se o consumo for  $X^{oc} = (1 - c)X^o$ , com  $c \in [0, \alpha_o]$ , então a produção estimada é  $Y^{oc} = (1 - c \times REsc_{(X^o, Y^o)}^+)Y^o$ ; e se o consumo for  $X^{oe} = (1 + e)X^o$ , com  $e \in [0, \beta_o]$ , então a produção estimada é  $Y^{oe} = (1 + e \times REsc_{(X^o, Y^o)}^-)Y^o$ .

Outra questão que envolve o cálculo da eficiência técnica, além de estimar novos níveis de produção, é o grau de realismo da solução e dos planos de produção pertencentes à tecnologia de produção. Se forem associados diferentes graus de realismo aos planos de produção gerados a partir das contrações e das expansões dos planos observados, então os planos de produção observados podem ser vistos como sendo difusos. Para avaliar a eficiência técnica pode-se então estipular diferentes graus de realismo dos planos que geram a tecnologia de produção  $TP_{FDHg}$  tais como 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 1 e associar aos índices da eficiência o mesmo grau de realismo usado para o cálculo desses índices.

Para aplicar a medida FDHg o decisor deverá: (i) calcular as elasticidades do retorno de escala; (ii) estipular ou calcular os limites da contração e da expansão do consumo; (iii) calcular a eficiência técnica orientação consumo para diferentes graus de realismo.

O objetivo nesta seção é descrever duas aplicações da medida FDHg. A primeira aplicação consiste em analisar a eficiência técnica de 5 planos de produção formados por 1 insumo e 1 produto. Na segunda aplicação serão 8 os produtores analisados considerando 2 insumos e 1 produto. Para ambas as aplicações os limites das contrações e das expansões obedecem os critérios seguintes:

1. O plano de produção que apresenta a menor produção não será contraído pois nenhum plano de produção resultante da contração deste será *benchmark* de outro plano observado;
2. O plano de produção que apresenta a maior produção não será expandido pois nenhum plano de produção resultante da expansão deste será *benchmark* de outro plano observado;
3. Se  $(X^o, Y^o) \notin Isoq_{TP_{FDH}}$  então  $(X^o, Y^o)$  não será contraído e nem expandido;
4. Os planos resultantes das contrações e das expansões de planos observados também pertencem a  $TP_{BCC}$ ;
5. Se  $(X^o, Y^o) \in Isoq_{TP_{BCC}}$  então os planos de produção  $((1 - \alpha_o)X^o, (1 - \alpha_o REsc^+)Y^o)$  e  $(X^o, Y^o)$  pertencem a mesma faceta de  $TP_{BCC}$ ;
6. Se  $(X^o, Y^o) \in Isoq_{TP_{BCC}}$ , então os planos de produção  $((1 + \beta_o)X^o, (1 + \beta_o REsc^-)Y^o)$  e  $(X^o, Y^o)$  pertencem a mesma faceta de  $TP_{BCC}$ ;

7. Se  $(X^o, Y^o) \notin Isoq_{TP_{BCC}}$  mas  $(X^o, Y^o) \in Isoq_{TP_{FDH}}$  então  $(X^o, Y^o)$  será contraído e expandido até ser dominado por outro plano de produção observado.

### 4.2.1 Aplicação I

Sejam os 5 produtores (Tabela B.3 do Apêndice B), ilustrados na figura 4.1 cada um transformando 1 insumo em 1 produto. As tecnologias de produção  $TP_{BCC}$  e  $TP_{FDHg}^{\mu=0}$  estão ilustradas na figura 4.2, pág. 59. A elasticidade do retorno de escala de cada plano de produção (considerando  $\varepsilon = 6,7114 \times 10^{-4}$  nos programas lineares da expressão (1)) e os limites das contrações e expansões máximas estão discriminados na tabela 4.2.

A tabela 4.3 contem os resultados da análise da eficiência considerando um realismo mínimo igual a 0,7. Por exemplo, da solução ótima

$$\theta_2^{*\mu=0,7} = 0,4828 \quad e_1^* = 0,4$$

verifica-se que o plano de produção *benchmark* de  $P_2$  foi construído a partir da expansão do consumo de  $P_1$  na proporção de 40% e da produção em  $(4 \times \frac{10}{8} \times 100) \% = 50\%$ . O realismo associado a implementabilidade do plano *benchmark* e ao índice da eficiência calculado é  $(1 + \frac{e_1^*}{\beta_1}) = (1 + \frac{0,4}{2}) = 0,8$ . A solução ótima

$$\theta_3^{*\mu=0,7} = 0,8000 \quad c_4^* = 0,2$$

sugere a construção do plano *benchmark* de  $P_3$  a partir da contração do plano de produção  $P_4$ , e o realismo da solução é  $(1 - \frac{c_4^*}{\alpha_4}) = (1 - \frac{0,2}{0,6667}) = 0,7$ .

No cálculo da eficiência técnica dos 5 produtores considerou-se os graus de realismo 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 1, obtendo-se 7 índices da eficiência técnica para cada produtor. Os índices da eficiência, mensurados pelas medidas BCC, FDHg e FDH estão discriminados na tabela 4.4 e a análise dos resultados leva às seguintes conclusões:

1. Se o realismo mínimo é nulo, então as medidas BCC e FDHg são iguais. Para que tal fato sempre ocorra, os planos de produção devem ser constituídos por 1 insumo e 1 produto, e os limites das as contrações e das expansões devem atender as condições 1 a 7 sugeridas no início da seção;
2. Quanto maior o grau de realismo, mais altos são os índices da eficiência. Isto ocorre porque as contrações e as expansões dos planos de produção observados são cada vez menores gerando conseqüentemente tecnologias de produção cada vez mais restritas;
3. Se o realismo desejado é igual a 1 então os índices da eficiência atribuídos pela medida FDHg são iguais aos atribuídos pela medida FDH;

4. Os índices da eficiência atribuídos a um plano de produção observado pela medida  $FDH_g$  crescem monotonicamente: o menor índice atribuído é igual ao índice da eficiência atribuído pela medida BCC; e o maior índice atribuído é igual ao índice da eficiência atribuído pela medida FDH.

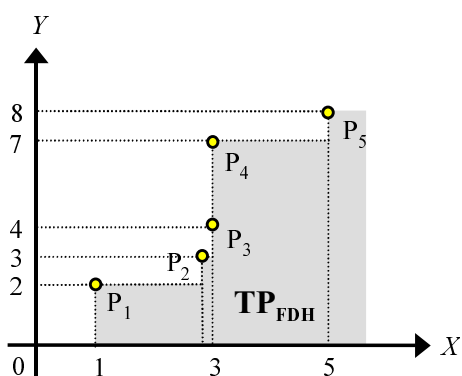


Figura 4.1: A tecnologia de produção  $TP_{FDH}$  (Aplicação I da medida  $FDH_g$ ).

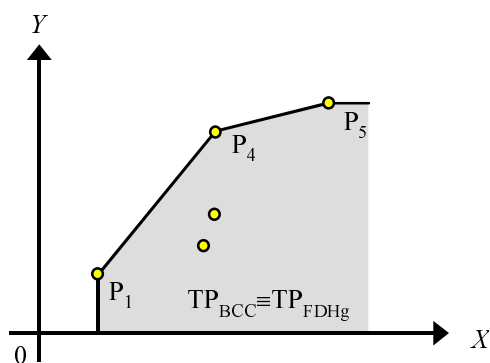


Figura 4.2: As tecnologias de produção  $TP_{BCC}$  e  $TP_{FDH_g}^{\mu=0}$  (Aplicação I da medida  $FDH_g$ ).

	Elasticidade	Limites da Contração	Limites da Expansão
Produtor 1	[1, 250; 745, 0]	–	2
Produtor 2	[1, 167; 1, 167]	0, 2857	0, 0345
Produtor 3	[1, 125; 1, 125]	0, 4444	–
Produtor 4	[0, 214; 1, 071]	0, 6667	0, 6667
Produtor 5	[0, 00; 0, 3125]	0, 4000	–

Tabela 4.2: As elasticidades do retorno de escala e os limites das contrações e expansões (Aplicação I da medida FDHg).

	Eficiência	Contração/Expansão
Produtor 1	1,0000	$c_1^* = 0, 0$
Produtor 2	0,4828	$e_1^* = 0, 4$
Produtor 3	0,8000	$c_4^* = 0, 2$
Produtor 4	1,0000	$e_4^* = 0, 0$
Produtor 5	1,0000	$c_5^* = 0, 0$

Tabela 4.3: Resultados considerando um grau de realismo igual a 0,7 (Aplicação I da medida FDHg).

	BCC	$\mu = 0$	$\mu = 0, 2$	$\mu = 0, 4$	$\mu = 0, 6$	$\mu = 0, 8$	$\mu = 1$	FDH
Produtor 1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 2	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,89	1,00	1,00
Produtor 3	0,60	0,60	0,60	0,60	0,73	0,86	1,00	1,00
Produtor 4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 4.4: Eficiências considerando diferentes graus de realismo (Aplicação I da medida FDHg).

### 4.2.2 Aplicação II

Nesta seção serão avaliados 8 planos de produção observados (Tabela B.4, Apêndice B), formados por 2 insumos e 1 produto. Os 8 planos e a tecnologia de produção  $TP_{FDH}$  encontram-se ilustrados na figura 4.3, pág. 62. Na figura 4.4 estão representados a tecnologia de produção  $TP_{BCC}$  e o plano  $\Pi(P_4)$ .

Dada uma contração do vetor consumo de  $P_4$ , um dos objetivos, é determinar o escalar que irá contrair o vetor produção de  $P_4$  tal que o plano de produção resultante pertença a interseção de  $\Pi(P_4)$  e a fronteira de  $TP_{BCC}$ . Uma indicação de qual escalar é este pode ser encontrada no conjunto  $\Gamma(P_4)$  (figura 4.5) que é a imagem da interseção de  $TP_{BCC}$  com  $\Pi(P_4)$ .

Segundo Banker e Thrall, [1992] qualquer par de escalares positivos  $(x, y)$  pertencentes a  $\Gamma(P_4)$  contrai e expande  $P_4$  e o plano resultante pertence a tecnologia de produção  $TP_{BCC}$ . Pares pertencente ao segmento de reta  $\overline{p_4^* p_2^*}$  contraem  $P_4$  e o plano resultante pertence ao segmento de reta à esquerda de  $P_4$  (contido na isoquanta de  $C_{BCC}$ ). Pares pertencentes a  $\overline{p_4^* p_5^*}$  expandem  $P_4$  e geram planos de produção contidos no segmento de reta à direita de  $P_4$  (figura 4.4). Tomando as equações paramétricas de  $\overline{p_4^* p_2^*}$  e  $\overline{p_4^* p_5^*}$ , dada uma contração do consumo na proporção  $x = (1 - c)$ ,  $0 < c < 0,5$ , o escalar que irá contrair a produção será  $y = (1 - 1,17 \times c)$ ; se ocorrer uma expansão do consumo na proporção  $x = (1 + e)$ ,  $0 < e < 2$ , então a produção será expandida pelo escalar  $y = (1 + 0,03 \times e)$ . As constantes 1,17 e 0,03, que são os coeficientes de inclinação das retas  $\overrightarrow{p_4^* p_2^*}$  e  $\overrightarrow{p_4^* p_5^*}$ , são respectivamente a maior e a menor taxa do retorno de escala numa vizinhança de  $P_4$  que definem a elasticidade do retorno de escala próximo a  $P_4$ .

A elasticidade do retorno de escala também pode ser calculada através dos programas lineares definidos em (1) e das equações em (2), e portanto a elasticidade é  $[\frac{1}{34}, \frac{20}{17}]$ . Com auxílio destes limites, podem então ser estimados os níveis da produção de  $P_4 = (X^4, Y^4)$  quando ocorrer uma alteração proporcional no consumo.

1. Se o consumo for contraído de  $X^4 = (4, 4; 2)$  para  $(1 - \alpha)(4, 4; 2)$ , ou seja, o consumo será reduzido em  $(\alpha \times 100)\%$ , então a produção também decrescerá e será no máximo  $Y = 7(1 - \frac{20}{17}\alpha)$ .
2. Se o consumo de  $X^4$  for acrescido em  $(\beta \times 100)\%$ , então o nível da produção de  $Y^4$  será acrescido no máximo em  $(\frac{1}{34}\beta \times 100)\%$ .

As elasticidades do retorno de escala e os limites das contrações e das expansões dos 8 produtores encontram-se discriminados na tabela 4.5, pág. 63 (considerando  $\varepsilon = 0,0009009$  nos programas lineares em (1)). A tecnologia de produção  $TP_{FDHg}^{\mu}$ , considerando o grau mínimo de realismo igual a 0, encontra-se ilustrada na figura 4.6, pág. 65.

A tabela 4.6 contém na coluna 2 os índices da eficiência técnica, e na coluna 3 as contrações e as expansões necessárias para gerar os planos de produção *benchmarks*. Por exemplo, a solução ótima para o sétimo produtor é

$$\theta_7^{*\mu=0,7} = 0,852 \quad c_3^* = 0,15.$$

Desta solução constata-se a construção do *benchmark* de  $P_7$  da contração de  $P_3$ . Neste caso o consumo foi reduzido em  $(0,15 \times 100)\%$ , e o realismo do plano *benchmark* e o índice da eficiência é  $\left(1 - \frac{c_3^*}{\alpha_3}\right) = \left(1 - \frac{0,15}{0,5}\right) = 0,7$ . Já a solução ótima

$$\theta_8^{*\mu=0,7} = 0,483 \quad e_2^* = 0,14$$

sugere a construção do plano de produção *benchmark* de  $P_8$  a partir da expansão do consumo de  $P_2$  em 14% e da produção em  $(0,14 \times 1,047 \times 100)\%$ , e o realismo associado a solução é  $\left(1 - \frac{e_2^*}{\beta_2}\right) = \left(1 - \frac{0,14}{1,134}\right) = 0,9$ .

Os índices da eficiência mensurados pelas medidas BCC, FDHg e FDH estão discriminados na tabela 4.7. Analisando os resultados verifica-se que para  $\mu = 0$  as eficiências atribuídas pela medida FDHg não são iguais as da medida BCC, tal como na aplicação anterior, porém são fortemente correlacionadas ( $r^2 = 0,97$ ). Alguns índices da eficiência não são iguais porque na medida BCC são permitidas combinações lineares entre planos de produção, e na medida FDHg somente são permitidas contrações e expansões.

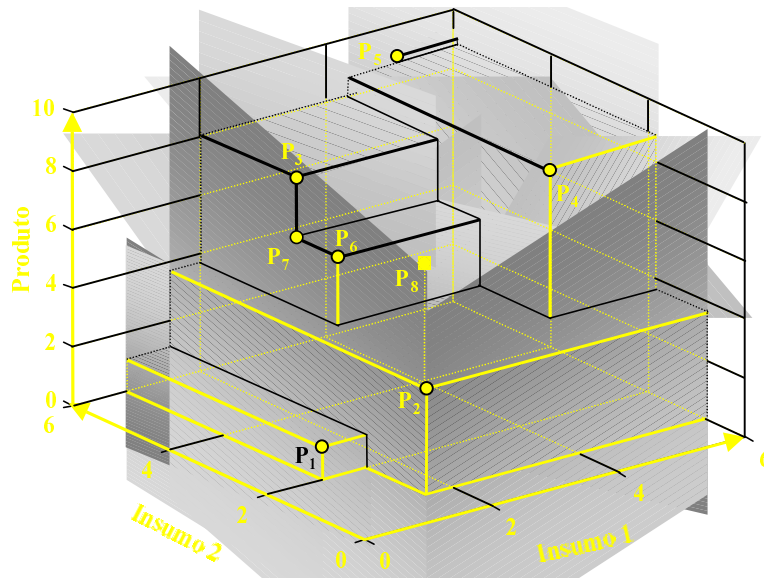


Figura 4.3: Representação gráfica de  $TP_{FDH}$  (Aplicação II da medida FDHg).



	Elasticidade	Limites da Contração	Limites da Expansão
Produtor 1	[7, 100; 1110]	0,0000	1,0000
Produtor 2	[1, 048; 317, 1]	0,0000	1,1344
Produtor 3	[0, 072; 1, 753]	0,5000	0,5000
Produtor 4	[0, 029; 1, 175]	0,5000	0,1591
Produtor 5	[0, 00; 0, 1897]	0,4471	0,0000
Produtor 6	[2, 016; 2, 016]	–	–
Produtor 7	[2, 016; 2, 016]	0,4132	–
Produtor 8	–	–	–

Tabela 4.5: As elasticidades do retorno de escala e os limites das contrações e expansões (Aplicação II da medida FDHg).

	Eficiência	Contração/Expansão
Produtor 1	$\theta_1^* = 1,000$	$c_1^* = 0,00$
Produtor 2	$\theta_2^* = 1,000$	$c_2^* = 0,00$
Produtor 3	$\theta_3^* = 1,000$	$c_3^* = 0,00$
Produtor 4	$\theta_4^* = 1,000$	$c_4^* = 0,00$
Produtor 5	$\theta_5^* = 1,000$	$e_5^* = 0,00$
Produtor 6	$\theta_6^* = 1,000$	$c_6^* = 0,00$
Produtor 7	$\theta_7^* = 0,852$	$c_3^* = 0,15$
Produtor 8	$\theta_8^* = 0,483$	$e_2^* = 0,14$

Tabela 4.6: Resultados considerando um grau de realismo igual a 0,7 (Aplicação II da medida FDHg).

	BCC	$\mu = 0$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,8$	$\mu = 1$	FDH
Produtor 1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 6	0,91	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Produtor 7	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,90	1,00	1,00
Produtor 8	0,41	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,75	0,75

Tabela 4.7: Eficiências considerando diferentes graus de realismo (Aplicação II da medida FDHg).

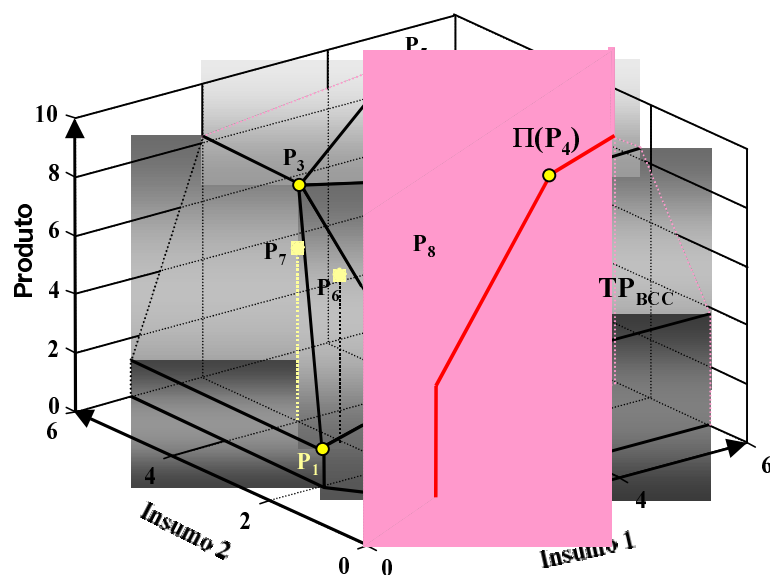


Figura 4.4: Representação gráfica de  $TP_{BCC}$  e de  $\Pi(P_4)$  (Aplicação II da medida FDHg).

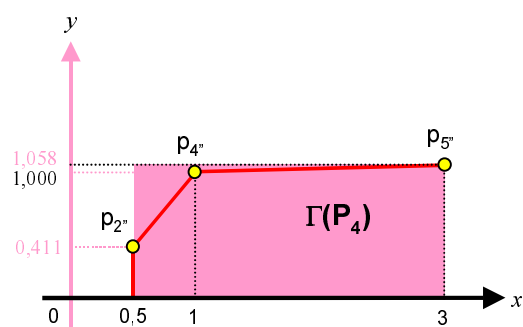


Figura 4.5: Imagem de  $TP_{BCC} \cap \Gamma(P_4)$  (Aplicação II da medida FDHg).

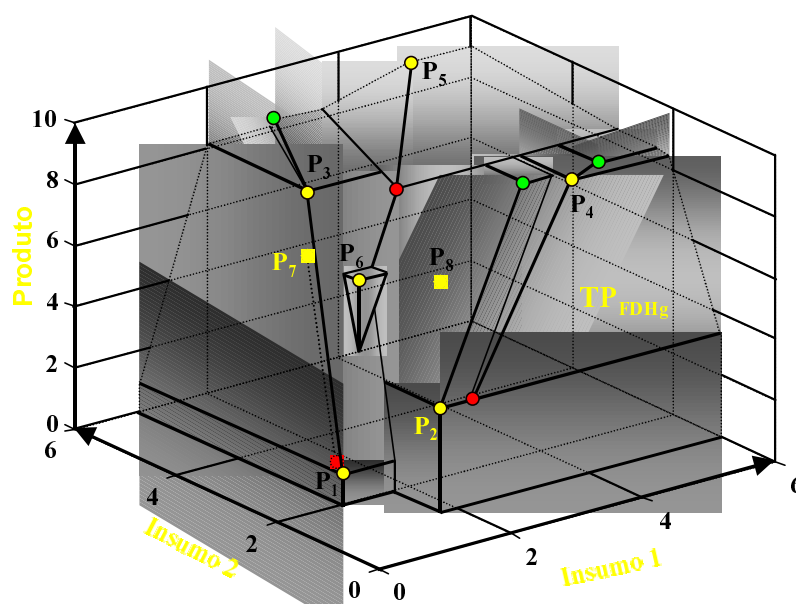


Figura 4.6: Tecnologia de produção  $TP_{FDHg}^{\mu=0}$  (Aplicação II da medida FDHg).

## Capítulo 5

# Conclusões e Recomendações

O objetivo deste trabalho foi de propor duas medidas com a finalidade de mensurar índices da eficiência técnica em ambiente difuso: as medidas CCRg e FDHg. A medida CCRg, que é uma generalização da medida de CCR, é aplicável quando as quantidades consumidas e produzidas não são conhecidas com precisão e podem ser expressas através de números difusos do tipo  $LR$ . O modelo de programação linear difusa que calcula os índices da eficiência técnica neste cenário incorpora o conceito de relações de ordem entre quantidades difusas desenvolvido por Ramík e Římánek [1985]. O cálculo dos índices da eficiência consiste então em comparar as quantidades difusas do consumo e da produção para diferentes conjuntos corte  $\mu$ , tal como  $0$ ;  $0, 1$ ; ...;  $1$ .

A segunda medida proposta é uma generalização da medida *Free Disposal Hull*. É pressuposto, para a aplicação da medida FDHg, que além das quantidades consumidas e produzidas, são conhecidos os consumos limites (inferior e superior resultantes da contração e da expansão do vetor consumo observado) de cada produtor, com os quais ainda produzem quantidades plausíveis da produção. A produção estimada, para qualquer nível de consumo compreendido entre os níveis observados e os limites, é resultante da contração ou da expansão do vetor produção observado, de modo que a contração do plano observado ocorra na direção da maior taxa do retorno de escala e a expansão ocorra na direção da menor taxa do retorno de escala.

Na medida FDHg os planos de produção observados podem ser vistos como sendo difusos se forem associados: a) graus de realismo igual a zero aos planos de produção construídos a partir das contrações e das expansões limites; b) graus de realismo pertencentes a  $(0, 1)$  quando as contrações e as expansões são menores que as contrações/expansões limites; c) graus de realismo igual a 1 se os planos construídos coincidirem com os observados (isto é, para contrações e expansões nulas). Para calcular a eficiência técnica dos planos observados pode-se então estipular graus mínimos de realismo do conjunto dos planos e produção que constitui a tecnologia

de produção a partir de conjuntos corte  $\mu^1$  das quantidades difusas dos planos de produção, sugerindo que quanto maior o realismo, mais próximo da realidade está o índice da eficiência técnica calculado.

A seguir serão delineadas algumas conclusões observadas da aplicação das duas medidas e também serão sugeridas algumas recomendações pertinentes ao trabalho.

## 5.1 Conclusões

Do desenvolvimento das medidas no capítulo 3 e da análise dos resultados apresentados no capítulo 4 seguem as seguintes conclusões.

### 5.1.1 Conclusões da Aplicação da Medida CCRg

- Considerando  $n$  conjuntos corte  $\mu$  das quantidades difusas dos fatores de produção, a aplicação da medida CCRg resulta em  $n$  índices da eficiência técnica para cada produtor que apresentam diferentes possibilidades de terem ocorrido na prática. Por exemplo, se  $\mu = 0,4$ , então as quantidades de consumo e de produção utilizadas nos cálculos apresentam grau de pertinência maior ou igual a 0,4, e conseqüentemente os índices da eficiência técnica calculados apresentam grau maior ou igual a 0,4 de terem ocorrido na prática
- Seja  $\mu \in [0, 1]$  o nível dos conjuntos corte  $\mu$  dos fatores de produção. Se  $\mu = 1$ , então os graus de eficiência calculados pela medida CCRg são iguais aos calculados pela medida CCR.
- O decisor pode analisar e plotar os índices da eficiência técnica *versus* os diferentes cortes nível  $\mu$ .
- A medida sugerida atende as propriedades WI, H, WM e U (definidas na seção 2.1).
- A tecnologia de produção gerada satisfaz as propriedades T1-T6 (definidas na seção 2.1).

### 5.1.2 Conclusões da Aplicação da Medida FDHg

- Considerando  $m$  diferentes graus de pertinência dos planos de produção que constituem a tecnologia de produção, a aplicação da medida FDHg resulta em  $m$  índices de eficiência para cada produtor. Aos índices da eficiência calculados com um determinado grau de pertinência pertencente a  $[0, 1]$  é associado igual grau de realismo. Por exemplo, se o grau de pertinência é maior ou igual a 0,6 então a tecnologia de produção é constituída por

---

<sup>1</sup>Tais como 0; 0, 1; 0, 2; ..., 0, 9; 1.

planos que têm um grau 0,6 de serem implementados na prática e conseqüentemente os índices da eficiência são 0,6 realistas.

- Quanto maior o grau de realismo desejado, maiores são os índices da eficiência técnica atribuídos pela medida FDHg aos produtores. Isto ocorre porque a tecnologia de produção é mais restrita com o aumento do realismo.
- Se o grau de realismo for igual a 1, então os graus de eficiência calculados pela medida FDHg são iguais aos calculados pela medida FDH.
- O decisor pode analisar e plotar os índices da eficiência técnica *versus* os graus de realismo especificados;
- A medida sugerida atende as propriedades WI, H, WM e U (definidas na seção 2.1).
- A tecnologia de produção gerada satisfaz as propriedades T1-T6 (definidas na seção 2.1).

## 5.2 Recomendações

Alguns passos podem ser dados no sentido de aprimorar e ampliar o leque de aplicação das duas medidas propostas. Algumas sugestões neste sentido são enumeradas a seguir.

1. Desenvolver medidas aplicáveis às situações em que as quantidades consumidas e produzidas são números difusos do tipo *LR* considerando diferentes economias de escala e diferentes descartes dos insumos e dos produtos. (A medida CCRg é aplicável se e somente se a tecnologia de produção satisfaz retornos constantes de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos.)
2. Utilizar distribuições de possibilidade não lineares na definição das quantidades dos fatores de produção difusos e outros operadores de agregação (interseção) para construção de medidas semelhantes a medida CCRg (veja Zimmermann, [1991, p.40]). (Na definição do programa linear que mede o índice da eficiência CCRg foi empregado o “operador min” definido na Seção A.1.2 do Apêndice A.)
3. Modelar medidas semelhantes a FDHg para analisar a eficiência técnica quando os fatores de produção são quantidades categóricas e/ou inteiras.
4. Incluir na medida FDHg a possibilidade de ocorrerem alterações “não proporcionais” nas quantidades consumidas e produzidas. (A medida FDHg é aplicável se e somente se ocorrerem variações “proporcionais” nas quantidades consumidas e produzidas.)

5. Adaptar a medida FDH<sub>g</sub> para a situação em que a tecnologia de produção satisfaz diferentes economias de escala e diferentes descartes dos insumos e dos produtos. (A medida FDH<sub>g</sub> é aplicável quando a tecnologia de produção satisfaz retornos variáveis de escala e descarte forte dos insumos e dos produtos.)
6. Desenvolver uma metodologia consistente para calcular limites apropriados às contrações e às expansões dos planos de produção observados de modo que os planos de produção resultantes das contrações e das expansões dos planos observados ainda pertençam à tecnologia de produção BCC.

# Bibliografía

- [1] Ali, A.I., Seiford, M.L. (1993): *Computacional accuracy and infinitesimals in Data Envelopment Analysis*. INFOR, vol.31, no.4, pág.290-297.
- [2] Banker, R.D. (1984): *Estimating most productive scale size using data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research, vol.17, pág.35-44
- [3] Banker, R.D., Bardhan, I., Cooper, W.W. (1996): *A note on returns to scale in DEA*. European Journal of Operational Research, vol.88, pág.583-585.
- [4] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984): *Models for the estimation of technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*. Management Science, vol.30, no.9 pág.1078-1092.
- [5] Banker, R.D., Thrall, R.M. (1992): *Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis*. European Journal of Operational Research, vol.62, pág.74-84.
- [6] Bellman, R. E., Zadeh, L. A. (1970): *Decision-Making in a fuzzy environment*. Management Science, vol.17, no.4, pág.141-164.
- [7] Campos, L., Verdegay, J.L. (1989): *Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems, vol.32, pág.1-11.
- [8] Carlsson, C., Korhonen, P. (1986): *A parametric approach to fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and Systems. vol.20, pág.17-30.
- [9] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978): *Measuring the efficiency of decision making units*. European Journal of Operations Research, vol.2, pág.429-444.
- [10] Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J. (1985): *Foundation of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Journal of Econometrics, vol.30(1/2), (October/November), pág.91-107.



- [11] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G. (1999): *IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA*. Management Science, vol.45, no.4, pág.597-607.
- [12] Davis, A.F. (1995): *A literature review: Fuzzy Mathematical Programming*. Working Paper, Department of Industrial Engineering, North Carolina State University, USA
- [13] Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M.A. (1989): *A general model for fuzzy linear programming*. Fuzzy Sets and Systems, vol.29 pág.21-29
- [14] Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H. (1984): *Measuring labor efficiency on Post Offices in the performance of public enterprises. Concepts and measurement*. Edited by Marchand, Pesiteau, and Tulkens. Amsterdam, North Holland, pág. 243-267.
- [15] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1983): *The structure of technical efficiency*. Scandinavian Journal of Economics, vol.85, no.2 pág.181-190.
- [16] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1994): *Production Frontiers*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.
- [17] Färe, R., Grosskopf, S., Russell, R.R. (1998): *Index Numbers: Essays in honour of Sten Malmquist*. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht.
- [18] Färe, R., Lovell, A.K. (1978): *Measuring the technical efficiency of production*. Journal of Economic Theory, vol.19, no.1, pág.150-162
- [19] Farrell, M.J. (1957): *The measurement of productivity efficiency*. Journal of Royal Statistical Society, Serie A, Part III, vol.120, pág.253-290.
- [20] Farrell, M.J., Fieldhouse, M. (1962): *Estimating efficient production functions under increasing returns to scale*. Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, Part 2, vol 125, pág.252-267.
- [21] Fried, H., Lovell, C.A.K., Schmidt, S.S. (1993): *The Measurement of Productive Efficiency*. Oxford University Press, New York, USA. pág.161-194.
- [22] Fullér, R., Zimmermann, H..J. (1992): *Approximate reasoning for solving fuzzy linear programming problems*. Proceedings of 2nd International Workshop on Current Issues in Fuzzy Technologies, University of Trento, Trento, May 28-30.
- [23] Girod, O.A. (1996): *Measuring technical efficiency in a fuzzy environment*. Doctoral (Ph.D.) Dissertation, Virginia Tech, Department of Industrial and Systems Engineering, Blacksburg, Virginia.

- [24] Grosskopf, S. (1986): *The role of the reference technology in measuring productive efficiency*. The Economic Journal, vol.96, (June), pág.499-513.
- [25] Grosskopf, S. (1993): *Efficiency and productivity*. In The Measurement of Productive Efficiency. edited by Harold Fried, C.A. Knox Lovell and Shelton S. Schmidt. Oxford University Press, Oxford, New York. pág. 161-194
- [26] Hu, C., Hung, T. (1996): *Literature review on fuzzy linear programming*. OR 605 Large Scale LP Project.
- [27] Koopmans, T.C., (1951): *An analysis of production as an efficient combination of activities*. In Activity Analysis of Production and Allocation, edited by T.C. Koopmans, Commission for Research in Economics, Monograph No. 13. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [28] Lovell, K.A.C. (1993): *Production frontiers and productive efficiency*. In The Measurement of Productive Efficiency, edited by Harold O. Fried, C.A. Knox Lovell, Shelton S. Schmidt, New York, Oxford University Press, pág 1-67.
- [29] Luhandjula, M.K. (1989): *Fuzzy optimization: an appraisal*. Fuzzy Sets and Systems, vol.30, pág.257-282.
- [30] Ramík, J. Římánek, J. (1985): *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization*. Fuzzy Sets and Systems, vol.16, pág.123-138.
- [31] Russell, R.R. (1985): *Measures of technical efficiency*. Journal of Economic Theory, vol. 35, pág.109-126.
- [32] Russell, R.R. (1990): *Continuity of measures of technical efficiency*. Journal of Economic Theory, vol. 51, pág.255-267.
- [33] Russell, R.R. (1998): *Distance functions in consumer and producer theory*. In: *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*, edited by Rolf Färe, Shawna Grosskopf and R. Robert Russell. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht.
- [34] Sengupta, J. K. (1992): *Measuring efficiency by a fuzzy statistical approach*. Fuzzy Sets and Systems, vol.46, pág.73-80.
- [35] Shephard, R.W. (1970): *Theory of cost production functions*. Princeton: Princeton University Press.

- [36] Steering Committee for the Review of Commonwealth/State Service Provison (1997): *Data Envelopment Analysis: A technique for measuring the efficiency of government service delivery*. AGPS, Canberra, Australia.
- [37] Tanaka, H., Ichihashi, H., Asai, K. (1984): *A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparisons of fuzzy numbers*. Control and Cybernet, vol.13, pág.185-194.
- [38] Triantis, K., Girod, O. (1998): *A Mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment*. Working Paper, to appear in Journal of Productivity Analysis in 1998.
- [39] Triantis, K., Eeckaut, P.V. (1997): *Fuzzy pair-wise dominance and implications for technical performance assessment*. Center of Operations Research & Econometrics, Université Catholique de Louvain, Belgium. Paper under revision of Journal of Productivity Analysis.
- [40] Tulkens, H. (1993): *Efficiency dominance analysis: a frontier free efficiency evaluation method*. Paper presented at the Third European Workshop on Efficiency and Productivity Measurement held at the Center for Operations Research and Econometrics (CORE),Univesité Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, October 21-23, 1993.
- [41] Tulkens, H., Eeckaut P. V. (1995): *Non-parametric efficiency, progress and regress measures for panel data: methodological aspects*. European Journal of Operational Research, vol.80, pág.474-499.
- [42] Ueda, T., Kamimura, T. (1998): *Data Envelopment Analysis based on triangular fuzzy numbers*. The Fourth Conference of the Association of Asian-Pacific Operational Research Society within IFORS, Melbourne, Austrália, 1998.
- [43] Zieschang, K.D. (1983): *A note on the decomposition of cost efficiency into technical and allocative components*. Journal of Econometrics, vol.23, no.3, (December) pág.401-405.
- [44] Zieschang, K.D. (1984): *An extended Farrell technical efficiency measure*. Journal of Economic Theory, vol.33, pág.387-396.
- [45] Zimmermann, H.J. (1991) *Fuzzy sets theory and its applications*. 2nd Edition, Kluwer, Academic Press, Boston.

## Apêndice A

# Programação Linear Difusa

As medidas difusas da eficiência técnica definidas no capítulo 2, bem como as propostas no capítulo 3, envolvem conceitos de conjuntos difusos. Neste apêndice, inicialmente será dada uma breve noção sobre conjuntos difusos e sobre os números difusos do tipo  $L$ ,  $R$  e  $LR$ . Girod [1996] emprega quantidades difusas do tipo  $L$  e  $R$  (figuras A.1 e A.2). À situação em que os insumos e os produtos forem expressados por números difusos do tipo  $LR$  (figura A.3) pode-se empregar a medida CCRd e a medida de Ueda e Kamimura [1998].

Neste apêndice serão abordados tópicos envolvendo programação linear difusa. O primeiro tópico está relacionado com a tomada de decisão em ambiente difuso, pois determinar a solução de um programa linear difuso é tomar uma decisão em ambiente difuso. Serão apresentados os modelos de programação linear difusa de Zimmermann [1991, p.250] e de Carlsson e Korhonen [1986]. O primeiro modelo foi empregado por Sengupta [1992] e o modelo de Carlsson e Korhonen foi utilizado por Girod [1996].

### A.1 Conjuntos Difusos

No cotidiano as quantidades geralmente não são exatas, ou seja, em várias situações lidamos com quantidades aproximadas. Por exemplo, ao se comprar alimentos embalados, o peso que consta nas embalagens geralmente não é o peso real, porque existe uma pequena variação devido a vários fatores. O peso especificado na embalagem é na verdade o peso médio, podendo ocorrer oscilações tanto para mais quanto para menos. Outro exemplo é o caso de uma nectarina que é resultado do cruzamento genético do pêssigo e da ameixa. Pode-se dizer que uma nectarina é uma ameixa e um pêssigo mas não podemos classificá-la como sendo apenas ameixa ou apenas pêssigo.

Em 1965 Zadeh preocupado com as situações em que a lógica tradicional da dicotomia

(do ser ou não ser) não podia ser aplicada, desenvolveu um novo modelo de lógica denominada de lógica difusa. Utilizando esta lógica pode-se lidar matematicamente com situações como as descritas nos exemplos do parágrafo anterior. O ponto central da lógica difusa é que um determinado objeto pode pertencer simultaneamente a mais de um conjunto. A esta propriedade de pertencer a mais de um conjunto é associado um grau de pertinência através de uma distribuição de possibilidade (que é a função de pertinência).

Usando a lógica tradicional, do estar ou não estar, a pertinência de  $x$  num conjunto clássico  $A$  pode ser expressa pela função característica  $\mu_A(x) \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $x \in A$ , isto é,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Empregando a lógica tradicional, pode-se decidir apenas se  $x$  é um elemento de  $A$  ou não. A lógica difusa admite um grau de pertinência (entre zero e um) de  $x$  pertencer a  $A$ . Se  $\mu_A$  é a função de  $x$  no intervalo  $[0, 1]$ , então  $\mu_A(x) \rightarrow [0, 1]$  é chamada de função de pertinência no conjunto difuso  $A$ . Mais detalhes em Zimmermann [1991].

Um conjunto difuso pode assumir inúmeras formas. Neste capítulo serão definidos os conjuntos que expressam números difusos. Tais quantidades são utilizadas para expressar quantidades difusas do tipo “números reais próximos de 10”, “números reais consideravelmente maiores que 10”, etc.

### A.1.1 Números Difusos

Nas seguintes definições, serão definidos os números difusos do tipo  $L$ ,  $R$  e  $LR$ .

**Definição 28** *Seja  $L : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ ,  $L(0) = 1$ , uma função não crescente e não constante em  $[0, +\infty)$ . Seja  $F_L$  o conjunto de todos os números difusos  $\tilde{a}$  cuja função de pertinência apresenta a seguinte propriedade: Existem números reais  $a$  e  $\alpha > 0$  tal que*

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{a-t}{\alpha}\right) & \text{se } t \leq a \\ \varphi(t) & \text{se } t > a \end{cases}$$

onde  $\varphi : (a, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  é qualquer função. Um número  $\tilde{a} \in F_L$  é chamado de **número difuso do tipo  $L$** .

A figura A.1 ilustra o número difuso  $\tilde{a} = (\mu_{\tilde{a}}(t), \alpha, a)$  que é do tipo  $L$ , onde  $\mu_{\tilde{a}}(t)$  é a função de pertinência,  $a$  é o valor mínimo de  $t$  para o qual  $\mu_{\tilde{a}}(t) = 1$  e  $(a - \alpha)$  é o menor valor possível para  $\tilde{a}$ .

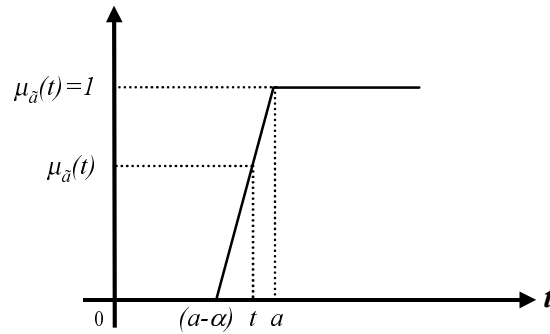


Figura A.1: Número difuso do tipo  $L$ .

A distribuição de possibilidade associada ao número difuso  $\tilde{a}$  da figura A.1 é

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < (a - \alpha) \\ \frac{t - (a - \alpha)}{\alpha} & \text{se } (a - \alpha) \leq t \leq a \\ 1 & \text{se } t > a \end{cases} .$$

Esta função indica que a possibilidade da atual quantidade de  $t$  assumir a verdadeira quantidade de  $\tilde{a}$  cresce a partir de  $t = (a - \alpha)$  pois  $\mu_{\tilde{a}}(t)$  é estritamente crescente no intervalo  $[a - \alpha, a]$ . Verifica-se também que é impossível a atribuição de quantidades menores que  $(a - \alpha)$  para  $\tilde{a}$  pois para  $t \leq (a - \alpha)$  tem-se  $\mu_{\tilde{a}}(t) = 0$ , enquanto que a possibilidade de assumir valores maiores ou iguais a  $a$  é máxima.

**Definição 29** *Seja  $R : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ ,  $R(0) = 1$ , uma função não crescente e não constante em  $[0, +\infty)$ . Seja  $F_R$  o conjunto de todos os números difusos  $\tilde{b}$  cuja função de pertinência apresenta a seguinte propriedade: Existem números reais  $b$  e  $\beta > 0$  tal que*

$$\mu_{\tilde{b}}(t) = \begin{cases} R\left(\frac{t - b}{\beta}\right) & \text{se } t \geq b \\ \psi(t) & \text{se } t < b \end{cases}$$

onde  $\psi : (-\infty, b) \rightarrow [0, 1]$  é qualquer função. Um número  $\tilde{b} \in F_R$  é chamado de **número difuso do tipo  $R$** .

Na figura A.2 tem-se a representação do exemplo de número difuso  $\tilde{b} = (\mu_{\tilde{b}}(t), \beta, b)$  que é do tipo  $R$ . A distribuição de possibilidade associada a este número é

$$\mu_{\tilde{b}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < b \\ \frac{(b + \beta) - t}{\beta} & \text{se } b \leq t \leq (b + \beta) \\ 0 & \text{se } t < 0 \text{ e } t > (b + \beta) \end{cases} .$$

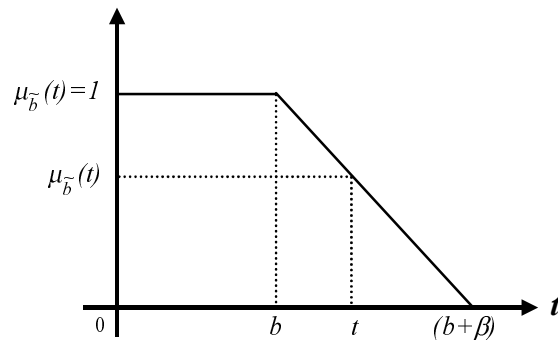


Figura A.2: Número difuso do tipo  $R$ .

**Definição 30** Seja  $L, R : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ ,  $L(0) = R(0) = 1$ , funções não crescentes e não constantes em  $(0, +\infty)$ . Seja  $F_{LR}$  o conjunto

$$F_{LR} = F_L \cap F_R$$

Um número  $\tilde{c} \in F_{LR}$  é chamado de **número difuso do tipo LR**. Neste caso a função pertinência será dada por

$$\mu_{\tilde{c}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{c-t}{\alpha}\right) & \text{se } t \leq c \\ R\left(\frac{t-c}{\beta}\right) & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

A figura A.3 ilustra o número difuso  $\tilde{c} = (\mu_{\tilde{c}}(t), \alpha, c, \beta)$  que é do tipo  $LR$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  indicam o quanto  $t$  pode se afastar à esquerda e à direita respectivamente de  $c$ . A amplitude (que é a extensão) do número difuso  $\tilde{c}$  é definida por  $\alpha$  e  $\beta$ .

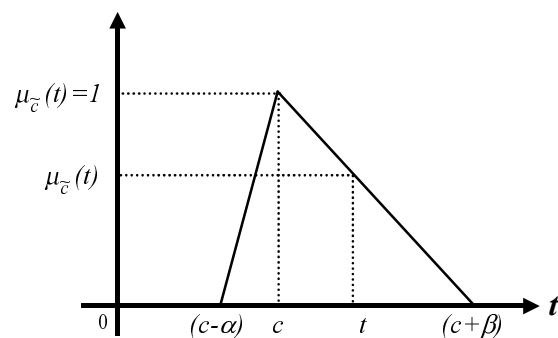


Figura A.3: Número difuso do tipo  $LR$ .

O número difuso  $\tilde{c}$  geralmente é denotado por  $\tilde{c} = (c, c, \bar{c})$ , onde  $\underline{c} = c - \alpha$  e  $\bar{c} = c + \beta$ , e a distribuição de possibilidade associado a ele é

$$\mu_{\tilde{c}}(t) = \begin{cases} \frac{t - (c - \alpha)}{\alpha} & \text{se } (c - \alpha) \leq t \leq c \\ \frac{(c + \beta) - t}{\beta} & \text{se } c \leq t \leq (c + \beta) \\ 0 & \text{se } t < (c - \alpha) \text{ e } t > (c + \beta) \end{cases}$$

Nas próximas seções serão definidos conceitos relacionados a tomada de decisão em ambiente difuso e em relação a programação linear difusa.

### A.1.2 Tomada de Decisão em Ambiente Difuso

Na teoria da decisão clássica os problemas inerentes à tomada de decisão apresentam três componentes: alternativas, restrições e objetivos. As alternativas definem o espaço de decisão (espaço alternativo) onde o decisor escolhe uma solução para o problema; as restrições, como o nome sugere, limitam as escolhas entre as alternativas; objetivos ou metas representam valores ou utilidades das alternativas existentes. Uma decisão, sob condições de certeza, é feita quando o resultado para cada ação pode ser determinado e ordenado precisamente. Uma alternativa escolhida deve levar à maior utilidade, isto é, o problema de tomada de decisão torna-se um problema de otimização.

Muitas das tomadas de decisão do mundo real envolvem ambiente em que os objetivos, as restrições e as possíveis ações não são conhecidas precisamente. Em 1970 Bellman e Zadeh sugeriram um modelo para tomada de decisão num ambiente difuso no qual assumiram que os objetivos e as restrições podem ser modelados como conjuntos difusos no espaço de decisão e a decisão difusa correspondente é a interseção desses conjuntos. De uma maneira simples e sucinta definiram decisão difusa como a confluência de objetivos e restrições [Bellman, Zadeh, 1970, p.B-149]. Essa idéia é formalizada com a seguinte definição.

**Definição 31** *Seja um objetivo difuso<sup>1</sup>  $\tilde{G}$  e uma restrição difusa  $\tilde{C}$  num espaço de alternativas  $X$ . Então  $\tilde{G}$  e  $\tilde{C}$  combinadas formam uma decisão  $\tilde{D}$ , que é um conjunto difuso resultante da intersecção de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{C}$ , ou seja,  $\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$  e correspondentemente  $\mu_{\tilde{D}} = \min \{ \mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}} \}$  [Bellman, Zadeh, 1970, p.B-148].*

Com  $n$  objetivos  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_n$  e  $m$  restrições  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_m$ , a decisão resultante é a intersecção dos objetivos e das restrições [Bellman, Zadeh, 1970, p.B-149], ou seja,

---

<sup>1</sup>Um objetivo difuso  $\tilde{G}$  pode ser uma função do tipo  $\tilde{G} = f(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$  cuja função de pertinência é  $\mu_{\tilde{G}} = \max_{y=f(x)} [\min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n))]$ , onde  $\mu_i$  é a função de pertinência de  $X_i$ .



$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \dots \cap \tilde{C}_m$$

e portanto,

$$\mu_{\tilde{D}} = \min \left\{ \mu_{\tilde{G}_1}, \mu_{\tilde{G}_2}, \dots, \mu_{\tilde{G}_n}, \mu_{\tilde{C}_1}, \mu_{\tilde{C}_2}, \dots, \mu_{\tilde{C}_m} \right\}.$$

## A.2 Programação Linear Difusa

A programação linear, concebida por Dantzig na década de 40, consiste na maximização ou na minimização de uma função objetivo linear restrita a um conjunto de equações e inequações lineares. Assume-se que a linearidade diz respeito às variáveis e aos parâmetros e que esses são totalmente conhecidos. Seja o problema de programação linear (*ppl*)

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

onde  $z = c^T x$  define a função objetivo,  $Ax \leq b$  são as restrições,  $x \geq 0$  é o espaço de alternativas,  $A$  é uma matriz de  $m$  linhas e  $n$  colunas,  $c$  e  $x$  são vetores  $n$ -dimensionais e  $b$  é um vetor  $m$ -dimensional. O procedimento mais utilizado para a resolução de um problema de programação linear é o método simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947.

Sob hipóteses de imprecisão pode-se admitir que alguns ou todos os parâmetros do *ppl* sejam difusos e essa característica pode ser expressa de várias formas. Os elementos de  $A$ ,  $b$ , e  $c$  podem ser números difusos; as restrições podem ser consideradas conjuntos difusos; e a função objetivo pode ser representada por um conjunto difuso ou uma função difusa. Além disso a solução do problema (decisão) pode ser modelada como um conjunto difuso (uma solução “suficientemente boa”) ou um número clássico (solução ótima).

Zimmermann [1991, p.249], classificou os problemas de programação linear que apresentam parâmetros imprecisos em programa lineares difusos simétricos e não simétricos. Nos modelos simétricos a função objetivo é substituída por uma restrição difusa transformando a otimização estrita da formulação determinística em um alcance gradual de um nível de aspiração. Os modelos são ditos simétricos porque a função objetivo, transformada em restrição difusa, é incorporada ao conjunto de restrições funcionais (também difusas). A solução do problema é portanto, um conjunto difuso. Nos modelos não simétricos (também denominados de possibilísticos), a imprecisão se verifica em alguns ou todos os elementos de  $A$ ,  $b$  e  $c$ , e a decisão pode ser difusa ou clássica.

Os modelos simétricos baseiam-se diretamente na interpretação de decisão difusa de Bellman e Zadeh [1970], isto é, se forem dados uma meta difusa  $\tilde{G}$  e um conjunto difuso de

restrições  $\tilde{C}$ , então uma decisão difusa  $\tilde{D}$  resultará da conexão entre  $\tilde{G}$  e  $\tilde{C}$  ( $\tilde{G} \cap \tilde{C}$  por exemplo) e da correspondente função de pertinência da decisão  $\mu_{\tilde{D}} = \min \{\mu_{\tilde{G}}, \mu_{\tilde{C}}\}$ . Os modelos não simétricos envolvem um conjunto heterogêneo de problemas que impossibilita uma formulação genérica.

A seguir, serão descritos o modelo simétrico de Zimmermann [1991] e o modelo não simétrico de Carlsson e Korhonen [1986].

### A.2.1 O Modelo Simétrico de Zimmermann

Segundo Zimmermann o programa linear (1) tem a seguinte formulação [Zimmermann, 1991, p.250]:

$$\begin{array}{ll} \text{Determinar} & x \\ \text{s.a} & c^T x \gtrsim z_0 \\ & Ax \lesssim b_0 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2)$$

onde:  $\lesssim$  denota a versão fuzificada de  $\leq$  e possui a interpretação de “essencialmente menor ou igual”;  $\gtrsim$  denota a versão fuzificada de  $\geq$  e tem a interpretação de “essencialmente maior ou igual” [Zimmermann, 1991, p.250];  $z_0$  e  $b_0$  são definidos *a priori* pelo usuário e representam respectivamente níveis de aspiração de satisfação da função objetivo e das restrições;  $x$ ,  $c^T$ ,  $A$ ,  $z_0$ ,  $b_0$  são quantidades determinísticas (não difusas).

Ao substituir a otimização clássica e as restrições por níveis de aspiração, constituindo um único conjunto de restrições (difusas), a função objetivo passa a ter papel idêntico às restrições, caracterizando a simetria do modelo. Não se obtém, então uma “solução ótima que satisfaz a um conjunto de restrições” mas sim “soluções de compromisso” em termos de níveis de aspirações do objetivo e das restrições.

Para caracterizar totalmente a simetria do modelo pode-se utilizar a notação  $B = (-c, A)^T$  e  $d = (-z_0, b_0)^T$  e reescrever o programa linear acima em:

$$\begin{array}{ll} \text{Determinar} & x \\ \text{s.a} & Bx \lesssim d \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (3)$$

Cada uma das  $(m + 1)$  linhas deste programa linear define um conjunto difuso, cuja função de pertinência  $\mu_i(x)$  pode ser interpretada como o grau com que  $x$  satisfaz a desigualdade difusa  $B_i x \leq d_i$ , (onde  $B_i$  é a  $i$ -ésima linha de  $B$ ). O conjunto difuso “decisão do modelo” fica caracterizado pela seguinte função de pertinência:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_i \{\mu_i(x)\} \quad (4)$$

Supondo que o decisor esteja interessado não num conjunto difuso como solução mas sim numa solução ótima determinística, deve-se determinar a “solução maximizante”, através da solução do seguinte problema (possivelmente não linear):

$$\max_{x \geq 0} \left\{ \min_i \mu_i(x) \right\} = \max_{x \geq 0} \{ \mu_{\bar{D}}(x) \} \quad (5)$$

A função de pertinência  $\mu_i(x)$  deve assumir valor zero quando a  $i$ -ésima restrição (inclusive a função objetivo) for fortemente violada (ou seja, quando a  $i$ -ésima restrição for violada além de um limite de violação definido *a priori* pelo decisor) ; valor 1 se estiver completamente satisfeita (no sentido determinístico); e crescer monotonicamente de 0 a 1 dentro de um intervalo “aceitável” de violação da restrição. Admite-se, então, que o decisor seja capaz de definir um intervalo  $[d_i, d_i + p_i]$  de violação, admissível para cada restrição (inclusive função objetivo). Zimmermann [1991, p.251] sugere a seguinte função de pertinência linear por partes

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } B_i x > d_i + p_i \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i} & \text{se } d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 1 & \text{se } B_i x \leq d_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m + 1. \quad (6)$$

A solução do programa linear difuso (3) então pode ser obtida através de um problema de programação linear clássica. Introduzindo uma variável que corresponde à equação (4) tem-se

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \lambda \\ \text{s.a} \quad & \lambda p_i + B_i x \leq d_i + p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Se  $(\lambda^*, x^*)$  é a solução ótima, então  $x^*$  é a solução maximizante de (5) do modelo linear difuso (2) assumindo as funções de pertinência definidas em (6).

Este enfoque é computacionalmente muito simples uma vez que a solução é obtida resolvendo um problema linear clássico com uma variável a mais que o problema determinístico expresso em (1). O modelo linear difuso resultante não emprega quantidades difusas e não oferece muito mais informação que uma análise de sensibilidade sobre o vetor do lado direito de (1) do modelo linear determinístico e sua maior vantagem sobre este é o fato do decisor não ser forçado a formular precisamente o seu vetor de restrições, mas somente defini-lo em termos difusos através da fixação dos níveis de violação das restrições e da função objetivo.

## A.2.2 O Modelo Não Simétrico de Carlsson e Korhonen

Seja o problema determinístico de programação linear formulado em (1) supondo que existe incerteza em relação as quantidades dos parâmetros  $A$ ,  $b$  e  $c$ . Suponhamos que o decisor seja capaz de especificar limites inferior  $(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c})$  e superior  $(\overline{A}, \overline{b}, \overline{c})$  para cada parâmetro.

Carlsson e Korhonen [1986, p.24] sugerem que os limites inferiores representem valores “livres de risco” no sentido de poderem ser implementados com certeza. Os limites superiores são valores-fronteira além dos quais não há possibilidade de implementação (“valores impossíveis”, nos termos de Carlsson e Korhonen [1986, p.24]). Esse enfoque baseia-se na hipótese de que quando  $A$ ,  $b$  e  $c$  movem-se do limite “livre de risco” para o “impossível”, a solução move-se de uma situação com alto grau de implementabilidade (segura) para uma solução com baixo grau de implementabilidade (solução otimista).

Com essa caracterização,  $A$ ,  $b$  e  $c$  são conjuntos difusos e suas distribuições de possibilidade devem assumir valor 1 nos limites inferiores (livres de risco) e 0 nos limites superiores (impossíveis), decrescendo monotonicamente de 1 a 0 quando  $A$ ,  $b$  e  $c$  movem-se do limite “livre de risco” para o “impossível”. Sejam  $\mu_{a_{ij}}$ ,  $\mu_{b_i}$  e  $\mu_{c_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$  as funções de pertinência associadas aos elementos de  $A$ ,  $b$  e  $c$ . Aplicando resultados da álgebra difusa (equação (4)) pode-se avaliar a precisão da solução ótima. A função de pertinência que reflete a precisão da solução ótima é

$$\mu_{\bar{D}} = \min_i \left\{ \mu_{a_{ij}}, \mu_{b_i}, \mu_{c_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Esse é o modelo de decisão de Bellman e Zadeh e sua interpretação é que a precisão da solução ótima é igual a precisão do parâmetro de maior “risco”. Segundo Carlsson e Korhonen [1986, p.25] o melhor valor para a função objetivo (do *ppl* (1)), para um valor fixo de  $\mu_{\bar{D}}$ , é alcançado quando

$$\mu_{\bar{D}} = \mu_{a_{ij}} = \mu_{b_i} = \mu_{c_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

pois o modelo tende a utilizar os valores de maior risco dos parâmetros. Segundo os pesquisadores, pode-se então afirmar que ‘o melhor valor da função objetivo, a um nível fixo de precisão, pode ser obtido usando-se todos os parâmetros a um mesmo nível de precisão’. Devido à existência das folgas nas restrições não ativas na solução ótima, um nível menor de precisão poderá ser utilizado em alguns componentes do vetor de restrições (o vetor  $b$ ). Esta alteração, segundo Carlsson e Korhonen [1986, p.25] não afetam a solução ótima da função objetivo.

Dado o parâmetro  $p$ , seja a distribuição de possibilidade

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & \text{se } p \geq \bar{p} \\ \frac{p - \bar{p}}{\underline{p} - \bar{p}} & \text{se } \underline{p} \leq p \leq \bar{p} \\ 1 & \text{se } p \leq \underline{p} \end{cases}, \quad (10)$$

então

$$p = \mu_p (\underline{p} - \bar{p}) + \bar{p}. \quad (11)$$

Se aos parâmetros  $A$ ,  $b$  e  $c$  são associadas distribuições de possibilidade semelhantes à expressa em (10), então o programa linear (1) poderá ser rescrito como:

$$\begin{array}{ll} \max & z = [\bar{c} + \mu(\underline{c} - \bar{c})]^T x \\ \text{s.a} & [\bar{a} + \mu(\underline{a} - \bar{a})] x \leq \bar{b} + \mu(\underline{b} - \bar{b}) \quad . \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (12)$$

A solução ótima do problema de programação não linear (12) é alcançada quando  $\mu = 0$ . Essa solução está associada à situação “impossível” e, isoladamente, não apresenta interesse. Esse ponto merece uma observação relativa à forma das funções de pertinência. Se todas as funções de pertinência utilizadas têm a mesma forma (mesmo que não sejam lineares), a programação linear paramétrica pode ser utilizada. Caso as funções de pertinência dos diversos parâmetros tenham formas distintas Carlsson e Korhonen [1986, p.26] sugerem a fixação de diferentes valores para  $\mu$  ( $\mu = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ , por exemplo), e deve-se resolver uma série de problemas lineares associados a estes valores. O conjunto de soluções ótimas associado a essa série de problemas poderá ser representado em função dos graus de pertinência utilizados, permitindo inclusive uma análise gráfica da evolução do valor ótimo.

## Apêndice B

### Tabelas de Dados

	Insumo $X_1$	Insumo $X_2$
Produtor 1	(13081; 16352; 17987)	(20; 26; 28)
Produtor 2	(27093; 33867; 37253)	(24; 30; 33)
Produtor 3	(22532; 28165; 30981)	(40; 51; 56)
Produtor 4	(32079; 40099; 44108)	(62; 78; 85)
Produtor 5	(29048; 36311; 39942)	(55; 69; 75)
Produtor 6	(40651; 50814; 55895)	(48; 61; 67)
Produtor 7	(51003; 56670; 68004)	(106; 118; 141)
Produtor 8	(76044; 84494; 101392)	(108; 120; 144)
Produtor 9	(48748; 54165; 64998)	(102; 114; 136)
Produtor 10	(113308; 125898; 151077)	(217; 242; 290)
Produtor 11	(103397; 114886; 137863)	(131; 202; 242)

Tabela B.1: **Insumos difusos.** (Fonte: Ueda, Kamimura, [1996, p.2])

	Produto $Y_1$	Produto $Y_2$
Produtor 1	(8425; 10532; 11585)	(4448; 5561; 6117)
Produtor 2	(25174; 31468; 34614)	(14484; 18106; 19916)
Produtor 3	(43387; 54234; 59637)	(13198; 16498; 18147)
Produtor 4	(67829; 84787; 92365)	(24648; 30810; 33891)
Produtor 5	(60696; 75870; 83457)	(45823; 57279; 63006)
Produtor 6	(67167; 83959; 92354)	(28236; 35295; 38824)
Produtor 7	(153687; 170764; 204916)	(92670; 102967; 123560)
Produtor 8	(171872; 190969; 229162)	(80460; 89401; 107281)
Produtor 9	(129486; 143874; 172648)	(59523; 66137; 79364)
Produtor 10	(274967; 305519; 366622)	(88146; 97941; 117529)
Produtor 11	(368667; 409630; 491556)	(172049; 191166; 229399)

Tabela B.2: **Produtos difusos.** (Fonte: Ueda, Kamimura, [1996, p.3])

	Insumo $X$	Produto $Y$
Produtor 1	1	2
Produtor 2	2,9	3
Produtor 3	3	4
Produtor 4	3	7
Produtor 5	5	8

Tabela B.3: Insumos e produtos (Aplicação I da medida FDHg).

	Insumo $X_1$	Insumo $X_2$	Produto $Y$
Produtor 1	1	2	1
Produtor 2	1,7	1	3,5
Produtor 3	2	4	8,1
Produtor 4	4,4	2	8,5
Produtor 5	5,1	6	9
Produtor 6	2	3	6
Produtor 7	2	4	6
Produtor 8	4	4	4

Tabela B.4: Insumos e produtos (Aplicação II da medida FDHg).

## Apêndice C

# Lista de Símbolos Mais Usados

$C(y)$	conjunto dos vetores consumo que produzem pelo menos o vetor produção $y$
$C_C(y)$	conjunto consumo supondo retornos constantes de escala
$C_N(y)$	conjunto consumo supondo retornos não crescentes de escala
$C_V(y)$	conjunto consumo supondo retornos variáveis de escala
$C_{VF}(y)$	conjunto consumo supondo retornos variáveis de escala
$P(x)$	conjunto dos vetores produção possíveis de serem gerados a partir do consumo de $x$
$P_C(x)$	conjunto produção supondo retornos constantes de escala
$P_N(x)$	conjunto produção supondo retornos não crescentes de escala
$P_V(x)$	conjunto produção supondo retornos variáveis de escala
GR	coleção de todos os vetores consumo-produção viáveis
GR <sub>C</sub>	coleção dos planos de produção viáveis supondo retornos constantes de escala
GR <sub>N</sub>	coleção dos planos de produção viáveis supondo retornos não crescentes de escala
GR <sub>V</sub>	coleção dos planos de produção viáveis supondo retornos variáveis de escala
TP <sub>BCC</sub>	coleção dos planos de produção viáveis gerados pela medida radial da eficiência técnica supondo retornos variáveis de escala (medida radial de BCC)
TP <sub>FDH</sub>	coleção dos planos de produção viáveis gerada pela medida <i>free disposal hull</i> -FDH
TP <sub>FDH</sub> <sup>μ</sup>	coleção dos planos de produção viáveis gerada pela medida <i>free disposal hull</i> difusa-FDHD com grau de realismo igual a $\mu$



$EFC_{CIn}$	eficiência técnica radial orientação consumo supondo retornos constantes de escala
$EFC_{NIn}$	efic. técnica radial orientação consumo supondo retornos não crescentes de escala
$EFC_{VIn}$	eficiência técnica radial orientação consumo supondo retornos variáveis de escala
$EFC_{COut}$	eficiência técnica radial orientação produção supondo retornos constantes de escala
$EFC_{NOut}$	efic. técnica radial orientação consumo supondo retornos não crescentes de escala
$EFC_{VOut}$	eficiência técnica radial orientação consumo supondo retornos variáveis de escala
$EFC_{CIna}$	efic. técnica não radial orientação consumo supondo retornos constantes de escala
$C_{FDHd}^{\mu}(y)$	a conjunto consumo gerado pela medida FDHd com grau de realismo igual a $\mu$
$P_{FDHd}^{\mu}(x)$	a conjunto produção gerado pela medida FDHd com grau de realismo igual a $\mu$
$\equiv$	$A \equiv B$ significa que $A$ coincide com $B$
$\subseteq$	$A \subseteq B$ significa que $A$ é um subconjunto de $B$
$\cong$	Seja $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ . $X \cong Y$ se e somente se $x_n > y_n$ ou $x_n = y_n, \forall n \in \{1, 2, \dots, n\}$
$\succcurlyeq$	$X \succcurlyeq Y$ se e somente se $X \cong Y$ e $X \neq Y$
$>$	$X > Y$ se e somente se $x_n > y_n, \forall n \in \{1, 2, \dots, n\}$
$\approx \leq$	versão fuzificada de $\leq$ e possui a interpretação de “essencialmente menor ou igual”
$\approx \geq$	versão fuzificada de $\geq$ e tem a interpretação de “essencialmente maior ou igual”
$s.a$	sujeito a
$\tilde{A}$	quantidade difusa