

Programação Linear: Solução Básica e Solução Básica Viável

Considere um pl na forma padrão: $\min\{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$. Uma solução viável é qualquer $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a matriz A $m \times n$ possui $\text{rank}(A)=m$, portanto A possui m colunas linearmente independentes. Para alguma escolha de m colunas linearmente independentes de A , chamadas colunas básicas, uma solução básica é qualquer x tal que $Ax = b$ e as variáveis não básicas $n - m$ sejam zero. As variáveis básicas assumirão valor $x_B = B^{-1}b$, onde as colunas de B são as colunas básicas de A . Se, além disso, $x \geq 0$, x é uma solução básica viável.

Exemplo

Seja o pl

$$\begin{aligned} \max Z = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sa} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

pl na forma padrão

$$\begin{aligned} \max Z = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sa} \quad & 2x_1 + 3x_2 + F_1 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + F_2 = 9 \\ & x_1 - x_2 + F_3 = 3 \\ & x_1, x_2, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Considerando a forma de escrever $\max\{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$, temos

$$c = [5 \ 3], b = [15 \ 9 \ 3]^T, x = [x_1 \ x_2 \ F_1 \ F_2 \ F_3], A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo as restrições temos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} F_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para obter uma solução básica, devermos primeiro escolher m colunas linearmente independentes. Estas colunas são denominadas de base (A_B), e as variáveis associadas a estas colunas são denominadas de variáveis básicas (designadas por x_B). As demais variáveis são as não básicas (designadas por x_N). As colunas das variáveis não básicas (A_N) não serão utilizadas na resolução do sistema e para “desativar” estas colunas (na resolução do sistema $Ax = b$) basta fazer $x_N = 0$. Portanto, ao invés de resolver o sistema $Ax = b$, que tem m linhas e n colunas, iremos resolver $A_B x_B = b$, que conta com m linhas e m variáveis.

Portanto, originalmente queremos resolver $Ax = b \Rightarrow (A_B x_B + A_N x_N) = b$. Mas como temos $x_N = 0$, então resolveremos o sistema menor $A_B x_B = b$. Basta, calcular A_B^{-1} e termos $x_B = A_B^{-1}b$.

Cálculo das 10 soluções básicas do exemplo

Como há $m = 3$ linhas e $n = 5$ variáveis (ou seja, 5 colunas), temos $C_5^3 = 10$ opções de escolher a matriz A_B (e consequentemente x_B).

A. $x_B = (x_1, x_2, F_1)$ $x_N = (F_2, F_3)$ $x = [A_B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$

B. $x_B = (x_1, x_2, F_2)$ $x_N = (F_1, F_3)$ $x = [A_B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \left[\frac{24}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 0 \quad -\frac{12}{5} \quad 0 \right]$$

C. $x_B = (x_1, x_2, F_3)$ $x_N = (F_1, F_2)$ $x = [A_B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

D. $x_B = (x_1, F_1, F_2)$ $x_N = (x_2, F_3)$ $x = [A_B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0]$$

E. $x_B = (x_1, F_1, F_3)$ $x_N = (x_2, F_2)$ $x = [A_B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \left[\frac{9}{2} \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad -\frac{3}{2} \right]$$

$$\text{F. } \mathbf{x}_B = (x_1, F_2, F_3) \quad \mathbf{x}_N = (x_2, F_1) \quad \mathbf{x} = [A_B^{-1}\mathbf{b}, 0]$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & 0 & 0 & -6 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{G. } \mathbf{x}_B = (x_2, F_1, F_2) \quad \mathbf{x}_N = (x_1, F_3) \quad \mathbf{x} = [A_B^{-1}\mathbf{b}, 0]$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 24 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{H. } \mathbf{x}_B = (x_2, F_1, F_3) \quad \mathbf{x}_N = (x_1, F_2) \quad \mathbf{x} = [A_B^{-1}\mathbf{b}, 0]$$

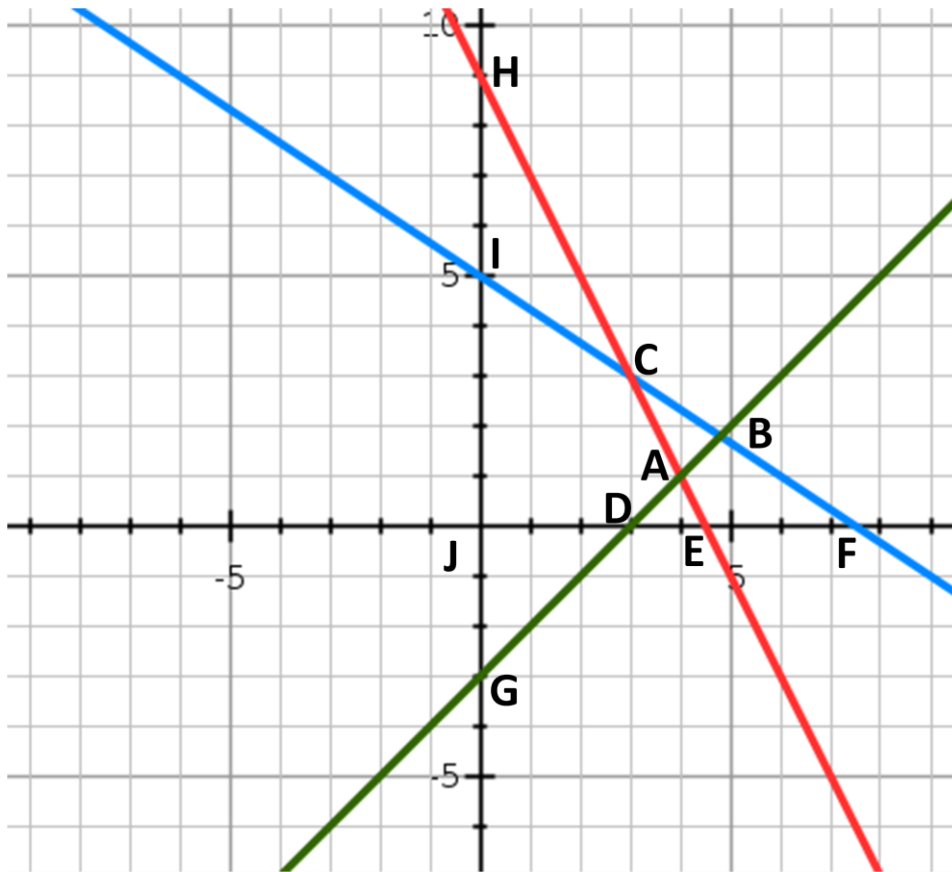
$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{I. } \mathbf{x}_B = (x_2, F_2, F_3) \quad \mathbf{x}_N = (x_1, F_1) \quad \mathbf{x} = [A_B^{-1}\mathbf{b}, 0]$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{J. } \mathbf{x}_B = (F_1, F_2, F_3) \quad \mathbf{x}_N = (x_1, x_2) \quad \mathbf{x} = [A_B^{-1}\mathbf{b}, 0]$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$



Soluções Básicas Viáveis do exemplo

Somente é solução básica viável se $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$.

A: $x_B = (x_1, x_2, F_1)$ $x = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$

C: $x_B = (x_1, x_2, F_3)$ $x = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$

D: $x_B = (x_1, F_1, F_2)$ $x = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0]$

I: $x_B = (x_2, F_2, F_3)$ $x = [0 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 8]$

J: $x_B = (F_1, F_2, F_3)$ $x = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3]$