# Programação Linear: Solução Básica Viável e Simplex

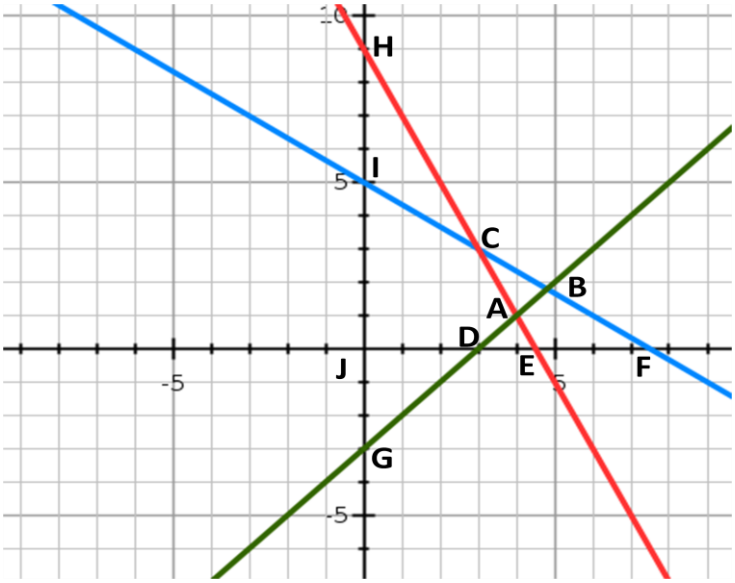
**Exemplo**

Seja o pl

$$\begin{aligned} \max Z = \quad & 5x + 3y \\ \text{sa} \quad & 2x + 3y \leq 15 \\ & 2x + y \leq 9 \\ & x - y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

pl na forma padrão

$$\begin{aligned} \max Z = \quad & 5x + 3y \\ \text{sa} \quad & 2x + 3y + F_1 = 15 \\ & 2x + y + F_2 = 9 \\ & x - y + F_3 = 3 \\ & x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{aligned}$$




No gráfico, todos os pontos na região viável atendem a todas as restrições. Portanto, temos um número infinito de soluções possíveis. No entanto, nem todas são candidatas a ser solução ótima. A solução ótima deve ser um dos pontos de canto (vértices) da região viável. Estes vértices são as soluções básicas viáveis-SBV. Descartadas todas as outras infinitas possibilidades, restam 5 SBV. Quando resolvemos graficamente, encontramos o valor de Z (função objetivo) para cada um desses 5 pontos e descobrimos qual resulta no valor mais alto de Z.

**A**: $X = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0],\ Z = 23$ **C: $X = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3],\ Z = 24$**

**D**: $X = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0],\ Z = 15$ **I**: $X = [0 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 8],\ Z = 15$

**J**: $X = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3],\ Z = 0$

Isso é fácil apenas quando o número de SBV é pequeno. No **método Simplex**, alcançamos a solução ótima sem precisar valorar/calcular Z em cada SBV.

# Método Simplex

Seja um pl na forma padrão: $\min\{c^T x: Ax = b, x \geq 0\}$. Queremos um método que "transite" pelas soluções básicas viáveis-SBV de tal forma que a solução ótima do pl seja encontrada.

O **método Simplex** é um procedimento de pesquisa que "escanea" o conjunto de soluções básicas viáveis, uma de cada vez, até que a solução ótima (se existir) seja identificada.

## Método Simplex (interpretação gráfica)

Adaptado de: http://explain-that.blogspot.com/2011/06/logic-of-how-simplex-method-works.html

No método simplex, começamos com uma SBV inicial. Essa solução inicial deve ser uma das SBV possíveis. Em um problema de maximização, com todas as restrições "≤", sabemos que a origem é um SBV. Essa é a razão pela qual sempre começamos com "x=y=0" ao resolver o Simplex. Também poderíamos começar com (4,1), se quiséssemos, mas, para saber se (4,1) é uma SBV, talvez tenhamos que desenhar um gráfico, que será apenas uma grande perda de tempo.

Portanto, sempre começamos com a origem 0 (ponto **J**). A primeira tarefa é determinar se a SBV **J** é ótimo ou não, ou seja precisamos examinar se é melhor subir ao longo do eixo y ou mover para a esquerda ao longo do eixo x. Para isso, verificamos a taxa de aumento no lucro (função objetivo) para um aumento unitário em x e y. Aumentar y em uma unidade dá um lucro de apenas 3 $, mas aumentar x pode dar 5 $. Portanto, é obviamente melhor aumentar x.

Agora que optamos em aumentar x, a próxima pergunta é: quanto posso aumentar x? Podemos, a partir do ponto **J**, aumentar x em apenas 3 unidades, porque se aumentar para além disso, estaríamos saindo da região viável.

Então paramos no ponto **D**(3,0). Agora, novamente, olhamos para os dois lados do ponto **D** (cada SBV tem duas SBV adjacentes - no caso de **D**, é **J** e **A**). É melhor ir em direção a **J** ou em direção a **B**? Acabamos de vir de **J**. Portanto, precisamos apenas examinar se avançarmos para **A** o valor de **Z** aumenta ou não. Aumenta sim. Então seguimos a rota e paramos em **A**. Novamente examinamos os pontos adjacentes e avançamos para **C**. Agora descobriremos que, se avançarmos para **I**, os lucros serão reduzidos. Então paramos por aí, e **C** é a solução ótima, uma vez que avançar para ambos os lados só diminuirá os lucros.

Então, basicamente, sempre começamos com a origem, examinamos os pontos adjacentes para nos mover ao longo de uma aresta que aumenta a função objetivo a uma taxa mais alta; nos movemos ao longo dessa aresta até alcançarmos uma SBV. Quando chegamos lá, repetimos o mesmo processo de examinar os pontos adjacentes e avançamos ao longo da aresta que oferece maiores benefícios. Esse processo continua até chegarmos a um ponto em que avançar mais em qualquer direção reduzirá a função objetivo e essa SBV será a melhor solução.

# Forma algébrica do Método Simplex

Seja o sistema de equações do pl. Escrevamos a equação da função objetivo da seguinte forma: $Z - 5x - 3y = 0$ e a acrescentemos ao sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}Z + \begin{pmatrix}-5\\2\\2\\1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}-3\\3\\1\\-1\end{pmatrix}y + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}F_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}F_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}F_3 = \begin{pmatrix}0\\15\\9\\3\end{pmatrix}$$

**Iteração 0**: Vamos iniciar com a solução básica viável trivial $x_B = (F_1, F_2, F_3)$, ou seja, o ponto **J**. Desta forma temos

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}Z + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}F_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}F_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}F_3 = \begin{pmatrix}0\\15\\9\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\2\\2\\1\end{pmatrix}x - \begin{pmatrix}-3\\3\\1\\-1\end{pmatrix}y$$

Ou seja

$$\begin{cases}Z = 0 + 5x + 3y\\F_1 = 15 - 2x - 3y\\F_2 = 9 - 2x - y\\F_3 = 3 - x + y\end{cases} \qquad X = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3] \text{ (vértice J) } Z = 0$$

**Iteração 1**: A SBV resultante da **Iteração 0** é o vértice **J**. Esta SBV ótima?

Podemos observar da função objetivo $Z = 0 + 5x + 3y$ que se x ou y aumentar de valor, ou seja, se x ou y passar a ser básica, Z aumenta (x e y contribuem para aumento do valor de Z pois seus coeficientes são positivos). Desta forma podemos concluir que a solução básica atual não é ótima. Vamos colocar na base a variável que mais contribui no aumento do valor de Z. A taxa de maior aumento de Z será na direção de x.

Visto que iremos colocar a variável x na base, y continuará fora da base (ou seja, $y = 0$). Como estamos otimizando, iremos atribuir o maior valor possível para x de modo que a próxima solução continue básica e viável. Vamos reescrever parte do sistema

$$\begin{cases}F_1 = 15 - 2x - 3y\\F_2 = 9 - 2x - y\\F_3 = 3 - x + y\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{com } y = 0 \quad \begin{cases}F_1 = 15 - 2x\\F_2 = 9 - 2x\\F_3 = 3 - x\end{cases}$$

Queremos que x assuma o maior valor possível tal que $x, F_1, F_2, F_3 \geq 0$. Sabemos que $y = 0$ e nós iremos escolher o valor de x (obviamente que iremos atribuir um valor não negativo para x). Assim basta impor $F_1, F_2, F_3 \geq 0$:

$$\begin{cases} F_1 = 15 - 2x \geq 0 \\ F_2 = 9 - 2x \geq 0 \\ F_3 = 3 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{15}{2} \\ x \leq \frac{9}{2} \\ x \leq 3 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$ (TESTE DO BLOQUEIO)

"Descobrimos" o maior valor de x de tal forma que $F_1, F_2, F_3 \geq 0$; Portanto, com $y = 0$ e $x = 3$, temos $x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$. Reescrevendo o **sistema original** temos

$$\begin{cases} Z = 0 + 5x + 3y \\ F_1 = 15 - 2x - 3y \\ F_2 = 9 - 2x - y \\ F_3 = 3 - x + y \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 15 + 8y - 5F_3 \\ F_1 = 9 - 5y + 2F_3 \\ F_2 = 3 - 3y + 2F_3 \\ x = 3 + y - F_3 \end{cases} \quad X = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0] \quad Z = 0$$

Como a base é composta por 3 variáveis precisaremos excluir uma. Visto que $F_3 = 0$, esta sai da base.

A solução assim obtida: i) é básica pois $y=F_3=0$; ii) é viável; iii) corresponde ao vértice **D**.

**Iteração 2**: A SBV resultante da **Iteração 1** é o vértice **D**. Esta SBV ótima?

Podemos observar, da função objetivo $Z = 15 + 8y - 5F_3$, que se y aumentar de valor, ou seja, se y passar a ser básica, Z aumenta de valor. Desta forma podemos concluir que a SBV atual não é ótima. Vamos, então, colocar na base a única variável (y) que irá contribuir no aumento do valor de Z.

Como y entra na base, $F_3$ continuará fora da base. Vamos reescrever o sistema

$$\begin{cases} F_1 = 9 - 5y + 2F_3 \\ F_2 = 3 - 3y + 2F_3 \\ x = 3 + y - F_3 \end{cases} \Rightarrow \text{com } F_3 = 0 \quad \begin{cases} F_1 = 9 - 5y \\ F_2 = 3 - 3y \\ x = 3 + y \end{cases}$$

Por estarmos num processo de otimização, vamos atribuir o maior valor possível para y de modo que a próxima solução continue básica e viável, ou seja, tal que $x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$. Vamos impor $F_1, F_2, x \geq 0$:

$$\begin{cases} F_1 = 9 - 5y \geq 0 \\ F_2 = 3 - 3y \geq 0 \\ x = 3 + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{9}{5} \\ y \leq \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1 \\ y \geq -3 \text{ (inequação sem efeito)} \end{cases}$$ (TESTE DO BLOQUEIO)

Sempre estamos interessados em calcular o maior valor possível da variável que entra na base. Observe que, neste sentido, a última inequação não limita superiormente o valor de y. Qualquer valor de $y \geq 0$ satisfaz a última inequação e portanto esta restrição é sem efeito (inócua) na definição/bloqueio do maior valor possível de y.

O maior valor de y foi calculado de forma que $F_1, F_2, x \geq 0$; portanto, com $F_3 = 0$ e $y = 1$, temos $x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$. Reescrevendo o sistema da **Iteração 1** em função da nova base:

$$\begin{cases} Z = 15 + 8y - 5F_3 \\ F_1 = 9 - 5y + 2F_3 \\ F_2 = 3 - 3y + 2F_3 \\ x = 3 + y - F_3 \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 23 - \frac{8}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3 \\ F_1 = 4 + \frac{5}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3 \\ y = 1 - \frac{1}{3}F_2 + \frac{2}{3}F_3 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{cases} \quad X = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0] \quad Z = 23$$

Como a base é composta por 3 variáveis, iremos excluir $F_2$ (pois $F_2 = 0$). A solução assim obtida: i) é básica; ii) é viável; iii) corresponde ao vértice **A**.

**Iteração 3**: A SBV resultante da **Iteração 2** é o vértice **A**. Esta SBV ótima?

Da função objetivo $Z = 23 - \frac{8}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3$ temos que se $F_3$ entrar na base, Z aumenta de valor. Desta forma podemos afirmar que a SBV atual não é ótima.

Vamos reescrever parte do sistema da iteração anterior

$$\begin{cases} F_1 = 4 + \frac{5}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3 \\ y = 1 - \frac{1}{3}F_2 + \frac{2}{3}F_3 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{com } F_2 = 0 \quad \begin{cases} F_1 = 4 - \frac{4}{3}F_3 \\ y = 1 + \frac{2}{3}F_3 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_3 \end{cases}$$

Vamos atribuir o maior valor para y tal que $x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$.

$$\begin{cases} F_1 = 4 - \frac{4}{3}F_3 \geq 0 \\ y = 1 + \frac{2}{3}F_3 \geq 0 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} F_3 \leq 3 \Rightarrow F_3 = 3 \\ F_3 \geq -\frac{3}{2} \text{ (inequação sem efeito)} \\ F_3 \leq 12 \end{cases} \quad \text{(TESTE DO BLOQUEIO)}$$

Reescrevendo o sistema do final da **Iteração 2** temos

$$\begin{cases} Z = 23 - \frac{8}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3 \\ F_1 = 4 + \frac{5}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3 \\ y = 1 - \frac{1}{3}F_2 + \frac{2}{3}F_3 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 24 - \frac{1}{4}F_1 - \frac{9}{4}F_2 \\ F_3 = 3 - \frac{3}{4}F_1 + \frac{5}{4}F_2 \\ y = 3 - \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 \\ x = 3 + \frac{1}{4}F_1 - \frac{3}{4}F_2 \end{cases} \quad X = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3] \quad Z = 24$$

Temos $x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$. A solução atual: i) é básica; ii) é viável; iii) corresponde ao vértice **A**.

**Iteração 4**: A SBV resultante da **Iteração 2** é o vértice **C**. Esta SBV ótima?

Todos os coeficientes das variáveis na função objetivo $Z = 24 - \frac{1}{4}F_1 - \frac{9}{4}F_2$ são negativos, e portanto mudar o status de qualquer variável de não básica para básica irá diminuir o valor do Z. Portanto, **a SBV atual é ótima**.

## Relação entre forma algébrica do Método Simplex e Simplex por quadros

**Iteração 0**:

$$\begin{cases} Z = 0 + 5x + 3y \\ F_1 = 15 - 2x - 3y \\ F_2 = 9 - 2x - y \\ F_3 = 3 - x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} Z - 5x - 3y = 0 \\ F_1 + 2x + 3y = 15 \\ F_2 + 2x + y = 9 \\ F_3 + x - y = 3 \end{cases}$$

| Base | x | y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -5↓ | -3 | | | | 0 |
| $F_1$ | 2 | 3 | 1 | | | 15 |
| $F_2$ | 2 | 1 | | 1 | | 9 |
| $F_3$ | 1 | -1 | | | 1 | 3→ |

$X = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3] \quad Z = 0$ (vértice **J**)

a variável x entra na base

$$\begin{cases} F_1 = 15 - 2x \geq 0 \\ F_2 = 9 - 2x \geq 0 \\ F_3 = 3 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{15}{2} \\ x \leq \frac{9}{2} \\ x \leq \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$ (TESTE DO BLOQUEIO)

**Iteração 1**:

$$\begin{cases} Z = 15 + 8y - 5F_3 \\ F_1 = 9 - 5y + 2F_3 \\ F_2 = 3 - 3y + 2F_3 \\ x = 3 + y - F_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z - 8y + 5F_3 = 15 \\ F_1 + 5y - 2F_3 = 9 \\ F_2 + 3y - 2F_3 = 3 \\ x - y + F_3 = 3 \end{cases}$$

| Base | x | y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | -8↓ | | | 5 | 15 |
| $F_1$ | | 5 | 1 | | -2 | 9 |
| $F_2$ | | 3 | | 1 | -2 | 3→ |
| x | 1 | -1 | | | 1 | 3 |

$X = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0] \quad Z = 15$ (vértice **D**)

y entra na base

$$\begin{cases} F_1 = 9 - 5y \geq 0 \\ F_2 = 3 - 3y \geq 0 \\ x = 3 + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{9}{5} \\ y \leq \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1 \\ y \geq \frac{3}{-1} \text{ (sem efeito)} \end{cases}$$ (TESTE DO BLOQUEIO)

## Iteração 2:

$$\begin{cases} Z = 23 - \frac{8}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3 \\ F_1 = 4 + \frac{5}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3 \\ y = 1 - \frac{1}{3}F_2 + \frac{2}{3}F_3 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{cases} \quad \begin{cases} Z + \frac{8}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 = 23 \\ F_1 - \frac{5}{3}F_2 + \frac{4}{3}F_3 = 4 \\ y + \frac{1}{3}F_2 - \frac{2}{3}F_3 = 1 \\ x + \frac{1}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3 = 4 \end{cases}$$

| Base | x | y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | | 8/3 | -1/3↓ | 23 |
| $F_1$ | | | 1 | -5/3 | 4/3 | 4→ |
| y | | 1 | | 1/3 | -2/3 | 1 |
| x | 1 | | | 1/3 | 1/3 | 4 |

$X = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0] \quad Z = 23$ (vértice **A**)

F3 entra na base

$$\begin{cases} F_1 = 4 - \frac{4}{3}F_3 \geq 0 \\ y = 1 + \frac{2}{3}F_3 \geq 0 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_3 \leq \frac{4}{\frac{4}{3}} \Rightarrow F_3 = 3 \\ F_3 \geq \frac{1}{-\frac{2}{3}} \text{(sem efeito)} \\ F_3 \leq \frac{4}{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{(TESTE DO BLOQUEIO)}$$

## Iteração 3:

$$\begin{cases} Z = 24 - \frac{1}{4}F_1 - \frac{9}{4}F_2 \\ F_3 = 3 - \frac{3}{4}F_1 + \frac{5}{4}F_2 \\ y = 3 - \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 \\ x = 3 + \frac{1}{4}F_1 - \frac{3}{4}F_2 \end{cases} \quad \begin{cases} Z + \frac{1}{4}F_1 + \frac{9}{4}F_2 = 24 \\ F_3 + \frac{3}{4}F_1 - \frac{5}{4}F_2 = 3 \\ y + \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 = 3 \\ x - \frac{1}{4}F_1 + \frac{3}{4}F_2 = 3 \end{cases}$$

| Base | x | y | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | 1/4 | 9/4 | | 24 |
| $F_3$ | | | 3/4 | -5/4 | 1 | 3 |
| y | | 1 | 1/2 | -1/2 | | 3 |
| x | 1 | | -1/4 | 3/4 | | 3 |

$X = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3] \quad Z = 24$ (vértice **C**)