

Quando usamos o método simplex duas fases?

- Para restrições do tipo maior ou igual, a variável de folga tem coeficiente negativo.
- Restrições de igualdade não possuem variáveis de folga.
- Se uma destas duas restrições ($\geq$, $=$) fizer parte do pl, não há solução básica viável inicial conveniente para utilizar o Simplex e, portanto, o método de duas fases é usado.

Para que possamos utilizar o método simplex, geramos, então, uma solução básica artificial através da adição de variáveis artificiais e cada uma das restrições dos tipos " $\geq$ " e " $=$ ".

Fase I

Na fase I, tentamos encontrar um solução básica viável inicial para o pl original, para isto a variável artificial deve ser "conduzida" a zero. Para fazer isso, uma função objetivo artificial (W) é criada, que é a soma de todas as variáveis artificiais. A nova função objetivo é minimizada sujeito às restrições do problema original usando o método simplex. No final da **Fase I**, surgem três casos:

- Se o valor mínimo de $W^* \neq 0$ e alguma variável artificial aparecer na base em nível positivo, o pl original não tem solução viável e o procedimento de otimização termina. **O pl é inviável.**
- Se o valor mínimo de $W^* = 0$ e nenhuma variável artificial aparecer na base, então uma solução básica viável para o pl original foi obtida. **O pl é viável**
- Se o valor mínimo de $W^* = 0$ e uma ou mais variáveis artificiais aparecerem na base em nível zero, então uma solução viável para o pl original existe e deve ser gerada. Devemos cuidar dessa variável artificial e garantir que ela nunca fique positiva durante os cálculos da **Fase II. O pl é viável**

Quando a **Fase I** resulta em ii) ou iii), seguimos para a **Fase II** para encontrar uma solução ótima para o pl original.

Fase II

A solução básica viável encontrada no final da **Fase I** agora é usada como uma solução inicial para o pl original. Significa que o quadro/tableau final encontrado na **Fase I** se torna o quadro inicial para a **Fase II** na qual a função objetivo artificial é substituída pela função objetivo original. O método simplex é então aplicado para chegar à solução ótima do pl.

EXEMPLO A

$$\begin{aligned} \min Z &= 4X_1 + 3X_2 + 9X_3 \\ \text{sa} \quad &2X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 15 \\ &1X_1 + 1X_2 + 1X_3 = 9/2 \\ &6X_1 + 1X_2 + 6X_3 \geq 12 \\ &X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro passamos o pl para a forma padrão, adicionando variáveis de excesso, de folga, e artificiais, onde necessário.

- Como a restrição 1 é do tipo ' $\leq$ ' é necessária a variável de folga F.
- Como a restrição 2 é do tipo '=' é necessária a variável de artificial A_1 .
- Como a restrição 3 é do tipo ' $\geq$ ' é necessária a variável de excesso E e a variável artificial A_2 .

$\min Z = 4 X_1 + 3 X_2 + 9 X_3$ sa $2 X_1 + 4 X_2 + 6 X_3 \leq 15$ $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 = 9/2$ $6 X_1 + 1 X_2 + 6 X_3 \geq 12$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$\max Z = -4 X_1 - 3 X_2 - 9 X_3 + 0 F + 0 E + 0 A_1 + 0 A_2$ sa $2 X_1 + 4 X_2 + 6 X_3 + 1 F = 15$ $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 A_1 = 9/2$ $6 X_1 + 1 X_2 + 6 X_3 - 1 E + 1 A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$
---	--

$\min W = 1 A_1 + 1 A_2$ sa $2 X_1 + 4 X_2 + 6 X_3 + F = 15$ $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 A_1 = 9/2$ $6 X_1 + 1 X_2 + 6 X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$	$\max -W = -1 A_1 - 1 A_2$ sa $2 X_1 + 4 X_2 + 6 X_3 + F = 15$ $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 A_1 = 9/2$ $6 X_1 + 1 X_2 + 6 X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$	$\max -W + 1 A_1 + 1 A_2 = 0$ sa $2 X_1 + 4 X_2 + 6 X_3 + F = 15$ $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 A_1 = 9/2$ $6 X_1 + 1 X_2 + 6 X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$
---	---	--

Fase I

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	$A_1 \downarrow$	$A_2 \downarrow$	b
-W						1	1	
F	2	4	6	1				15
A_1	1	1	1			1		9/2
A_2	6	1	6		-1		1	12

Base	$X_1 \downarrow$	X_2	X_3	F	E	A_1	A_2	b	
-W	-7	-2	-7	0	1			-33/2	min
F	2	4	6	1				15	15/2
A_1	1	1	1			1		9/2	9/2
A_2	6	1	6		-1		1	12	12/6 →

Base	X_1	$X_2 \downarrow$	X_3	F	E	A_1	A_2	b	
-W		-5/6	0	0	-1/6		7/6	-5/2	min
X_2		11/3	4	1	1/3		-1/3	11	3 →
A_1		5/6	0		1/6	1	-1/6	5/2	3
X_1	1	1/6	1		-1/6		1/6	2	12

Base	X_1	X_2	X_3	F	$E \downarrow$	A_1	A_2	b	
-W			10/11	5/22	-1/11		12/11	0	min
X_2		1	12/11	3/11	1/11		-1/11	3	33
A_1			-10/11	-5/22	1/11	1	-1/11	0	0 →
X_1	1		9/11	-1/22	-2/11		2/11	1	---

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	A_1	A_2	b
-W						1	1	0
X_2		1	2	1/2		-1	0	3
E			-10	-5/2	1	11	-1	0
X_1	1		-1	-1/2		2	0	3/2

Solução ótima ⇒ **Fim da Fase I.**

$W^*=A_1=A_2 = 0 \Rightarrow$ Existe solução viável, assim podemos passar para a **Fase II** para resolver o pl original.

Fase II

Base	$X_1 \downarrow$	$X_2 \downarrow$	X_3	F	E	b
-Z	4	3	9			0
X_2		1	2	1/2		3
E			-10	-5/2	1	0
X_1	1		-1	-1/2		3/2

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	b
-Z			7	1/2	0	-15
X_2		1	2	1/2		3
E			-10	-5/2	1	0
X_1	1		-1	-1/2		3/2

Solução ótima $\Rightarrow$ **Fim da Fase II**

$$X_1 = 3/2, X_2 = 3, X_3 = 0, Z = 15$$

EXEMPLO B

$\max Z = 4X_1 + 3X_2$ sa $2X_1 + 4X_2 \leq 15$ $1X_1 + 1X_2 = 10$ $X_1, X_2 \geq 0$	$\max Z = 4X_1 + 3X_2$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X_1, X_2, F, A \geq 0$	$\min W = A$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X_1, X_2, F, A \geq 0$	$\max -W + A = 0$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X_1, X_2, F, A \geq 0$
---	--	--	---

Passamos o pl para a forma padrão, adicionando variáveis de excesso, de folga, e artificiais, onde necessário:

- Como a restrição 1 é do tipo ' $\leq$ ' é necessária a variável de folga F.
- Como a restrição 3 é do tipo '=' é necessária a variável de artificial A.

Fase I

Base	X_1	X_2	F	A	b
-W				1	
F	2	4	1		15
A	1	1		1	10

Base	$X_1 \downarrow$	X_2	F	A	b
-W	-1	-1			-10
F	2	4	1		15
A	1	1		1	10

min $15/2 \rightarrow 10$

Base	X_1	X_2	F	A	b
W		1	1/2		-5/2
X_1	1	2	1/2		15/2
A		-1	-1/2	1	5/2

Solução ótima $\Rightarrow$ **Fim da Fase I.**

$W^* = -5/2 \Rightarrow$ Não existe **Fase II** (não existe solução viável para o pl original).