

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

I - Programa linear de MAXIMIZAÇÃO

a) Primal

Uma empresa fabrica quatro variantes do mesmo produto e, na parte final do processo de fabricação, há operações de montagem, polimento e empacotamento. Para cada variante, o tempo necessário para essas operações é mostrado abaixo (em minutos), assim como o lucro por unidade vendida.

	Montagem	Polimento	Empacotamento	Lucro(\$)
Variante 1	2	3	2	1,50
Variante 2	4	2	3	2,50
Variante 3	3	3	2	3,00
Variante 4	7	4	5	4,50

Dado o estado atual da força de trabalho, a empresa estima que, a cada ano, eles tenham disponível 100000 minutos de tempo de montagem, 50000 minutos de tempo de polimento e 60000 minutos de tempo de empacotamento. Quantas unidades de cada variante a empresa deve produzir por ano e qual é o lucro associado?

Formulação do PL primal

i) Variáveis

x_i é o número de unidades da variante i ($i = 1,2,3,4$) feitas por ano, $x_i \geq 0$

ii) PL primal

maximize $Z = 1,5x_1 + 2,5x_2 + 3,0x_3 + 4,5x_4$

sa $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 100000$ (montagem)

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50000$ (polimento)

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 60000$ (empacotamento)

$x_i \geq 0$ $i = 1,2,3,4$

Solução do PL PRIMAL via Simplex por quadros

Base	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	F1	F2	F3	b
Z	-3/2	-5/2	-3	-9/2				
F1	2	4	3	7	1			100000
F2	3	2	3	4		1		50000
F3	2	3	2	5			1	60000

...

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	F1	F2	F3	b
Z	3/2			1/5		4/5	3/10	58000
F1	-1			1/5	1	-1/5	-6/5	18000
x_3	1		1	2/5		3/5	-2/5	6000
x_2	0	1		7/5		-2/5	3/5	16000

b) Dual

No problema acima temos 3 matérias-primas: i) tempo disponível para montagem; ii) tempo disponível para polimento; iii) tempo disponível para empacotamento.

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

Vamos supor que existe a possibilidade de vender estas matérias-primas. Por quanto o proprietário deve vender cada uma das 3 matérias-primas? Qual o preço unitário de cada minuto disponível que compensa a venda?

Formulação do PL dual

i) Variáveis

y_j é o valor a ser pago por unidade da matéria prima j ($j = 1,2,3$), $y_j \geq 0$

ii) PL dual

minimize $D = 100000y_1 + 50000y_2 + 60000y_3$

sa $2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1,5$

$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2,5$

$3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3,0$

$7y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 4,5$

$y_j \geq 0 \quad j = 1,2,3$

Solução do PL DUAL via Simplex por quadros

FASE I

Base	y_1	y_2	y_3	E1	E2	E3	E4	A1↓	A2↓	A3↓	A4↓	b
-W								1	1	1	1	
A1	2	3	2	-1	0	0	0	1				3/2
A2	4	2	3	0	-1	0	0		1			5/2
A3	3	3	2	0	0	-1	0			1		3
A4	7	4	5	0	0	0	-1				1	9/2

Base	y_1 ↓	y_2	y_3	E1	E2	E3	E4	A1	A2	A3	A4	B
-W	-16	-12	-12	1	1	1	1					-23/2
A1	2	3	2	-1	0	0	0	1				3/2
A2	4	2	3	0	-1	0	0		1			5/2
A3	3	3	2	0	0	-1	0			1	0	3
A4	7	4	5	0	0	0	-1				1	9/2

...

Base	y_1	y_2	y_3	E1	E2	E3	E4	A1	A2	A3	A4	b
-W								1	1	1	1	0
y_2		1	-1/6		1/2	-2/3		0	-1/2	2/3	0	3/4
y_1	1		5/6		-1/2	1/3		0	1/2	-1/3	0	1/4
E4			1/6		-3/2	-1/3	1	0	3/2	1/3	-1	1/4
E1			-5/6	1	1/2	-4/3		-1	-1/2	4/3	0	5/4

Solução ótima. Fim da FASE I. Como $A_1=A_2=A_3=A_4=W=0$, então o PL dual é viável.

FASE II

Base	y_1 ↓	y_2 ↓	y_3	E1	E2	E3	E4	b
-D	10000	50000	60000					
y_2		1	-1/6		1/2	-2/3		3/4
y_1	1		5/6		-1/2	1/3		1/4
E4			1/6		-3/2	-1/3	1	1/4
E1			-5/6	1	1/2	-4/3		5/4

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

Base	y1	y2	y3↓	E1	E2	E3	E4	b
-D			-15000	0	25000			62500
X2		1	-1/6		1/2	-2/3		3/4
X1	1		5/6		-1/2	1/3		1/4
E4			1/6		-3/2	-1/3	1	1/4
E1			-5/6	1	1/2	-4/3		5/4

Base	y1	y2	y3	E1	E2	E3	E4	b
-D	18000	0	0	0	16000	6000		58000
y2	1/5	1			2/5	-3/5		4/5
y3	6/5		1		-3/5	2/5		3/10
E4	-1/5				-7/5	-2/5	1	1/5
E1	1			1	0	-1		3/2

Comparação dos quadros ótimos do PRIMAL com o do DUAL

Primal

	C _{x1}	C _{x2}	C _{x3}	C _{x4}	C _{F1}	C _{F2}	C _{F3}	
Base	↓x1	↓x2	↓x3	↓x4	↓F1	↓F2	↓F3	b
Z	3/2	0	0	1/5	0	4/5	3/10	58000
F1	-1			1/5	1	-1/5	-6/5	18000
x3	1		1	2/5		3/5	-2/5	6000
x2	0	1		7/5		-2/5	3/5	16000

Dual

	C _{y1}	C _{y2}	C _{y3}	C _{E1}	C _{E2}	C _{E3}	C _{E4}	
Base	↓y1	↓y2	↓y3	↓E1	↓E2	↓E3	↓E4	b
-D	18000	0	0	0	16000	6000	0	58000
y2	1/5	1			2/5	-3/5		4/5
y3	6/5		1		-3/5	2/5		3/10
E4	-1/5				-7/5	-2/5	1	1/5
E1	1			1	0	-1		3/2

Solução ótima					PRIMAL		DUAL	
PRIMAL (max)		DUAL (min)			Linha do Z		Linha do D	
x1	0	Y1	0		C _{x1}	3/2	C _{y1}	18000
x2	16000	Y2	4/5		C _{x2}	0	C _{y2}	0
x3	6000	Y3	3/10		C _{x3}	0	C _{y3}	0
x4	0	E1	3/2		C _{x4}	1/5	C _{E1}	0
F1	18000	E2	0		C _{F1}	0	C _{E2}	16000
F2	0	E3	0		C _{F2}	4/5	C _{E3}	6000
F3	0	E4	1/5		C _{F3}	3/10	C _{E4}	0

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

II - Programa linear de MINIMIZAÇÃO

a) Primal

Deseja-se consumir quantidades de determinados alimentos de tal forma a satisfazer as necessidades mínimas de 2 nutrientes (Proteínas e Sais Minerais) exigidas a um custo mínimo.

	Alimentos					Necessidades mínimas de nutrientes (g)
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Proteínas (g)	3	4	5	3	6	42
Sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
Custos (R\$)	25	35	50	33	36	

Formulação do PL primal

i) Variáveis

x_i é o número de unidades do alimento i ($i = 1,2,3,4,5$) feitas por ano, $x_i \geq 0$

ii) PL primal

minimize $Z = 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 36x_5$

sa $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42$ (proteínas $\rightarrow$ nutriente 1)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24$ (sais minerais $\rightarrow$ nutriente 2)

$x_i \geq 0$ $i = 1,2,3,4,5$

Solução do PL PRIMAL via Simplex por quadros

FASE I

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	E1	E2	A1↓	A2↓	b
-W								1	1	
A1	3	4	5	3	6	-1	0	1		42
A2	2	3	4	3	3	0	-1		1	24

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	E1	E2	A1	A2	b
-W	-5	-7	-9↓	-6	-9	1	1			-66
A1	3	4	5	3	6	-1	0	1		42
A2	2	3	4	3	3	0	-1		1	24

...

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	E1	E2	A1	A2	b
-W	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_5	2/9	1/9		-1/3	1	-4/9	5/9	4/9	-5/9	16/3
x_3	1/3	2/3	1	1		1/3	-2/3	-1/3	2/3	2

Solução ótima. Fim da FASE I. Como $A1=A2=W=0$, então o PL dual é viável.

FASE II

Base	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5 ↓	E1	E2	b
-D	25	35	50	33	36			
x_5	2/9	1/9		-1/3	1	-4/9	5/9	16/3
x_3	1/3	2/3	1	1		1/3	-2/3	2

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

Base	x1	x2	x3	x4	x5	E1	E2	b
-D	2	1	5	0	0	1	10	282
x5	1/3	1/3	1/3		1	-1/3	1/3	6
x4	1/3	2/3	1	1		1/3	-2/3	2

b) Dual

Suponha que um vendedor de pílulas de proteínas e pílulas de sais minerais propõe substituir a dieta de alimentos expressa de acordo com a tabela, por uma dieta de pílulas, com as seguintes condições: i) a pílula de proteína (cada uma pesando 1g) custará w_1 ; ii) a pílula de sais minerais (cada uma pesando 1g) custará w_2 ; iii) os preços w_1 e w_2 serão fixados arbitrariamente; iv) 4 - o vendedor garante que as pílulas terão preços iguais ou mais baratos que qualquer alimento; v) 5 - o vendedor pretende, é claro, maximizar sua renda de modo a satisfazer a necessidade da dieta.

Formulação do PL dual

iii) Variáveis

w_j é o valor a ser pago por grama (g) do nutriente j ($j = 1,2$), $w_j \geq 0$

iv) PL dual

maximize $D = 42w_1 + 24w_2$

sa $3w_1 + 2w_2 \leq 25$

$4w_1 + 3w_2 \leq 35$

$5w_1 + 4w_2 \leq 50$

$3w_1 + 3w_2 \leq 33$

$6w_1 + 3w_2 \leq 36$

$w_j \geq 0 \quad j = 1,2$

Solução do PL DUAL via Simplex por quadros

Base	w1↓	w2	F1	F2	F3	F4	F5	b
Z	-42	-24						
F1	3	2	1					25
F2	4	3		1				35
F3	5	4			1			50
F4	3	3				1		33
F5	6	3					1	36

...

Base	w1	w2	F1	F2	F3	F4	F5	b
Z	0	0	0	0	0	2	6	282
F1			1			-1/3	-1/3	2
F2				1		-2/3	-1/3	1
F3					1	-1	-1/3	5
w2		1				2/3	-1/3	10
w1	1					-1/3	1/3	1

RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DO PL PRIMAL E DUAL

Comparação dos quadros ótimos do PRIMAL com o do DUAL

PRIMAL

	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}	C_{x4}	C_{x5}	C_{E1}	C_{E2}	
Base	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$E1$	$E2$	b
-D	2	1	5	0	0	1	10	282
x5	1/3	1/3	1/3		1	-1/3	1/3	6
x4	1/3	2/3	1	1		1/3	-2/3	2

Dual

	C_{w1}	C_{w2}	C_{F1}	C_{F2}	C_{F3}	C_{F4}	C_{F5}	
Base	$w1$	$w2$	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$F5$	b
Z	0	0	0	0	0	2	6	282
F1			1			-1/3	-1/3	2
F2				1		-2/3	-1/3	1
F3					1	-1	-1/3	5
w2		1				2/3	-1/3	10
w1	1					-1/3	1/3	1

Solução ótima					PRIMAL		DUAL	
PRIMAL (min)		DUAL (max)			Linha do Z		Linha do D	
x1	0	w1	1		C_{x1}	2	C_{w1}	0
x2	0	w2	10		C_{x2}	1	C_{w2}	0
x3	0	F1	2		C_{x3}	5	C_{F1}	0
x4	2	F2	1		C_{x4}	0	C_{F2}	0
x5	6	F3	5		C_{x5}	0	C_{F3}	0
E1	0	F4	0		C_{E1}	1	C_{F4}	2
E2	0	F5	0		C_{E2}	10	C_{F5}	6