

Teoremas da Dualidade da Programação Linear

Para os programas lineares

maximizar $\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ (PRIMAL) e minimize $\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}$ (DUAL)

ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades:

- 1) Nem o PRIMAL e nem o DUAL tem soluções viáveis.
- 2) O PRIMAL é ilimitado e o DUAL não tem solução viável.
- 3) O PRIMAL não tem solução viável e o DUAL é ilimitado.
- 4) Ambos, PRIMAL e DUAL, têm soluções viáveis. Neste caso ambos têm uma solução ótima, e se x^* é uma solução ótima do PRIMAL e y^* é uma solução ótima do DUAL, então $c^T x^* = b^T y^*$.

Ou seja, da possibilidade 4) **o máximo do PRIMAL é igual ao mínimo do DUAL.**

Se existe uma solução viável para o PRIMAL, então vale a pena verificar a existência de uma solução viável do DUAL. Ao utilizar o Simplex executamos operações matemáticas para positivar os coeficientes da linha da função objetivo mantendo viabilidade PRIMAL ($b \geq 0$). Ou seja, ao executar o Simplex procuramos por uma solução viável y^* do DUAL. Encontrada esta solução do DUAL teremos encontrado a solução ótima do DUAL e do PRIMAL.

Da mesma forma, se tivermos uma solução viável do DUAL e uma solução inviável do PRIMAL, vale a pena procurar por uma solução viável do PRIMAL. Esta procura é feita via método DUAL SIMPLEX. Ou seja, se todos os coeficientes da função objetivo são não negativos ($c \geq 0$) e $\exists b_j < 0$ então podemos aplicar o algoritmo dual simplex. Este algoritmo visa procurar uma solução viável para o PRIMAL mantendo a viabilidade do DUAL.

DIFERENÇAS ENTRE SIMPLEX E DUAL SIMPLEX

A diferença básica entre o método Simplex e o método Dual Simplex é que, enquanto o método Simplex começa com uma solução PRIMAL básica viável, que não é ótima, e opera na direção da otimalidade PRIMAL, o método Simplex Dual começa com uma solução PRIMAL inviável e opera na direção da viabilidade PRIMAL.

MÉTODO DUAL SIMPLEX

Exemplo 1

PRIMAL

Maximize $Z = 4X_1 + 6X_2 + 4X_3 + 1X_4$
 sa $-1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_4 \leq 11$
 $1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_4 \leq 27$
 $2X_1 + 5X_2 + 1X_3 + 1X_4 \leq 90$
 $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Base	X1	X2	X3	X4	F1	F2	F3	b
Z	-4	-6	-4	-1	0	0	0	0
F1	-1	1	1	1	1	0	0	11
F2	1	1	1	1	0	1	0	27
F3	2	5	1	1	0	0	1	90

Base	X1	X2	X3	X4	F1	F2	F3	b
	-10	0	2	5	6	0	0	66
X2	-1	1	1	1	1	0	0	11
F2	2	0	0	0	-1	1	0	16
F3	7	0	-4	-4	-5	0	1	35

Base	X1	X2	X3	X4	F1	F2	F3	b
	0	0	-26/7	-5/7	-8/7	0	10/7	116
X2		1	3/7	83/7	2/7		1/7	16
F2			81/7	81/7	3/7	1	-2/7	6
X1	1		-4/7	-4/7	-5/7		1/7	5

Base	X1	X2	X3	X4	F1	F2	F3	b
	0	0	0	3	1/4	13/4	1/2	271/2
X2		1		0	1/8	-3/8	1/4	55/4
X3			1	1	3/8	7/8	-1/4	21/4
X1	1			0	-1/2	1/2	0	8

DUAL

Minimize $D = 11Y_1 + 27Y_2 + 90Y_3$
 sa $-1Y_1 + 1Y_2 + 2Y_3 \geq 4$
 $1Y_1 + 1Y_2 + 5Y_3 \geq 6$
 $1Y_1 + 1Y_2 + 1Y_3 \geq 4$
 $1Y_1 + 1Y_2 + 1Y_3 \geq 1$
 $Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

$c \leq 0 \Rightarrow$ solução DUAL inviável

$b \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

$c \leq 0 \Rightarrow$ solução DUAL inviável

$b \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

$c \leq 0 \Rightarrow$ solução DUAL inviável

$b \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

$c \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$b \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

Solução dual viável

$W_1 = 1/4, W_2 = 13/4, W_3 = 1/2,$

$E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 3, D = 271/2$

O método simplex tenta encontrar uma solução viável para o DUAL mantendo a solução do PRIMAL viável (coluna $b \geq 0$)

MÉTODO DUAL SIMPLEX

Exemplo 2

minimize $Z = 11W_1 + 27W_2 + 90W_3$
 sa
 $-1W_1 + 1W_2 + 2W_3 \geq 4$
 $1W_1 + 1W_2 + 5W_3 \geq 6$
 $1W_1 + 1W_2 + 1W_3 \geq 4$
 $1W_1 + 1W_2 + 1W_3 \geq 1$
 $W_1, W_2, W_3 \geq 0$

minimize $Z = 11W_1 - 27W_2 - 90W_3$
 sa
 $1W_1 - 1W_2 - 2W_3 + E_1 = 4$
 $-1W_1 - 1W_2 - 5W_3 + E_2 = 6$
 $-1W_1 - 1W_2 - 1W_3 + E_3 = 4$
 $-1W_1 - 1W_2 - 1W_3 + E_4 = 1$
 $W_1, W_2, W_3, E_1, E_2, E_3, E_4 \geq 0$

Base	w1↓	W2	W3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	11	27	90					
E1	1	-1	-2	1				-4
E2	-1	-1	-5		1			-6→
E3	-1	-1	-1			1		-4
E4	-1	-1	-1				1	-1

$c \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$b \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

$\max\{-11, -27, -18, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

Base	W1	W2	w3↓	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	16	35	0	11	0	0	-66
E1		-2	-7	1	1			-10→
W1	1	1	5		-1			6
E3		0	4		-1	1		2
E4		0	4		-1		1	5

$c \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$b \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

$\max\{\dots, -8, -5, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

Base	W1	W2↓	Y3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	6	0	5	16	0	0	-116
W3		2/7	1	-1/7	-1/7			10/7
W1	1	-3/7		5/7	-2/7			-8/7
E3		-8/7		4/7	-3/7	1		-26/7→
E4		-8/7		4/7	-3/7		1	-5/7

$c \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$b \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

$\max\{\dots, -21/4, \dots, \dots, -112/3, \dots, \dots\}$

Base	W1	W2	W3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	0	0	8	55/4	21/4	0	-271/2
W3			1	0	-1/4	1/4		1/2
W1	1			1/2	-1/8	-3/8		1/4
W2		1		-1/2	3/8	-7/8		13/4
E4				0	0	-1	1	3

$c \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$b \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

$W_1 = 1/4, W_2 = 13/4, W_3 = 1/2,$
 $E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = 0, E_4 = 3, D = 271/2$

O método dual simplex tenta encontrar uma solução viável para o PRIMAL mantendo a solução do DUAL viável (linha do $Z \geq 0$)

Algoritmo do Método Dual Simplex

Seja um pl de maximização com n variáveis e m restrições.

Passo 0: O pl está na forma padrão com $c_j \geq 0, \forall j=1, \dots, n$ e $\exists \bar{b}_j < 0$.

Passo 1: Seleção da variável que sai da base: seja $b_R = \min_i \{\bar{b}_i, \forall \bar{b}_i < 0\}$.

Passo 2: Seleção da variável que entra na base: $\frac{\bar{c}_K}{\bar{a}_{RK}} = \max_j \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{Rj}}, \forall \bar{a}_{Rj} < 0 \right\}$. Se $\nexists \bar{a}_{Rj} < 0$, então o pl é inviável.

Passo 3: Execute o pivoteamento e ache a nova solução básica em que a variável x_K se torna básica.

Passo 4: Teste da viabilidade primal. Se todos os b_i forem não negativos então pare; solução ótima obtida. Caso contrário, volte ao **Passo 1**.