Respostas para exercícios do livro **Introdução à Lógica**, de Cezar Mortari

Luiz Arthur Pagani*

Exercício 1.1, p. 3

Recorrendo ao método de listagem de todas as possibilidades, no qual se vai descartando as inadequadas à descrição do problema, podemos apresentar o seguinte procedimento para resolver a questão dos brincos da princesa.

Considerando inicialmente apenas o fato de que haviam três princesas (Guilhermina, Genoveva e Griselda) e que haviam dois tipos de pedras nos brincos (esmeralda ou rubi), podemos representar todas as possibilidade de combinação entre procesas e brincos com a seguinte tabela (usamos "e" para representar os brincos de esmeralda e "r" para os de rubi):

Griselda	Genoveva	Guilermina
e	e	e
e	e	r
e	r	e
e	r	r
r	e	e
r	e	r
r	r	e
r	r	r

Como só há dois brincos de rubi, podemos descartar a última possibilidade, na qual aparecem três brincos de rubi; ficamos agora com sete possibilidades:

Griselda	Genoveva	Guilermina
e	e	e
e	e	r
e	r	e
e	r	r
r	e	e
r	e	r
r	r	e

Quando tiraram a venda da Guilhermina e ela pôde olhar para suas irmãs, se elas estivessem usando ambas brincos de rubi, ela saberia que os dela eram de esmeralda, porque não haveira mais brincos de rubi para colocarem nela. Portanto, podemos descartar

*Com a colaboração de Eduardo Barra.

novamente a última possibilidade da nova tabela, porque é a única linha em que tanto Genoveva quanto Griselda estariam usando brincos de rubi.

Griselda	Genoveva	Guilermina
e	e	e
e	e	r
e	r	e
e	r	r
r	e	e
r	e	r

Como Guilhermina se retira de "furiosa forma", suas irmãs não poderiam mais olhar que brincos ela tinha. Precisamos então retirar a coluna que corresponde às possibilidades associadas a esta princesa:

Griselda	Genoveva
e	e
e	e
e	r
e	r
r	e
r	e

Observe que, com a saída de Guilhermina, as linhas se repetem duas a duas; essa repetição de possibilidades é desnecessária, e podemos removê-la de nossa representação:

Griselda	Genoveva
e	e
e	r
r	e

Nesta etapa, restaram apenas três possibilidades. Lembrando que, dadas estas possibilidades, Genoveva saberia que brinco estaria usando, caso ela tivesse visto que sua irmã estava usando brincos de rubi (se Griselda estivesse usando brincos de esmeralda, Genoveva poderia estar usando tanto brincos de esmeralda quanto de rubi); como ela não soube dizer, é porque sua irmã não estava usando brincos de rubi; logo, a última linha da tabela pode ser descartada. E como Genoveva se retira, também devemos descartar a última coluna.

Griselda
e
e

Observemos que restaram apenas duas possibilidades que, como antes, podem ser reduzidas a apenas uma, já que são idênticas.

Griselda
e

Chegamos, finalmente, a apenas uma possibilidade para o tipo de brinco que Griselda estava usando: eles só podem ser de esmeralda. Por isso, inclusive, é que ela pôde dizer quais eram os seus brincos antes mesmo de ter sua venda removida (por sinal, de nada adiantaria poder olhar, porque não havia mais nenhuma irmã para que ela pudesse observar que brincos estariam usando).

Exercício 3.1, p. 37

(a) ‘O nome da rosa’ é o título de uma obra de Umberto Eco. – verdadeira

(b) Stanford tem oito letras. – falsa (seria verdadeira se fosse ‘Stanford’ tem oito letras)

(c) ‘3+1’ é igual a ‘4’. – falsa (seria verdadeira sem nenhum par aspas)

(d) ‘Pedro Álvares Cabral’ descobriu o Brasil. – falsa (seria verdadeira sem as aspas)

(e) A palavra ‘Logik’ não é uma palavra do português. – verdadeira.

(f) “Logik” não pode ser usada como sujeito de uma sentença do português. – falsa (a própria sentença é um contra-exemplo, porque “Logik” aparece nela como sujeito, e ela é uma sentença do português)

(g) “Pedro” não é o nome de Sócrates, mas é o nome de ‘Pedro’. – verdadeira (o nome de Sócrates é ‘Sócrates’, e não ‘Pedro’ nem “Pedro”)

(h) Há um livro e James Joyce cujo nome é Ulisses. – falsa (Ulisses é uma pessoa (ou de um personagem, para ser mais preciso); o livro se chama ‘Ulisses’)

Exercício 3.2, p. 37

(a) ‘Rosa’ é dissílaba.

(b) Napoleão foi imperador da França.

(c) ‘Sócrates’ é o nome de um filósofo grego.

(d) A palavra ‘water’ tem o mesmo significado que a palavra portuguesa ‘água’.

(e) A expressão “Rosa” é o nome da palavra ‘Rosa’, que, por sua vez, é o nome de Rosa.

(f) A sentença ‘nenhum gato é preto’ é falsa.

(g) ‘Todavia’ e ‘contudo’, mas não ‘também’, têm o mesmo significado que ‘mas’, contudo, ‘não’, não.

(h) O numeral ‘8’ designa a soma de 4 mais 4.

(i) 2+2 é igual a 3+1, mas ‘3+1’ é diferente de ‘4’.

Exercício 4.1, p. 44

(a) b é um elemento de A:

$b \in A$

(b) k não é um elemento de B

$k \notin B$

(c) o conjunto consistindo nos elementos a, b e c

$\{a, b, c\}$

(d) b é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, b e c

$b \in \{a, b, c\}$

(e) o conjunto $\{b\}$ é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, c, e no conjunto $\{b\}$

$\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$

Exercício 4.2, p. 45

Sim, se representarmos Salma Hayek por s e o conjunto unitário constituído apenas por Salma Hayek por S, podemos dizer que $s \in S$, mas não que $S \in S$; por outro lado, podemos afirmar que $S \subseteq S$, mas não que $s \subseteq S$. Essa distribuição complementar é suficiente para mostrar que Salma Hayek e o conjunto unitário constituído apenas por Salma Hayek têm propriedades completamente diferentes na teoria de conjuntos, e não podem ser identificados.

O mesmo vale para $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$. Ainda que $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto A, o mesmo não se pode dizer de $\{\emptyset\}$. Por outro lado, se é verdade que $\emptyset \in \{\emptyset\}$, o mesmo não se pode dizer de $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$.

Exercício 4.3, p. 47

(b) $A \subseteq A$

Vamos supor que $A \nsubseteq A$; portanto, pela definição de "$\subseteq$", seria preciso que houvesse algum elemento de A que não pertencesse a A. No entanto, pelo princípio da extensionalidade, isto seria impossível. Portanto, não tem como $A \subseteq A$ não ser verdadeiro.

(d) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$

Para que $A \subseteq B$ seja verdadeiro, é preciso que todos os elementos de A também sejam elementos de B; e para que $B \subseteq A$ seja verdadeiro, é preciso que todo elemento de B seja também elemento de A. Portanto, não poderia haver nenhum elemento de A que não fosse elemento de B, nem algum elemento de B que não fosse elemento de A. Assim, A e B teriam os mesmos elementos, o que, de acordo com o princípio da extensionalidade, nos garante que $A = B$.

(e) se $A \subset B$, então $A \neq B$

Vamos supor que $A \subset B$ seja verdadeiro; para que isso ocorra, é preciso que haja pelo menos um elemento que pertença a B mas não pertença a A. Mas, pelo princípio da extensionalidade, é preciso então que $A \neq B$; portanto, quando $A \subset B$ é verdadeiro, não tem como $A \neq B$ ser falso.

Exercício 4.4, p. 50

(a) A é um subconjunto de B

$A \subseteq B$

(b) A é um subconjunto próprio de B

$A \subset B$

(c) o conjunto união de D e S

$D \cup S$

(d) c é elemento da intersecção de A e B

$c \in A \cap B$

(e) a é um elemento do complemento de B

$a \in \overline{B}$

(f) a não é um elemento do complemento da união de M e N

$a \notin \overline{M \cup N}$

Exercício 4.5, p. 51

(a) $c \in \{a, c, e\}$

Verdadeira, porque c é um dos elementos listados no conjunto.

(b) $e \notin \{a, b, c\}$

Verdadeira, porque e não aparece na listagem do conjunto.

(c) $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$

Falsa, porque um conjunto não pode ser subconjunto próprio de si mesmo (é preciso algum elemento no segundo que não faça parte do primeiro).

(d) $\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$

Verdadeira, porque todo conjunto é subconjunto de si mesmo (todos os seus elementos são elementos dele mesmo).

(e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

Verdadeira, porque todos os elementos do primeiro conjunto também são elementos do segundo conjunto.

(f) $a \in \{b, \{a\}\}$

Falsa, porque a não faz parte da listagem do conjunto (apenas $\{a\}$).

(g) $\{a\} \in \{b, \{a\}\}$

Verdadeira, porque $\{a\}$ faz parte da listagem do conjunto.

(h) $\{a\} \in \{c, \{b\}, a\}$

Falsa, porque $\{a\}$ não faz parte da listagem do conjunto (apesar de $\{b\}$ e a fazerem).

(i) $c \in \{a, b\} \cup \{d, c, e\}$

Verdadeira, porque a união dos dois conjuntos tem como elementos todos os elementos de ambos os conjuntos (como c é elemento do segundo conjunto, também vai ser de qualquer conjunto unido a ele).

(j) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$

Verdadeira, porque o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto (o conjunto sem nenhum elemento é o que sobre de qualquer conjunto quando retiramos todos os seus elementos).

(k) $\{0, 1, 2\} \subset \{3, 2, 5, 4, 6\}$

Falsa, porque nem 0 nem 1 são elementos do segundo conjunto.

(l) $\{1, b\} \subseteq \{1, b, c\} \cap \{4, d, 1, f, b\}$

Verdadeira, porque 1 e b são exatamente os únicos elementos comuns aos dois conjuntos em intersecção.

Exercício 4.6, p. 51

$A = \{x, y, z\} \quad B = \{2, 4\} \quad C = \{\pi\} \quad D = \{a, b\} \quad E = \{1, 4, 8\} \quad F = \{4\}$

(a) $A \times B$

$\{\langle x, 2\rangle, \langle x, 4\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle y, 4\rangle, \langle z, 2\rangle, \langle z, 4\rangle\}$

(b) $B \times C$

$\{\langle 2, \pi\rangle, \langle 4, \pi\}$

(c) $B \times A$

$\{\langle 2, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 2, z\rangle, \langle 4, x\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 4, z\rangle\}$

(d) $D \times F \times B$

$\{\langle a, 4, 2\rangle, \langle a, 4, 4\rangle, \langle b, 4, 2\rangle, \langle b, 4, 4\rangle\}$

(e) $C \times F \times B$

$\{\langle \pi, 4, x\rangle, \langle \pi, 4, y\rangle, \langle \pi, 4, z\rangle\}$

(f) $E - B$

$\{1, 8\}$

(g) $D \times (B - E)$

$\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

(h) $(B \cap E) \times F$

$\{\langle 4, 4\rangle\}$

(i) $(E \cup F) \times D$

$\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 8, a\rangle, \langle 8, b\rangle\}$

(j) $(C \cup F) \times (A - \{x\})$

$\{\langle \pi, y\rangle, \langle \pi, z\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 4, z\rangle\}$

(k) $\mathcal{P}(A)$

$\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

(l) $\mathcal{P}(B)$

$\{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$

Exercício 5.1, p. 67

Como o próprio Mortari diz: "um *indivíduo* ou *objeto* é aquilo que podemos destacar do restante, dando-lhe, por exemplo, um nome" (p. 65) e

> não vamos querer aqui ficar restritos apenas aos chamados *objetos físicos existentes*, como a Lua, o Taj Mahal, a Praça da República, o Aconcágua, ou a Claudia Schiffer: nossa noção de objeto sera bastante ampla. Assim, além dos objetos físicos existentes como os acima citados, podemos ter também indivíduos abstratos, como os números 2, π, a raiz quadrada de 5, a beleza, a vermelhidão, a economia de mercado, a alma e assim por diante. Podemos também incluir indivíduos que "não existem" — pessoas mortas, como Tutankhamon, ou ficcionais, como Sherlock Holmes, D. Quixote, o vampiro Lestat, Darth Vader e Lara Croft. (ps. 65–66)

Assim, era de se esperar que pudéssemos incluir no nosso universo de estudos os objetos impossíveis, como o círculo quadrado, o número inteiro cujo quadrado é -1 e o único gato branco que não é branco. Até porque podemos querer construir uma teoria sobre a impossibilidade, para descrever e explicar porque essees objetos são impossíveis.

Por outro lado, a lógica clássica não tolera muio bem a contradição. Portanto, se a introdução desses objetos impossíveis acarretar em contradições, não deveria ser possível falar dos objetos impossiveis.

Exercício 6.1, p. 73

(a) a: é uma constante individual

(b) z_2: é uma variável

(c) x_{VI}: não é expressão do **CQC**, porque "VI" não é um número aceitável para ser subescrito a x (que até é uma variável)

(d) t_{47}: é uma constante individual

(e) e': não é expressão do **CQC**, porque não há nenhum símbolo sobrescrito nele

(f) p_0: ainda que p seja uma constante individual, não há a possibilidade de subscrever com 0 (apenas com números inteiros maiores do que 0); portanto não é uma **CQC**

(g) 9: não é uma expressão do **CQC**, porque os números só servem para subscrever as constantes, e não podem portanto funcionar como constantes

(h) $-a$: como "$-$" não é um símbolo do seu alfabeto, esta não é uma expressão do **CQC**

(i) w_{725}: é uma variável individual

(j) pq: "p" e "q", separadamente, até são constantes individuais, mas juntas elas não constituem expressão do **CQC**

(k) q_{-1}: como já dissemos, o subscrito tem que ser números inteiros maiores do que 0; então esta não é uma expressão do **CQC**

(l) k: é uma constante individual

Exercício 6.2, p. 80

c: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z.

(a) Cleo é um pássaro.

Pc

(b) Miau é um peixe

Fm

(c) Miau é maior do que Cleo

Mmc

(d) Tweety é um gato.

Gt

(e) Tweety é maior do que Miau.

Mtm

(f) Miau é maior do que Tweety.

Mmt

(g) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety.

$Lmct$

(h) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo.

$Ltmc$

(i) Cleo gosta mais de si mesma do que de Miau.

$Lccm$

Exercício 6.3, p. 80

(a) Carla é pintora. (c: Carla; P: x é pintora)

Pc

(b) Paulo é jogador de futebol. (p: Paulo; J: x é jogador de futebol)

Jp

(c) Carla é mais alta do que Paulo. (A: x é mais alto do que y)

Acp

(d) Paulo é irmão de Carla. (I: x é irmão de y)

Ipc

(e) Paulo ama Denise. (d: Denise; A: x ama y)

Apd

(f) Denise ama Paulo.

Adp

(g) Carla gosta de si própria. (G: x gosta de y)

Gcc

(h) A Lua é um satélite da Terra. (l: a Lua; t: a Terra; S: x é um satélite de y)

Slt

(i) Carla deu a Paulo o livro de Denise. (D: x dá a y o livro de z)

$Dcpd$

(j) Paulo deu a Carla o livro de Denise.

$Dpcd$

(k) Paulo é filho de Alberto e Beatriz. (a: Alberto; b: Beatriz; F: x é filho de y e z)

$Fpab$

(l) Florianópolis fica entre Porto Alegre e Curitiba. (f: Florianópolis, p: Porto Alegre; c: Curitiba; E: x fica entre y e z)

$Efpc$

(m) Curitiba fica entre Florianópolis e São Paulo. (s: São Paulo)

$Ecfs$

(n) Paulo comprou em Curitiba um quadro de Matisse para presentear Denise. (m: Matisse; C: x comprou em y um quadro de z para presentear w)

$Cpcmd$

(o) Alberto comprou em São Paulo um quadro de van Gogh para presentear Beatriz. (g: van Gogh)

$Casgb$

Exercício 6.4, p. 89

(a) Como R é um símbolo de relação binária, ele precisa ser acompanhado de dois termos; como a e b são constantes individuais, e portanto são termos, a expressão Rab é uma fórmula.

(b) Para que $\neg Px$ seja uma fórmula, é preciso que Px seja uma fórmula. Como P é um símbolo de propriedade, ele precisa ser acompanhado de um termo; como x é uma variável individual, e portanto é um termo, Px é uma fórmula e $\neg Px$ também.

(c) aRb não é uma fórmula, apesar de R ser um símbolo de relação binária e a e b serem termos, porque é preciso que os termos venham depois do símbolo de relação; portanto, Rab seria uma fórmula.

(d) $(Ra \to Qb)$ não é uma fórmula, porque o condicional é composto pela combinação de duas fórmulas; e ainda que Qb seja uma fórmula (porque Q é um símbolo de propriedade e b é um termo), Ra não é uma fórmula, porque R é um símbolo de relação binária e precisaria ser seguido por dois termos.

(e) A expressão $((\neg Rxa \leftrightarrow Qb) \wedge Pc)$ é uma fórmula, porque é composta da conjunção de $(\neg Rxa \leftrightarrow Qb)$ e de Pc, e ambas são fórmulas. O segundo elemento é composto pelo símbolo de propriedade P seguido de um único termo c. O primeiro, por sua vez, é constituído pelo bincondicional de duas fórmulas: $\neg Rxa$ e Qb; este segundo é composto por um símbolo de propriedade Q seguido de um termo b. Já o primeiro é a negação da fórmula Rxa, composta pelo símbolo de relação binária R seguido de dois termos x (uma variável individual) e a (uma constante individual).

(f) A expressão $(\alpha \vee \neg\beta)$ não é uma fórmula porque ela deveria ser a disjunção de duas fórmulas α e $\neg\beta$; no entanto, nem α é um símbolo proposicional (de predicado zero-ário), nem $\neg\beta$ é uma fórmula, porque β também não é um símbolo proposicional.

(g) Para que a expressão $((\neg Rxy \leftrightarrow Qc) \wedge \neg(Pa \wedge A))$ seja uma fórmula, é preciso que $(\neg Rxy \leftrightarrow Qc)$ e $\neg(Pa \wedge A)$ sejam fórmulas, porque ela seria a conjunção destas.

- Para que $(\neg Rxy \leftrightarrow Qc)$ seja uma fórmula, é preciso que $\neg Rxy$ e Qc sejam fórmulas, porque ela seria o bicondicional destas.
  - Para que $\neg Rxy$ seja uma fórmula, é preciso que Rxy também seja.
    - Rxy é uma fórmula, porque R é um símbolo de relação binária e x e y são variáveis.
  - Qc é uma fórmula, porque Q é um símbolo de propriedade e c é uma constante individual.
- Para que $\neg(Pa \wedge A)$ seja uma fórmula, é preciso que $Pa \wedge A$ também seja.
  - Para que $Pa \wedge A$ seja uma fórmula, é preciso que Pa e A também sejam, porque ela é uma conjunção destas.
    - Pa é uma fórmula porque P é um símbolo de propriedade e a é uma constante individual.
    - A é uma fórmula porque é um símbolo proposicional.

Portanto, $((\neg Rxy \leftrightarrow Qc) \wedge \neg(Pa \wedge A))$ é uma fórmula.

(h) A expressão $(A \to (Pb \lor Rcc))$ é uma fórmula, porque é um condicional de duas fórmulas: A e $(Pb \lor Rcc)$. A é uma fórmula porque é um símbolo proposicional. $(Pb \lor Rcc)$ é uma fórmula porque é a disjunção de duas fórmulas: Pb e Rcc; o primeiro é uma fórmula composta pelo símbolo de propriedade P e pela constante b, o segundo é uma fórmula composta pelo símbolo de relação binária R seguido de duas ocorrências da constante c.

Exercício 6.5, p. 89

c: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z.

(a) Cleo não é um pássaro.

$\neg Pc$

(b) Miau não é um peixe.

$\neg Fm$

(c) Miau é um gato ou é um pássaro.

$(Gm \lor Pm)$

(d) Miau é um gato e é maior do que Cleo.

$(Gm \land Mmc)$

(e) Tweety não é um gato.

$\neg Gt$

(f) Ou Tweety é maior do que Miau, ou Miau é maior do que Tweety.

$(Mtm \lor Mmt)$

(g) Se Miau é maior do que Tweety, então Tweety não é maior do que Miau.

$(Mmt \to \neg Mtm)$

(h) Miau é maior do que Tweety, se Tweety não é maior do que Miau.

$(\neg Mtm \to Mmt)$

(i) Se Miau é um gato, então não é um peixe.

$(Gm \to \neg Fm)$

(j) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.

$(Lmct \leftrightarrow Pt)$

(k) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo, mas Miau não gosta mais de Cleo do que de Tweety.

$(Ltmc \land \neg Lmct)$

(l) Nem Miau nem Cleo são pássaros.

$(\neg Pm \land \neg Pc)$ (mas também podia ser $\neg(Pm \lor Pc)$)

(m) Tweety não é um gato ou não é um peixe.

$(\neg Gt \lor \neg Ft)$ (ou então $\neg(Gt \land Ft)$)

(n) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.

$\neg(Gt \land Ft)$

(o) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

$\neg(Gm \to Fm)$

Exercício 6.6, p. 90

(a) Carla é pintora, mas Paulo é jogador de futebol. (c: Carla; p: Paulo; P: x é pintora; J: x é jogador de futebol)

$(Pc \land Jp)$

(b) Ou Paulo é um engenheiro, ou Carla o é. (E: x é engenheiro)

$(Ep \lor Ec)$

(c) Carla é pintora, mas Paulo é engenheiro oou jogador de futebol.

$(Pc \land (Ep \lor Jp))$

(d) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo. (s: Sócrates; p: Platão; M: x é o mestre de y; F: x é um filósofo)

$(Msp \to Fp)$

(e) Paulo ama Denise, que ama Ricardo. (d: Denise; r: Ricardo; A: x ama y)

$(Apd \land Adr)$

(f) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista. (N: x é narcisista)

$(App \leftrightarrow Np)$

(g) Chove ou faz sol. (C: chove; S: faz sol)

$(C \lor S)$

(h) Não chove, mas nem faz sol nem está frio. (F: está frio)

$(\neg C \land (\neg S \land \neg F))$ (ou $(\neg C \land \neg(S \lor F))$)

(i) João vai à praia, se o tempo estiver bom. (j: João; P: x vai à praia; T: o tempo está bom)

$(T \to Pj)$

(j) Se o tempo estiver bom, e não fizer muito frio, João irá à praia. (F: faz muito frio)

$((T \land \neg F) \to Pj)$

(k) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá à praia.

$(\neg T \to (F \to \neg Pj)$

(l) A Terra é um planeta, e a Lua gira em torno da Terra. (t: a Terra; l: a Lua; P: x é um planeta; G: x gira em torno de y)

$(Pt \wedge Glt)$

(m) Saturno é um planeta, mas não gira em torno de Alfa Centauri. (s: Saturno; a: Alfa Centauri)

$(Ps \wedge \neg Gsa)$

(n) A Lua não é um planeta, nem gira em torno de Saturno.

$(\neg Pl \wedge \neg Gls)$

(o) Miau é um gato preto. (m: Miau; G: x é um gato; P: x é preto)

$(Gm \wedge Pm)$

(p) Miau é um gato angorá que não é preto. (A: x é angorá)

$((Gm \wedge Am) \wedge \neg Pm)$

(q) Carla é mais alta do que Paulo somente se Paulo é mais baixo do que Carla. (A: x é mais alto do que y; B: x é mais baixo do que y)

$(Acp \rightarrow Bpc)$

(r) Carla não é mais alta do que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (T: x tem a mesma altura que y)

$(\neg Acp \rightarrow (Bcp \vee Tcp))$

Exercício 6.7, p. 91

a: Antonio; b: Bernardo; c: Cláudia; d: Débora; F: x é um filósofo; G: x gosta de y; D: x detesta y.

(a) Gbd

Bernardo gosta de Débora.

(b) $(Fb \wedge Fd)$

Bernardo e Débora são filósofos.

(c) $(Fb \wedge \neg Fa)$

Bernardo é um filósofo, e Antônio não.

(d) $(Fa \wedge Gac)$

Antônio é um filósofo e gosta de Cláudia.

(e) $(Gbd \wedge Ddb)$

Bernardo gosta de Débora e Débora detesta Bernardo.

(f) $(\neg Gcb \vee \neg Gbc)$

Cláudia não gosta de Bernardo ou Bernardo não gosta de Cláudia.

(g) $(Gbb \to Dcb)$

Se Bernardo gosta de si mesmo, então Cláudia detesta Bernardo.

(h) $(Gbd \leftrightarrow Dcd)$

Bernardo gosta de Débora se e somente se Cláudia detesta Débora.

(i) $(Dbd \to (Fb \vee Fd))$

Se Bernardo detesta Débora, então Bernardo ou Débora são filósofos.

(j) $((Fa \wedge Fc) \to (Gac \wedge Gca))$

Se Antônio e Cláudia são filósofos, então Antônio e Cláudia gostam um do outro.

Exercício 6.8, p. 97

(a) Fórmula geral

(b) Não é fórmula.

(c) Não é fórmula.

(d) Não é fórmula.

(e) Fórmula molecular.

(f) Fórmula molecular.

Exercício 6.9, p. 97

(a) Algo é branco. (B: x é branco)

$\exists x Bx$

(b) Tudo é azul. (A: x é azul)

$\forall x Ax$

(c) Alguma coisa não é azul.

$\exists x \neg Ax$ (ou $\neg \forall x Ax$, "nem tudo é azul")

(d) Algo é bonito. (B: x é bonito)

$\exists x Bx$

(e) Todos são mortais. (M: x é mortal)

$\forall x Mx$

(f) Nada é insubstituível. (I: x é insubstituível)

$\neg \exists x Ix$ (ou $\forall x \neg Ix$, "tudo não é insubstituível")

(g) Nem tudo dura para sempre. (D: x dura para sempre)

$\neg \forall x Dx$ (ou $\exists x \neg Dx$, "alguma coisa não dura para sempre")

(h) Centauros não existem. (C: x é um centauro)

$\neg\exists xCx$ (ou $\forall x\neg Cx$, "todas as coisas não são centauros"; $\exists x\neg Cx$?)

(i) Alguma coisa não é verde. (G: x é verde)

$\exists x\neg Gx$ (ou $\neg\forall xGx$, "nem todas as coisas são verdes")

(j) Cada objeto é igual a si mesmo. (I: x é igual a y)

$\forall xIxx$

(k) Há objetos que não são iguais a si mesmos.

$\exists x\neg Ixx$ (ou $\neg\forall xIxx$, "nem todos os objetos são iguais a si mesmos")

(l) Nem tudo é cor-de-rosa. (R: x é cor-de-rosa)

$\neg\forall xRx$ (ou $\exists x\neg Rx$, "existe algo que não é cor-de-rosa")

(m) Nada é cor-de-rosa.

$\neg\exists xRx$ (ou $\forall x\neg Rx$, "todas as coisas não são cor-de-rosa")

(n) Alguém é mais velho do qeu Pedro. (p: Pedro; O: x é mais velho do que y)

$\exists xOxp$

(o) Ninguém é mais velho do que Pedro.

$\neg\exists xOxp$ (ou $\forall x\neg Oxp$, "todos não são mais velhos do que Matusalém")

(p) Matusalém é mais velho do que alguém. (m: Matusalém)

$\exists xOmx$

(q) Matusalém é mais velho do que todos.

$\forall xOmx$

(r) Não é verdade que Matusalém é mais velho do que todos.

$\neg\forall xOmx$ (ou $\exists x\neg Omx$, "existe alguém tal que Matusalém não é mais velho do que ele")

(s) Alguém gosta de si mesmo.

$\exists xGxx$

(t) Todos gostam de si mesmos.

$\forall xGxx$

(u) Ninguém gosta de Miau. (m: Miau)

$\neg\exists xGxm$ (ou $\forall x\neg Gxm$, "todos não gostam de Miau")

(v) Alguém não gosta de si mesmo.

$\exists x\neg Gxx$ (ou $\neg\forall xGxx$, "nem todos gostam de si mesmo"; $\neg\exists xGxx$?)

(w) Não existe alguém que goste de si mesmo.

$\neg\exists xGxx$ (ou $\forall x\neg Gxx$, "todos não gostam de si mesmo")

(x) Não existe alguém que não goste de si mesmo.

$\neg\exists x \neg Gxx$ (ou $\forall x Gxx$, “todos gostam de si mesmo”)

(y) Ninguém gosta mais de Paulo do que de Denise. (p: Paulo; d: Denise; L: x gosta mais de y do que de z)

$\neg\exists x Lxpd$ (ou $\forall x \neg Lxpd$, “para todo indivíduo, não é verdade que ele goste mais de Paulo do que de Denise”)

(z) Nem todos gostam mais de Paulo do que de Denise.

$\neg\forall x Lxpd$ (ou $\exists x \neg Lxpd$, “existe alguém que não gosta mais de Paulo do que de Denise”)

Exercício 7.1, p. 106

(a) $\neg Fa \wedge Gb$

- $\neg Fa \wedge Gb$
  - $\neg Fa$
    - Fa
  - Gb

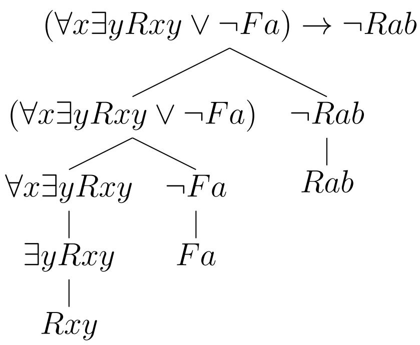
(b) $\neg(Fa \wedge (\neg Gb \to Rab))$

- $\neg(Fa \wedge (\neg Gb \to Rab))$
  - $(Fa \wedge (\neg Gb \to Rab))$
    - Fa
    - $(\neg Gb \to Rab)$
      - $\neg Gb$
        - Gb
      - Ra

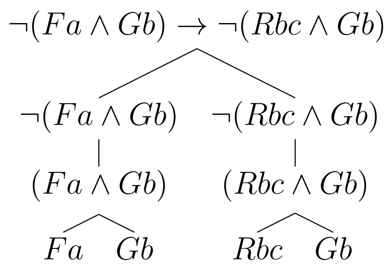
(c) $Rtp \leftrightarrow \forall x(Rtx \wedge \exists y Rxy)$

- $Rtp \leftrightarrow \forall x(Rtx \wedge \exists x Rxy)$
  - Rtp
  - $\forall x(Rtx \wedge \exists y Rxy)$
    - $(Rtx \wedge \exists y Rxy)$
      - Rtx
      - $\exists y Rxy$
        - Rxy

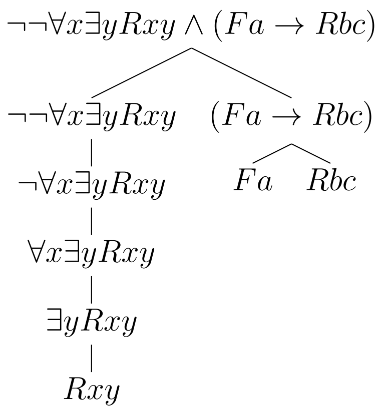
(d) $(\forall x \exists y Rxy \vee \neg Fa) \to \neg Rab$



(e) $\neg(Fa \wedge Gb) \rightarrow \neg(Rbc \wedge Gb)$



(f) $\neg\neg\forall x\exists yRxy \wedge (Fa \rightarrow Rbc)$



Exercício 7.2, p. 106

(a) Fx não é uma sentença, porque há uma instância de x nela, que não está no escopo de uma quantificação dela; portanto, ela é uma instância livre da variável x.

(b) $\forall xFx$ é uma fórmula, porque a única instância de x aparece no escopo do quantificador:

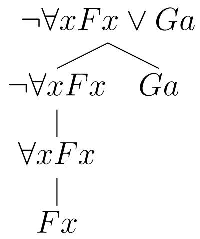
Quantificador	Escopo
$\forall x$	Fx

(c) Pa é uma sentença porque, como não há nenhuma instância de qualquer variável, não há nenhuma instância de variável livre.

(d) $\forall y\neg Py$ é uma sentença porque a única instância de y que aparece na fórmula, ocorre no escopo do quantificador:

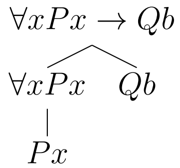
Quantificador	Escopo
$\forall y$	$\neg Py$

(e) $\neg\forall xFx \vee Ga$ é uma sentença, pois a única ocorrência da variável x, na subfórmula Fx, aparece no escopo do quantificador $\forall x$:



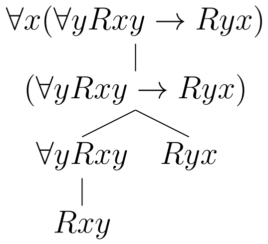
Quantificador	Escopo
$\forall x$	Fx

(f) $\forall xPx \to Qb$ é uma sentença, porque só há uma ocorrência da variável x, na subfórmula P, que aparece no escopo do quantificador $\forall x$:



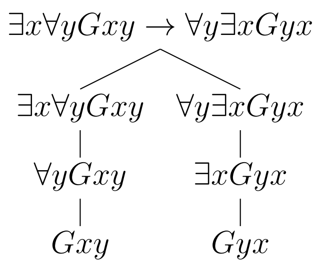
Quantificador	Escopo
$\forall x$	Px

(g) $\forall x(\forall yRxy \to Ryx)$ não é uma sentença, pois a segunda ocorrência da variável y, na subfórmula Ryx, não está no escopo do quantificador $\forall y$:



Quantificador	Escopo
$\forall x$	$(\forall yRxy \to Ryx)$
$\forall y$	Rxy

(h) $\exists x\forall yGxy \to \forall y\exists xGyx$ é uma sentença porque cada uma das duas ocorrências de cada uma das duas variáveis está ligada pelos respectivos quantificadores:



Quantificador	Escopo	
$\exists x$	$\forall yGxy$	primeira ocorrência
$\forall y$	Gxy	primeira ocorrência
$\forall y$	$\exists xGyx$	segunda ocorrência
$\exists x$	Gyx	segunda ocorrência

(i) $\forall xFx \lor \neg Fx$ não é uma sentença, pois a segunda ocorrência da variável x não está no escopo do quantificador:

- $\forall xFx \lor \neg Fx$
  - $\forall xFx$
    - Fx
  - $\neg Fx$
    - Fx

Quantificador	Escopo	
$\forall x$	Fx	só primeira ocorrência

(j) $Pa \to (Pa \to Pa)$ é uma sentença, porque não há nenhuma ocorrência de variável, portanto não há nenhuma variável livre.

(k) $Ax \to \forall xAx$ não é uma sentença, porque há uma instância livre da variável x (a primeira ocorrência):

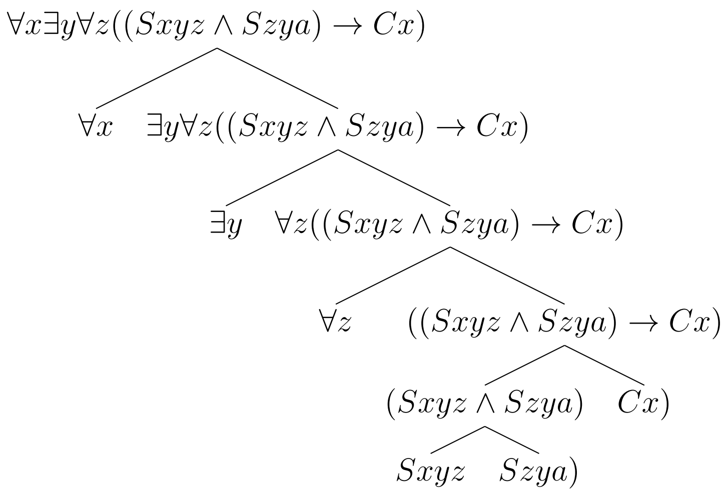
- $Ax \to \forall xAx$
  - Ax
  - $\forall xAx$
    - $\forall x$
    - Ax

(l) $(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$ não é uma sentença, já que a última ocorrência da variável x não aparece no escopo do quantificador $\exists x$:

- $(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$
  - $(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa)$
    - $\exists x(Qa \leftrightarrow Qx)$
      - $\exists x$
      - $(Qa \leftrightarrow Qx)$
        - Qa
        - Qx
    - Qa
  - Qx

(m) $\neg Pa \land \neg Qb$ é uma sentença, pois não existem variáveis livres nela, já que não há nenhuma variável.

(n) $\forall x\exists y\forall z((Sxyz \land Szya) \to Cx)$ é uma sentença, porque todas as instâncias das variáveis ocorrem nos escopos dos quantificadores:



Exercício 7.3, p. 113

(a) Alguns homens não são sinceros (H: x é homem; S: x é sincero)
$\exists x(Hx \wedge \neg Sx)$ — particular negativa

(b) Todas as mulheres são lindas (M: x é mulher; L: x é linda)
$\forall x(Mx \rightarrow Lx)$ — universal afirmativa

(c) Nenhum peixe é anfíbio (P: x é peixe; A: x é anfíbio)
$\forall x(Px \rightarrow \neg Ax)$ — universal negativa

(d) Alguns metais são líquidos (M: x é um metal; L: x é líquido)
$\exists x(Mx \wedge Lx)$ — particular afirmativa

(e) Nenhum animal é vegetal (A: x é um animal; T: x é um vegetal)
$\forall x(Ax \rightarrow \neg Tx)$ — universal negativa

(f) Nem todos os animais são invertebrados (I: x é invertebrado)
$\exists x(Ax \wedge \neg Ix)$ — particular negativa

(g) Alguns papagaios não são vermelhos (P: x é um papagaio; R: x é vermelho)
$\exists x(Px \wedge \neg Rx)$ — particular negativa

(h) Nenhum papagaio é vermelho
$\forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$ universal negativa

(i) Há ao menos um papagaio vermelho
$\exists x(Px \wedge Rx)$ — particular afirmativa

(j) Há ao menos um papagaio, e ao menos uma coisa vermelha
$\exists x Px \wedge \exists x Rx$ — conjunção de particulares afirmativas

(k) Alguns números naturais são ímpares (N: x é um número natural; I: x é ímpar)
$\exists x(Nx \wedge Ix)$ – particular afirmativa

(l) Tudo que é azul é bonito (A: x é azul; B: x é bonito)

$\forall x(Ax \to Bx)$ — universal afirmativa

(m) Todo poeta é romântico (P: x é um poeta; R: x é romântico)

$\forall x(Px \to Rx)$ — universal afirmativa

(n) Nenhum poeta romântico vende muitos livros (L: x vende muitos livros)

$\forall x((Px \land Rx) \to \neg Lx)$ — universal negativa

(o) Qualquer pessoa que seja persistente pode aprender lógica (P: x é uma pessoa; T: x é persistente; L: x pode aprender lógica)

$\forall x((Px \land Tx) \to Lx)$ — universal afirmativa

(p) Há crianças que gostam de brincar (C: x é criança; G: x gosta de brincar)

$\exists x(Cx \land Gx)$ — particular afirmativa

(q) Toda criança gosta de brincar

$\forall x(Cx \to Gx)$ — universal afirmativa

(r) Toda criança travessa gosta de brincar (T: x é travessa)

$\forall x((Cx \land Tx) \to Gx)$ — universal afirmativa

(s) Toda criança travessa gosta de brincar e de ir ao cinema (K: x gosta de ir ao cinema)

$\forall x((Cx \land Tx) \to (Gx \land Kx))$ — universal afirmativa

(t) Qualquer amigo de Pedro é amigo de João (p: Pedro, j: João, A: x é amigo de y)

$\forall x(Axp \to Axj)$

(u) Nem todos os espiões são mais perigosos do que Boris (b: Boris, S: x é espião, D: x é espião)

$\neg\forall x(Sx \to Dxb)$

(v) Nenhum espião é mais perigoso do que Natasha (n: Natasha)

$\neg\exists x(Sx \land Dxn)$

$\forall x(Sx \to \neg Dxn)$

(w) Qualquer um que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris

$\forall x(Dxn \to Dxb)$

(x) Nenhum espião que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris

$\neg\exists x((Sx \land Dxn) \land Dxb)$

$\forall x((Sx \land Dxn) \to \neg Dxb)$

(y) Alguém é mais perigoso do que Boris e Natasha

$\exists x(Dxb \land Dxn)$

(z) Há um espião que não é mais perigoso do que Boris e nem do que Natasha (nem do que Boris, nem do que Natasha)

$\exists x((Sx \wedge \neg Dxb) \wedge \neg Dxn)$

Exercício 7.4, p. 118

(a) Todos amam alguém

$\forall x \exists y Axy$

$\exists x \forall y Ayx$

(b) Alguém ama alguém

$\exists x \exists y Axy$

$\exists y \exists x Axy$

(c) Todos são amados por alguém

$\forall x \exists y Ayx$

$\exists y \forall x Ayx$

(d) Alguém é amado por todos

$\exists y \forall x Axy$

$\forall x \exists y Axy$

(e) Todos são amados por todos

$\forall y \forall x Ayx$

$\forall x \forall y Ayx$

(f) Alguém não ama todos

$\exists x \forall y \neg Axy$

$\exists x \neg \forall y Axy$

$\neg \exists x \forall y Axy$

$\forall y \exists x \neg Axy$

$\forall y \neg \exists x Axy$

$\neg \forall y \exists x Axy$

(g) Alguém não é amado por todos

$\exists x \forall y \neg Ayx$

$\exists x \neg \forall y Ayx$

$\neg \exists x \forall y Ayx$

$\forall y \exists x \neg Ayx$

$\forall y \neg \exists x Axyx$

$\neg \forall y \exists x Ayx$

(h) Se todos gostam de Miau, Miau gosta de todos

$\forall x(Gxm \to Gmx)$

$\forall xGxm \to \forall yGmy$

(i) Alguém gosta de alguém, se Miau gosta de todos

$\forall xGmx \to \exists y\exists zGyz$

$\forall xGmx \to \exists z\exists yGyz$

(j) Todos gostam de Miau, mas Miau não gosta de ninguém

$\forall xGxm \wedge \forall x\neg Gmx$

$\forall x(Gxm \wedge \neg Gmx)$

$\forall xGxm \wedge \neg\exists xGmx$

(k) Todos amam alguém que não os ama

$\forall x\exists y(Axy \wedge \neg Ayx)$

$\exists y\forall x(Axy \to \neg Ayx)$ ou $\exists y\forall x(Axy \wedge \neg Ayx)$?

(l) Todos amam alguém que não ama ninguém

$\forall x\exists y(Axy \wedge \neg\exists zAyz)$

$\exists y\forall x(Axy \to \neg\exists zAyz)$ ou $\exists y\forall x(Axy \wedge \neg\exists zAyz)$?

(m) Todos amam alguém, mas ninguém ama a todos

$\forall x\exists yAxy \wedge \neg\exists x\forall yAxy$

$\forall x\exists yAxy \wedge \forall x\neg\forall yAxy$

$\forall x\exists yAxy \wedge \forall x\exists y\neg Axy$

(n) Ou alguém é amado por todos, ou alguém ama todos e alguém não ama ninguém.

$\exists x\forall yAyx \vee (\exists x\forall yAxy \wedge \exists x\forall y\neg Axy)$

$\exists x\forall yAyx \vee (\exists x\forall yAxy \wedge \exists x\neg\exists yAxy)$

Exercício 7.5, p. 118

(a) Nenhum amigo de Pedro é amigo de João. (p: Pedro; j: João; A x é amigo de y)

$\forall x(Axp \to \neg Axj)$

$\neg\exists x(Axp \wedge Axj)$

(b) Qualquer amigo de Pedro que não seja um político é amigo de João. (P: x é um político)

$\forall x((Axp \wedge \neg Px) \to Axj)$

(c) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de João. (c: Carlos)

$\forall x((Axp \vee Axc) \to Axj)$

$\forall x((Axp \to Axj) \vee (Axc \to Axj))$

(d) Qualquer amigo de Pedro é amigo de algum amigo de João.

$\forall x(Axp \rightarrow \exists y(Ayj \wedge Axy))$

(e) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de qualquer amigo de João.

$\forall x((Axp \vee Axc) \rightarrow \forall y(Ayj \rightarrow Axy))$

(f) Nenhuma mulher é feia, mas algumas mulheres não são bonitas. (M: x é mulher; F: x é feia; B: x é bonita)

$\neg\exists x(Mx \wedge Fx) \wedge \exists x(Mx \wedge \neg Bx)$

(g) Se todos os humanos são imortais, então Sócrates é imortal ou Sócrates não é humano. (s: Sócrates; H: x é humano; I: x é imortal)

$\forall x(Hx \rightarrow Ix) \rightarrow (Is \vee \neg Hs)$

(h) Nem todas as aves voam, se Tweety não voa. (t: Tweety; A: x é uma ave; F: x voa)

$\neg Ft \rightarrow \neg\forall x(Ax \rightarrow Fx)$

$\neg Ft \rightarrow \exists x(Ax \wedge \neg Fx)$

(i) Todo fazendeiro tem um burro no qual ele bate. (F: x é um fazendeiro; B: x é um burro; T: x pertence a y; H: x bate em y)

$\forall x(Fx \rightarrow \forall y((Bx \wedge Hxy) \rightarrow Tyx))$

$\forall x\forall y(Fx \rightarrow ((Bx \wedge Hxy) \rightarrow Tyx))$

$\forall y\forall x(Fx \rightarrow ((Bx \wedge Hxy) \rightarrow Tyx))$

$\forall x(Fx \rightarrow \exists y((Bx \wedge Hxy) \wedge Tyx))$

$\forall x\exists y(Fx \rightarrow ((Bx \wedge Hxy) \wedge Tyx))$

($\exists y((By \wedge Hxy) \wedge \forall x(Fx \rightarrow Txy))$: essa não pode porque a primeira ocorrência de x fica livre.)

(j) Algum fazendeiro tem um burro no qual ele não bate.

$\exists x(Fx \wedge \exists y(By \wedge (Tyx \wedge \neg Hxy)))$

(k) Todo homem ama uma mulher que o ama. (H: x é um homem; M: x é uma mulher; A: x ama y)

$\forall x\exists y(Hx \rightarrow ((My \wedge Ayx) \wedge Axy))$

$\exists y(My \wedge \forall x(Hx \rightarrow (Axy \wedge Ayx)))$

(l) Nem todo homem ama uma mulher que o ama.

$\neg\forall x(Hx \rightarrow \exists y((My \wedge Ayx) \wedge Axy))$

(m) Todo homem ama uma uma mulher que ama alguém.

$\forall x(Hx \rightarrow \exists y((My \wedge \exists z Ayz) \wedge Axy))$

(n) Se todos os filósofos espertos são cínicos e apenas mulheres são filósofos espertos, então, se há algum filósofo esperto, alguma mulher é cínica. (F: x é um filósofo; E: x é esperto; C: x é cínico)

$(\forall x((Fx \wedge Ex) \rightarrow Cx) \wedge \forall x((Fx \wedge Ex) \rightarrow Mx)) \rightarrow (\exists x(Fx \wedge Ex) \rightarrow \exists x(Mx \wedge Cx))$

Exercício 7.6, p. 119

(a) Alice gosta de algum filósofo que gosta dela.
$\exists x((Fx \wedge Gax) \wedge Gxa)$

(b) Todo filósofo gosta de algum livro.
$\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Lx \wedge Gxy))$
$\exists y(Ly \wedge \forall x(Fx \rightarrow Gxy))$

(c) Há um livro do qual todos os filósofos gostam.
$\exists x(Lx \wedge \forall y(Fy \rightarrow Gyx))$

(d) Os filósofos gostam de todos os livros.
$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \wedge Gxy))$
$\forall y(Ly \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gxy))$

(e) Há um livro do qual nenhum psicólogo gosta.
$\exists x(Lx \wedge \forall y(Py \rightarrow \neg Gyx))$
$\exists x(Lx \wedge \neg \exists y(Py \wedge Gyx))$

(f) Nenhum psicólogo gosta de livros.
$\forall x(Px \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$
$\forall x(Px \rightarrow \neg \exists y(Ly \wedge Gxy))$

(g) Filósofos não gostam de psicólogos.
$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \neg Gxy))$

(h) Um filósofo deu um livro para Alice.
$\exists x(Fx \wedge \exists y(Ly \wedge Dxya))$
$\exists y(Ly \wedge \exists x(Fx \wedge Dxya))$

(i) Um filósofo deu um livro para Alice, do qual ela não gostou.
$\exists x(Fx \wedge \exists y((Ly \wedge Dxya) \wedge \neg Gay))$

(j) Alice e Beatriz deram um livro para Cláudia.
$\exists x(Lx \wedge (Daxc \wedge Dbxc))$
$\exists x(Lx \wedge Daxc) \wedge \exists x(Lx \wedge Dbxc)$

(k) Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz.
$\exists x(Fx \wedge \exists y(Py \wedge \exists z(Lz \wedge (Dxzb \wedge Dyzb))))$
$\exists x(Fx \wedge \exists y(Ly \wedge Dxyb)) \wedge \exists x(Px \wedge \exists y(Ly \wedge Dxyb))$
$\exists x(Lx \wedge (\exists y(Fy \wedge Dyxb) \wedge \exists y(Py \wedge Dyxb)))$

(l) Nem os filósofos nem os psicólogos gostam de si mesmos.

$\forall x((Fx \vee Px) \rightarrow \neg Gxx)$

$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gxx) \wedge \forall x(Px \rightarrow \neg Gxx)$

$\forall x((Fx \rightarrow \neg Gxx) \wedge (Px \rightarrow \neg Gxx))$

(m) Se algum psicólogo gosta de Beatriz, então algum filósofo também gosta.

$\exists x(Px \wedge Gxb) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gxb)$

(n) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo gosta desta mesma pessoa.

$\exists x(\exists y(Py \wedge Gyx) \rightarrow \exists y(Fy \wedge Gyx))$

(o) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo também gosta de alguém

$\exists x(Px \wedge \exists yGxy) \rightarrow \exists x(Fx \wedge \exists yGxy)$

(p) Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou não gostam de nenhum.

$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow (Gxy \vee \neg Gxy)))$

(q) Alice e Beatriz gostam de todos os livros, se algum filósofo dá algum livro para alguém.

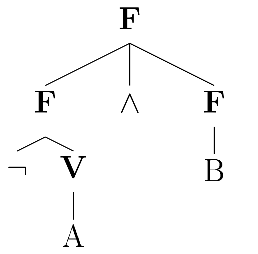
$\exists x(Fx \wedge \exists y(Ly \wedge \exists zDxyz)) \rightarrow \forall x(Lx \rightarrow (Gax \wedge Gbx))$

(r) Todos gostam dos filósofos, se todo filósofo dá algum livro para alguém.

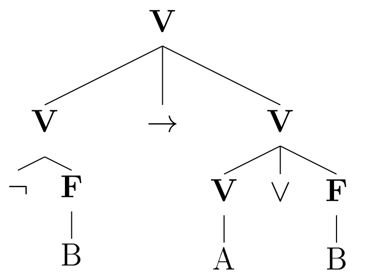
$(\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Ly \wedge \exists zDxyz)) \rightarrow \forall x\forall y(Fy \rightarrow Gxy))$

Exercício 9.1, p. 141

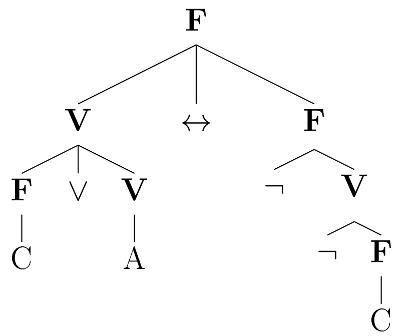
(a) $\neg A \wedge B$



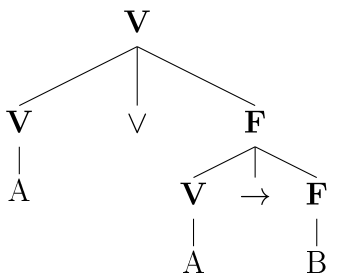
(b) $\neg B \rightarrow (A \vee B)$



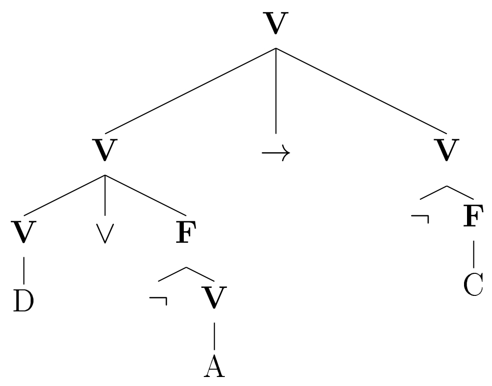
(c) $(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$



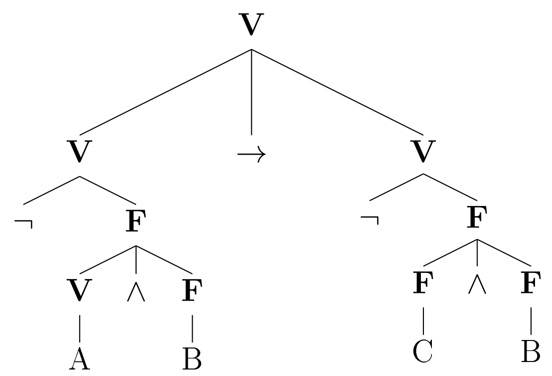
(d) $A \vee (A \rightarrow B)$



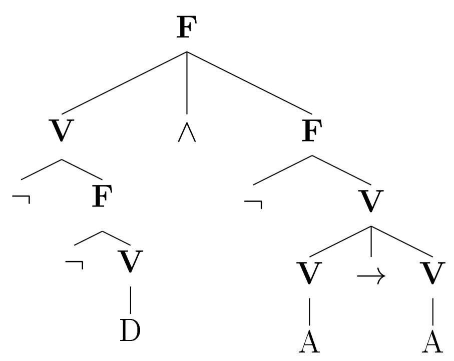
(e) $(D \vee \neg A) \rightarrow \neg C$



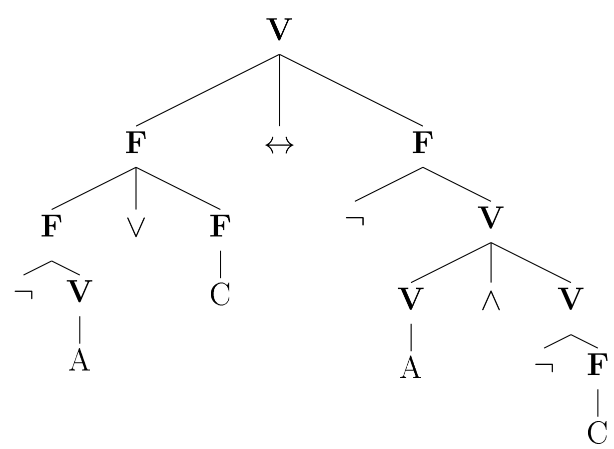
(f) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$



(g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$



(h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$



Exercício 9.2, p. 144

(a) $\neg A \wedge B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$
V	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**

(b) $\neg B \to (A \vee B)$

A	B	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg B \to (A \vee B)$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**F**

(c) $(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$

A	C	$C \vee A$	$\neg C$	$\neg\neg C$	$(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**

(d) $A \vee (A \to B)$

A	B	$A \to B$	$A \vee (A \to B)$
V	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**

(e) $(D \vee \neg A) \to \neg C$

A	C	D	$\neg A$	$D \vee \neg A$	$\neg C$	$(D \vee \neg A) \to \neg C$
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

(f) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$C \wedge B$	$\neg(C \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**

(g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$

A	D	$\neg D$	$\neg\neg D$	$A \rightarrow A$	$\neg(A \rightarrow A)$	$\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**

(h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$

A	C	$\neg A$	$\neg A \vee C$	$\neg C$	$A \wedge \neg C$	$\neg(A \wedge \neg C)$	$(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**

Exercício 9.3, p. 147

(a) $\neg\neg A \leftrightarrow (A \vee A)$

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$A \vee A$	$\neg\neg A \leftrightarrow (A \vee A)$
V	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**

Tautologia

(b) $B \vee \neg(B \wedge C)$

B	C	$B \wedge C$	$\neg(B \wedge C)$	$B \vee \neg(B \wedge C)$
V	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**

Tautologia

(c) $(A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**

Contradição

(d) $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg B$	$\neg A$	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

Tautologia

(e) $\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$

B	F	$\neg F$	$\neg B$	$F \vee B$	$\neg(F \vee B)$	$\neg F \vee \neg B$	$\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**

Contingência

(f) $\neg(B \to B) \lor (A \land \neg A)$

A	B	$\neg A$	$B \to B$	$\neg(B \to B)$	$A \land \neg A$	$\neg(B \to B) \lor (A \land \neg A)$
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**

Contradição

(g) $\neg(\neg D \to G) \to (\neg G \lor \neg D)$

D	G	$\neg D$	$\neg G$	$\neg D \to G$	$\neg(\neg D \to G)$	$\neg G \lor \neg D$	$\neg(\neg D \to G) \to (\neg G \lor \neg D)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**

Tautologia

(h) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$

A	B	C	$B \to C$	$A \to B$	$A \to (B \to C)$	$(A \to B) \to C$	$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**

Contingência

Exercício 9.4, p. 151

(a) $A \lor B, \neg A \vDash B$

	►	P_1	P_2
A	B	$A \lor B$	$\neg A$
V	**V**	**V**	**F**
F	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

Conseqüência tautológica

Uma solução alternativa é fazer uma conjunção das premissas, colocá-la no antecedente de um condicional, com a conclusão como seu conseqüente; esta fórmula precisa ser uma tautologia.

	C	P_1	P_2	$\mathrm{P}_1 \land \mathrm{P}_2$	$(\mathrm{P}_1 \land \mathrm{P}_2) \to \mathrm{C}$
A	B	$A \lor B$	$\neg A$	$(A \lor B) \land \neg A$	$((A \lor B) \land \neg A) \to B$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**

(b) $A \leftrightarrow B, \neg A \vDash \neg B$

		P_1	P_2	►
A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$
V	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Conseqüência tautológica

(c) $\neg(A \land B) \vDash \neg B \land \neg A$

			P			►
A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \land \neg A$
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	**V**	$\mathbf{F}^*$
V	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	**F**	$\mathbf{F}^*$
F	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	**V**	**V**

Não é conseqüência tautológica

(d) $A \to B \vDash A \vee B$

		P	►
A	B	$A \to B$	$A \vee B$
V	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F***

Não é conseqüência tautológica

(e) $\neg A \to \neg B \vDash A \to B$

				P	►
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	$A \to B$
V	**V**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F***
F	**F**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Não é conseqüência tautológica

(f) $A, A \to C \vDash A \leftrightarrow C$

P_1		P_2	►
A	C	$A \to C$	$A \leftrightarrow C$
$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**V**

Conseqüência tautológica

(g) $B \to \neg C \vDash \neg(B \wedge C)$

			P		►
B	C	$\neg C$	$B \to C$	$B \wedge C$	$\neg(B \wedge C)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	**V**
V	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	**V**
F	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	**V**

Conseqüência tautológica

(h) $\neg(A \vee B), F \leftrightarrow A \vDash \neg F$

				P$_1$	P$_2$	►
A	B	F	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$F \leftrightarrow A$	$\neg F$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Conseqüência tautológica

(i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \vDash \neg D$

				P$_1$	P$_2$	►
A	B	D	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$D \leftrightarrow A$	$\neg D$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F***
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Não é uma conseqüência tautológica

(j) $A \vDash (A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)$

P					►
A	B	$B \wedge A$	$A \to (B \wedge A)$	$A \wedge B$	$(A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)$
$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**

Conseqüência tautológica

(k) $(B \wedge C) \rightarrow F, \neg B, \neg C \vDash \neg F$

				P_1	P_2	P_3	►
B	C	F	$B \wedge C$	$(B \wedge C) \rightarrow F$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg F$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\mathbf{F}^*$
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Não é conseqüência tautológica

(l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vDash A \leftrightarrow C$

			P_1	P_2	►
A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow C$
V	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Conseqüência tautológica

(m) $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \vDash A \to D$

					P_1		P_2	▶
A	B	C	D	$B \vee C$	$A \to (B \vee C)$	$B \wedge C$	$(B \wedge C) \to D$	$A \to D$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Conseqüência tautológica

(n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \to D \vDash A \to D$

						P_1		P_2	►
A	B	C	D	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(\neg A \vee B) \vee C)$	$B \vee C$	$(B \vee C) \to D$	$A \to D$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$	**V**

Conseqüência tautológica

(o) $(A \to B) \to A \vDash A$

►			P
A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$
V	**V**	**V**	$\boxed{\mathbf{V}}$
F	**V**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	$\boxed{\mathbf{V}}$
F	**F**	**V**	**F**

Conseqüência tautológica

Exercício 9.5, p. 151

(a) $A \to B$ e $\neg A \lor B$

A	B	$\downarrow$ $A \to B$	$\neg A$	$\downarrow$ $\neg A \lor B$	
V	**V**	**V**	**F**	**V**	✓
F	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**F**	**F**	**F**	✓
F	**F**	**V**	**V**	**V**	✓

Equivalência tautológica

(b) $A \land B$ e $\neg(\neg A \lor \neg B)$

A	B	$\downarrow$ $A \land B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$	$\downarrow$ $\neg(\neg A \lor \neg B)$	
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	✓
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	✓
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	✓
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	✓

Equivalência tautológica

(c) $A \to B$ e $B \to A$

A	B	$\downarrow$ $A \to B$	$\downarrow$ $B \to A$	
V	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**V**	**F**	×
V	**F**	**F**	**V**	×
F	**F**	**V**	**V**	✓

Não é equivalência tautológica

(d) $A \leftrightarrow B$ e $(A \to B) \land (B \to A)$

A	B	$\downarrow$ $A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$\downarrow$ $(A \to B) \land (B \to A)$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	✓
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	✓
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓

Equivalência tautológica

(e) $A \to (B \to C)$ e $(A \to B) \to C$

A	B	C	$B \to C$	$\downarrow$ $A \to (B \to C)$	$A \to B$	$\downarrow$ $(A \to B) \to C$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	✓
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	✓
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	×
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	✓
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	×

Não é equivalência tautológica

(f) $\neg\neg A$ e A

$\downarrow$ A	$\neg A$	$\downarrow$ $\neg\neg A$	
V	**F**	**V**	✓
F	**V**	**F**	✓

Equivalência tautológica

Exercício 9.6, p. 154

(a) $Pa \vee Qb, \neg Pa \vDash Qb$

	►	P$_1$	P$_2$	
Pa	Qb	$Pa \vee Qb$	$\neg Pa$	
V	**V**	**V**	**F**	
F	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**V**	**F**	
F	**F**	**F**	**V**	

Conseqüência lógica

(b) $(Pa \wedge Fc) \rightarrow \exists x Hx, \neg Pa, \neg\exists x Hx \vDash \neg Fc$

				P$_1$	P$_2$	P$_3$	►	
Pa	Fc	$\exists x Hx$	$Pa \wedge Fc$	$(Pa \wedge Fc) \rightarrow \exists x Hx$	$\neg Pa$	$\neg\exists x Hx$	$\neg Fc$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	×
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓

Não é conseqüência lógica

(c) $\neg(Rbc \wedge Gm), D \leftrightarrow Rbc \vDash \neg Gm$

				P$_1$	P$_2$	►	
Rbc	Gm	D	$Rbc \wedge Gm$	$\neg(Rbc \wedge Gm)$	$D \leftrightarrow Rbc$	$\neg Gm$	
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	×
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	✓

Não é conseqüência lógica

(d) $\forall xAx \leftrightarrow \forall xBx, \forall xBx \leftrightarrow \exists xHx \vDash \forall xAx \exists xHx$

			P_1	P_2	▶	
$\forall xAx$	$\forall xBx$	$\exists xHx$	$\forall xAx \leftrightarrow \forall xBx$	$\forall xBx \leftrightarrow \exists xHx$	$\forall xAx \to \exists xHx$	
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	✓

Conseqüência lógica

(e) $(\neg A \vee Qb) \vee \forall x\exists yRxy, (Qb \vee \forall x\exists yRxy) \to Lab \vDash A \to Lab$

						P_1		P_2	▶	
A	Qb	$\forall x\exists yRxy$	Lab	$\neg A$	$\neg A \vee Qb$	$(\neg A \vee Qb) \vee \forall x\exists yRxy$	$Qb \vee \forall x\exists yRxy$	$(Qb \vee \forall x\exists yRxy) \to Lab$	$A \to Lab$	
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	✓
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	✓
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	✓

Conseqüência lógica

Esquemas tautológicos, p. 146

(a) Princípio de identidade: $\alpha \to \alpha$

α	$\alpha \to \alpha$
V	V
F	V

(b) Princípio da não-contradição: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
V	F	F	V
F	V	F	V

(c) Princípio do terceiro excluído: $\alpha \vee \neg\alpha$

α	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \neg\alpha$
V	F	V
F	V	V

(d) Dupla negação: $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$

α	$\neg\alpha$	$\neg\neg\alpha$	$\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
V	F	V	V
F	V	F	V

(e) Idempotência da disjunção: $(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$

α	$\alpha \vee \alpha$	$(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$
V	V	V
F	F	V

(f) Idempotência da conjunção: $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$

α	$\alpha \wedge \alpha$	$(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$
V	V	V
F	F	V

(g) Comutatividade da disjunção: $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\beta \vee \alpha$	$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	F	F	F	V

(h) Comutatividade da conjunção: $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\beta \wedge \alpha$	$(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$
V	V	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	F	F	F	V

(i) Comutatividade da equivalência: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\beta \leftrightarrow \alpha$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$
V	V	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	V	V

(j) Associatividade da disjunção: $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$

α	β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$\alpha \vee \beta$	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

(k) Associatividade da conjunção: $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$

α	β	γ	$\beta \wedge \gamma$	$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

(l) Associatividade da equivalência: $(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$

α	β	γ	$\beta \leftrightarrow \gamma$	$\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$	$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V

(m) Leis de Morgan:

- $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(n) Contraposição: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

(o) Distributividade:

- $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$

α	β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

- $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$

α	β	γ	$\beta \wedge \gamma$	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \vee \gamma$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

(p) Modus ponens: $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$	$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	F	V

(q) Modus tollens: $(\neg\beta \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \neg\alpha$

α	β	$\neg\beta$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)$	$\neg\alpha$	$(\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$
V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

(r) Silogismo disjuntivo: $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha$	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha$	$((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

(s) Silogismo hipotético: $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \gamma$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)$	$\alpha \to \gamma$	$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(t) Lei de Peirce: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

α	β	$\alpha \to \beta$	$(\alpha \to \beta) \to \alpha$	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	F	V	F	V

(u) Lei de Duns Scot: $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

α	β	$\neg\alpha$	$(\alpha \to \beta)$	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
V	V	F	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	F	V	V	V

(v) Prefixação: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

α	β	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
V	V	V	V
F	V	F	V
V	F	V	V
F	F	V	V

(w) Antilogismo: $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	$\neg\gamma$	$\alpha \wedge \neg\gamma$	$\neg\beta$	$(\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta$	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$
V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	V	V

(x) Exportação/Importação: $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \to (\beta \to \gamma))$

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \to (\beta \to \gamma))$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Exercício 10.1, p. 164

(a) $\mathfrak{C} = \langle C, I_{\mathfrak{C}} \rangle$

$C = \{$Aracaju, Belém, Belo Horizonte, Boa Vista, Brasília, Campo Grande, Cuiabá, Curitiba, Florianópolis, Fortaleza, Goiânia, João Pessoa, Macapá, Maceió, Manaus, Natal, Palmas, Porto Alegre, Porto Velho, Recife, Rio Branco, Rio de Janeiro, Salvador, São Luís, São Paulo, Teresina, Vitória$\}$

$I_{\mathfrak{C}}(a) =$ Curitiba

$I_{\mathfrak{C}}(b) =$ Belo Horizonte

$I_{\mathfrak{C}}(c) =$ São Paulo

$I_{\mathfrak{C}}(d) =$ Porto Alegre

$I_{\mathfrak{C}}(R) = \{$Porto Alegre, Florianópolis, Curitiba$\}$ (R: x fica na região sul)

$I_{\mathfrak{C}}(M) = \{$São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Vitória$\}$ (M: x fica na região sudeste)

$I_{\mathfrak{C}}(C) = \{$Campo Grande, Goiânica, Brasília, Cuiabá$\}$ (C: x fica na região centro-oeste)

$I_{\mathfrak{C}}(H) = \{$Florianópolis, Rio de Janeiro, Vitória, Salvador, Aracaju, Maceió, Recife, João Pessoa, Natal, Fortaleza, São Luís$\}$ (H: x é litorânea)

$I_{\mathfrak{C}}(G) = \{\langle$Aracaju, Maceió$\rangle$, $\langle$Maceió, Aracaju$\rangle$, $\langle$Brasília, Goiânia$\rangle$, $\langle$Goiânia, Brasília$\rangle$, $\langle$Curitiba, Florianópolis$\rangle$, $\langle$Florianópolis, Curitiba$\rangle$, $\langle$João Pessoa, Natal$\rangle$, $\langle$Natal, João Pessoa$\rangle$, $\langle$João Pessoa, Recife$\rangle$, $\langle$Recife, João Pessoa$\rangle$, $\langle$Maceió, Recife$\rangle$, $\langle$Recife, Maceió$\rangle$, $\langle$Natal, Recife$\rangle$, $\langle$Recife, Natal$\rangle\}$ (G: x fica no máximo a 300 Km de distância de y)

(b) $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, I_{\mathfrak{N}} \rangle$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$I_{\mathfrak{N}}(a) = 0$

$I_{\mathfrak{N}}(b) = 1$

$I_{\mathfrak{N}}(c) = 2$

$I_{\mathfrak{N}}(d) = 3$

$I_{\mathfrak{N}}(R) = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (R: x é par)

$I_{\mathfrak{N}}(M) = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ (M: x é ímpar)

$I_{\mathfrak{N}}(C) = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ (C: x é primo)

$I_{\mathfrak{N}}(H) = \mathbb{N}$ (H: x é inteiro)

$I_{\mathfrak{N}}(G) = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \ldots\}$ (G: x é imediatamente maior do que y)

Exercício 10.3, p. 167

(a) Ra

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(a) \in I_{\mathfrak{A}}(R)\\ I_{\mathfrak{A}}(a) = \text{Ana Maria}\\ I_{\mathfrak{A}}(R) = \{\text{Sebastian}, \text{Felipe}, \text{Conrado}, \text{Fernando}\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{F}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(a) \in I_{\mathfrak{B}}(R)\\ I_{\mathfrak{B}}(a) = 1\\ I_{\mathfrak{B}}(R) = \{1, 2\}\end{array}}{\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{V}}$$

(b) Rc

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Rc) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(c) \in I_{\mathfrak{A}}(R)\\ I_{\mathfrak{A}}(c) = \text{Sebastian}\\ I_{\mathfrak{A}}(R) = \{\text{Sebastian}, \text{Felipe}, \text{Conrado}, \text{Fernando}\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Rc) = \mathbf{V}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{B}(Rc) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(c) \in I_{\mathfrak{B}}(R)\\ I_{\mathfrak{B}}(c) = 3\\ I_{\mathfrak{B}}(R) = \{1, 2\}\end{array}}{\mathfrak{B}(Rc) = \mathbf{F}}$$

(c) Mb

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(b) \in I_{\mathfrak{A}}(M)\\ I_{\mathfrak{A}}(b) = \text{Juliana}\\ I_{\mathfrak{A}}(M) = \{\text{Veronika}, \text{Dorothee}, \text{Leila}, \text{Mariana}, \text{Gabriela}, \text{Elisa}, \text{Juliana}, \text{Ana Maria}\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}.}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(b) \in I_{\mathfrak{B}}(M)\\ I_{\mathfrak{B}}(b) = 2\\ I_{\mathfrak{B}}(M) = \{2, 3\}\end{array}}{\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}}$$

(d) Hc

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Hc) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(c) \in I_{\mathfrak{A}}(H)\\ I_{\mathfrak{A}}(c) = \text{Sebastian}\\ I_{\mathfrak{A}}(H) = \{\text{Sebastian}, \text{Veronika}, \text{Dorothee}\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Hc) = \mathbf{V}}$$

$$\frac{\mathfrak{B}(Hc) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(c) \in I_{\mathfrak{B}}(H) \quad I_{\mathfrak{B}}(c) = 3 \quad I_{\mathfrak{B}}(H) = \{1, 2, 3\}}{\mathfrak{B}(Hc) = \mathbf{V}}$$

(e) Cb

$$\frac{\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(b) \in I_{\mathfrak{A}}(C) \quad I_{\mathfrak{A}}(b) = \text{Juliana} \quad I_{\mathfrak{A}}(C) = \{\text{Mariana}, \text{Leila}, \text{Gabriela}\}}{\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{F}}$$

$$\frac{\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(b) \in I_{\mathfrak{B}}(C) \quad I_{\mathfrak{B}}(b) = 2 \quad I_{\mathfrak{B}}(C) = \emptyset}{\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{F}}$$

(f) Rd

$$\frac{\mathfrak{A}(Rd) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(d) \in I_{\mathfrak{A}}(R) \quad I_{\mathfrak{A}}(d) = \text{Felipe} \quad I_{\mathfrak{A}}(R) = \{\text{Sebastian}, \text{Felipe}, \text{Conrado}, \text{Fernando}\}}{\mathfrak{A}(Rd) = \mathbf{V}}$$

$$\frac{\mathfrak{B}(Rd) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(d) \in I_{\mathfrak{B}}(R) \quad I_{\mathfrak{B}}(d) = 2 \quad I_{\mathfrak{B}}(R) = \{1, 2\}}{\mathfrak{B}(Rd) = \mathbf{V}}$$

(g) Gab

$$\frac{\mathfrak{A}(Gab) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{A}}(a), I_{\mathfrak{A}}(b)\rangle \in I_{\mathfrak{A}}(G) \quad I_{\mathfrak{A}}(a) = \text{Ana Maria} \quad I_{\mathfrak{A}}(b) = \text{Juliana} \quad I_{\mathfrak{A}}(G) = \{\langle \text{Elisa}, \text{Juliana}\rangle, \langle \text{Felipe}, \text{Conrado}\rangle, \langle \text{Leila}, \text{Gabriela}\rangle, \langle \text{Dorothee}, \text{Veronika}\rangle\}}{\mathfrak{A}(Gab) = \mathbf{F}}$$

$$\frac{\mathfrak{B}(Gab) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{B}}(a), I_{\mathfrak{B}}(b)\rangle \in I_{\mathfrak{B}}(G) \quad I_{\mathfrak{B}}(a) = 1 \quad I_{\mathfrak{B}}(b) = 2 \quad I_{\mathfrak{B}}(G) = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}}{\mathfrak{B}(Gab) = \mathbf{F}}$$

(h) Gba

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Gba) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{A}}(b), I_{\mathfrak{A}}(a)\rangle \in I_{\mathfrak{A}}(G) \\ I_{\mathfrak{A}}(b) = \text{Juliana} \\ I_{\mathfrak{A}}(a) = \text{Ana Maria} \\ I_{\mathfrak{A}}(G) = \{\langle \text{Elisa}, \text{Juliana}\rangle, \langle \text{Felipe}, \text{Conrado}\rangle, \langle \text{Leila}, \text{Gabriela}\rangle, \langle \text{Dorothee}, \text{Veronika}\rangle\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Gba) = \mathbf{F}}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{B}(Gba) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{B}}(b), I_{\mathfrak{B}}(a)\rangle \in I_{\mathfrak{B}}(G) \\ I_{\mathfrak{B}}(b) = 2 \\ I_{\mathfrak{B}}(a) = 1 \\ I_{\mathfrak{B}}(G) = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}\end{array}}{\mathfrak{B}(Gba) = \mathbf{V}}$$

(i) Gcc

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Gcc) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{A}}(c), I_{\mathfrak{A}}(c)\rangle \in I_{\mathfrak{A}}(G) \\ I_{\mathfrak{A}}(c) = \text{Sebastian} \\ I_{\mathfrak{A}}(G) = \{\langle \text{Elisa}, \text{Juliana}\rangle, \langle \text{Felipe}, \text{Conrado}\rangle, \langle \text{Leila}, \text{Gabriela}\rangle, \langle \text{Dorothee}, \text{Veronika}\rangle\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Gcc) = \mathbf{F}}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathfrak{B}(Gcc) = \mathbf{V} \text{ sse } \langle I_{\mathfrak{B}}(c), I_{\mathfrak{B}}(c)\rangle \in I_{\mathfrak{B}}(G) \\ I_{\mathfrak{B}}(c) = 3 \\ I_{\mathfrak{B}}(G) = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}\end{array}}{\mathfrak{B}(Gcc) = \mathbf{V}}$$

Exercício 10.4, p. 168

(a) $\neg Ra$

1	$\mathfrak{A}(\neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(a)
3	$\mathfrak{A}(\neg Ra) = \mathbf{V}$	$1, 2$

1	$\mathfrak{B}(\neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(a)
3	$\mathfrak{B}(\neg Ra) = \mathbf{F}$	$1, 2$

(b) $Rc \wedge Mb$

1	$\mathfrak{A}(Rc \wedge Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Rc) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(e)
2	$\mathfrak{A}(Rc) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(b)
3	$\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
4	$\mathfrak{A}(Rc \wedge Mb) = \mathbf{V}$	$1, 2, 3$

1	$\mathfrak{B}(Rc \wedge Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Rc) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(e)
2	$\mathfrak{B}(Rc) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(b)
3	$\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
4	$\mathfrak{B}(Rc \wedge Mb) = \mathbf{F}$	$1, 2, 3$

(c) $\neg\neg Mb$

1	$\mathfrak{A}(\neg\neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{F}$ sse $\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(c)
3	$\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
4	$\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	$2, 3$
5	$\mathfrak{A}(\neg\neg Mb) = \mathbf{V}$	$1, 4$

1	$\mathfrak{B}(\neg\neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{F}$ sse $\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(c)
3	$\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
4	$\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	$2, 3$
5	$\mathfrak{B}(\neg\neg Mb) = \mathbf{V}$	$1, 4$

(d) $Ca \to (Cb \vee \neg Ra)$

($\mathfrak{A}(Ca)$ não foi calculado no exercício 10.3, nem no texto.)

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(Ca) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{A}}(a) \in I_{\mathfrak{A}}(C)\\ I_{\mathfrak{A}}(a) = \text{Ana Maria}\\ I_{\mathfrak{A}}(C) = \{\text{Mariana}, \text{Leila}, \text{Gabriela}\}\end{array}}{\mathfrak{A}(Ca) = \mathbf{F}}$$

1	$\mathfrak{A}(Ca \to (Cb \vee \neg Ra)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Ca) = \mathbf{F}$ ou $\mathfrak{A}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{V}$	def. 10.2(f)
2	$\mathfrak{A}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{V}$ ou $\mathfrak{A}(\neg Ra) = \mathbf{V}$	def. 10.2(d)
3	$\mathfrak{A}(\neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
4	$\mathfrak{A}(Ca) = \mathbf{F}$	acima
5	$\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(e)
6	$\mathfrak{A}(Ra) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(a)
7	$\mathfrak{A}(\neg Ra) = \mathbf{V}$	$3, 6$
8	$\mathfrak{A}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{V}$	$2, 5, 7$
9	$\mathfrak{A}(Ca \to (Cb \vee \neg Ra)) = \mathbf{V}$	$1, 4, 8$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{B}(Ca) = \mathbf{V} \text{ sse } I_{\mathfrak{B}}(a) \in I_{\mathfrak{B}}(C) \\ I_{\mathfrak{B}}(a) = 1 \\ I_{\mathfrak{B}}(C) = \emptyset \\ \hline \mathfrak{B}(Ca) = \mathbf{F} \end{array}$$

1	$\mathfrak{B}(Ca \to (Cb \vee \neg Ra)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Ca) = \mathbf{F}$ ou $\mathfrak{B}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{V}$	def. 10.2(f)
2	$\mathfrak{B}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{V}$ ou $\mathfrak{B}(\neg Ra) = \mathbf{V}$	def. 10.2(d)
3	$\mathfrak{B}(\neg Ra) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
4	$\mathfrak{B}(Ca) = \mathbf{F}$	acima
5	$\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(e)
6	$\mathfrak{B}(Ra) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(a)
7	$\mathfrak{B}(\neg Ra) = \mathbf{F}$	$3, 6$
8	$\mathfrak{B}(Cb \vee \neg Ra) = \mathbf{F}$	$2, 5, 7$
9	$\mathfrak{B}(Ca \to (Cb \vee \neg Ra)) = \mathbf{V}$	$1, 4, 8$

(e) $(Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)$

1	$\mathfrak{A}((Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Cb \wedge Hc) = \mathfrak{A}(\neg Hc \vee \neg Mb)$	def. 10.2(g)
2	$\mathfrak{A}(Cb \wedge Hc) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{A}(Hc) = \mathbf{V}$	def. 10.2(e)
3	$\mathfrak{A}(\neg Hc \vee \neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(\neg Hc) = \mathbf{V}$ ou $\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(d)
4	$\mathfrak{A}(\neg Hc) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Hc) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
5	$\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
6	$\mathfrak{A}(Cb) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(e)
7	$\mathfrak{A}(Hc) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(d)
8	$\mathfrak{A}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
9	$\mathfrak{A}(Cb \wedge Hc) = \mathbf{F}$	$2, 6, 7$
10	$\mathfrak{A}(\neg Hc) = \mathbf{F}$	$4, 7$
11	$\mathfrak{A}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	$5, 8$
12	$\mathfrak{A}(\neg Hc \vee \neg Mb) = \mathbf{F}$	$3, 10, 11$
13	$\mathfrak{A}((Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)) = \mathbf{V}$	$1, 9, 12$

1	$\mathfrak{B}((Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Cb \wedge Hc) = \mathfrak{B}(\neg Hc \vee \neg Mb)$	def. 10.2(g)
2	$\mathfrak{B}(Cb \wedge Hc) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{B}(Hc) = \mathbf{V}$	def. 10.2(e)
3	$\mathfrak{B}(\neg Hc \vee \neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(\neg Hc) = \mathbf{V}$ ou $\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{V}$	def. 10.2(d)
4	$\mathfrak{B}(\neg Hc) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Hc) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
5	$\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
6	$\mathfrak{B}(Cb) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(e)
7	$\mathfrak{B}(Hc) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(d)
8	$\mathfrak{B}(Mb) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(c)
9	$\mathfrak{B}(Cb \wedge Hc) = \mathbf{F}$	$2, 6, 7$
10	$\mathfrak{B}(\neg Hc) = \mathbf{F}$	$4, 7$
11	$\mathfrak{B}(\neg Mb) = \mathbf{F}$	$5, 8$
12	$\mathfrak{B}(\neg Hc \vee \neg Mb) = \mathbf{F}$	$3, 10, 11$
13	$\mathfrak{B}((Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)) = \mathbf{V}$	$1, 9, 12$

(f) $\neg(Gcc \rightarrow Gab)$

1	$\mathfrak{A}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{A}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{A}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{F}$ sse $\mathfrak{A}(Gcc) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{A}(Gab) = \mathbf{F}$	def. 10.2(f)
3	$\mathfrak{A}(Gcc) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(i)
4	$\mathfrak{A}(Gab) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(h)
5	$\mathfrak{A}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{V}$	$2, 3, 4$
6	$\mathfrak{A}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = \mathbf{F}$	$1, 5$

1	$\mathfrak{B}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = \mathbf{V}$ sse $\mathfrak{B}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{F}$	def. 10.2(c)
2	$\mathfrak{B}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{F}$ sse $\mathfrak{B}(Gcc) = \mathbf{V}$ e $\mathfrak{B}(Gab) = \mathbf{F}$	def. 10.2(f)
3	$\mathfrak{B}(Gcc) = \mathbf{V}$	exerc. 10.3(i)
4	$\mathfrak{B}(Gab) = \mathbf{F}$	exerc. 10.3(h)
5	$\mathfrak{B}(Gcc \rightarrow Gab) = \mathbf{F}$	$2, 3, 4$
6	$\mathfrak{B}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = \mathbf{V}$	$1, 5$

Exercício 10.5, p. 178

(a) Rxc

$\forall x Rxc$

(b) $Rzw \to Rby$

$\forall z \forall w \forall y (Rzw \to Rby)$

$\forall z \forall w Rzw \to \forall y Rby$

(c) $\neg Rxz \lor \forall u Qu$

$\forall x \forall z (\neg Rxz \lor \forall u Qu)$

$\forall x \forall z \neg Rxz \lor \forall u Qu$

(d) $\exists y (Qy \to Lyz)$

$\forall z \exists y (Qy \to Lyz)$

(Aqui não dava para fazer $\exists y (Qy \to \forall z Lyz)$, porque o escopo do universal ficaria mais estreito do que o existencial.)

(e) $(Rxy \land Ryz) \to Rxz$

$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \to Rxz)$

$\forall x \forall z (\forall y (Rxy \land Ryz) \to Rxz)$

(f) $B \lor (Hbx \leftrightarrow Hyx)$

$\forall x \forall y (B \lor (Hbx \leftrightarrow Hyx))$

$B \lor \forall x \forall y (Hbx \leftrightarrow Hyx)$

Exercício 11.1, p. 185

(a) $\forall x Px \to Pa$

Para tentar mostrar que $\forall x Px \to Pa$ é válida, demonstrando que não há uma estrutura que a torne falsa, precisamos supor uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}(\forall x Px \to Pa) = F$, de forma a encontrar alguma contradição (o que mostraria que $\forall x Px \to Pa$ não tem como ser falsa).

Mas para que $\mathfrak{A}(\forall x Px \to Pa) = F$, é preciso que $\mathfrak{A}(\forall x Px) = V$ e $\mathfrak{A}(Pa) = F$ (um condicional falso tem o antecendente verdadeiro e o conseqüente falso).

Como $\mathfrak{A}(\forall x Px) = V$ (todos os indivíduos do domínio são P), e como a é o nome de um dos indivíduos do domínio, então $\mathfrak{A}(Pa) = V$.

Portanto, chegamos a duas atribuições contraditórias: $\mathfrak{A}(Pa) = F$ e $\mathfrak{A}(Pa) = V$. Assim, não há nenhuma estrutura que torne $\forall x Px \to Pa$ falso, o que mostra que ela é válida.

(b) $Pa \to \exists x Px$

Para que $\mathfrak{A}(Pa \to \exists x Px) = F$, seria preciso que $\mathfrak{A}(Pa) = V$ e $\mathfrak{A}(\exists x Px) = F$.

Para que $\mathfrak{A}(\exists x Px) = F$, seria preciso que, para todo parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = F$; assim, em particular, já que a é um parâmetro, seria preciso que $\mathfrak{A}(Pa) = F$.

Portanto, chegamos a duas atribuições contraditórias: $\mathfrak{A}(Pa) = V$ e $\mathfrak{A}(Pa) = F$, o que mostra que $Pa \to \exists x Px$ não tem como ser falso e é então válido.

(c) $\forall x(Px \to Px)$

Se $\mathfrak{A}(\forall x(Px \to Px)) = F$, então, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{A}(P\mathbf{i} \to P\mathbf{i}) = F$; disso decorre que $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = V$ e $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = F$ (porque um condicional falso tem antecedente verdadeiro e conseqüente falso). Temos, portanto, a contradição que precisávamos para mostrar que $\forall x(Px \to Px)$ não pode ser falso: só pode ser válido.

(d) $\neg\exists x(Px \land \neg Px)$

Vamos supor que $\mathfrak{A}(\neg\exists x(Px \land \neg Px)) = F$. Então $\mathfrak{A}(\exists x(Px \land \neg Px)) = V$ (pois a negação inverte o valor de verdade). Assim, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{A}(P\mathbf{i} \land \neg P\mathbf{i}) = V$ (pela regra da quantificação existencial); e, daí, $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = V$ e $\mathfrak{A}(\neg P\mathbf{i}) = V$ (pela regra da conjunção). Mas se $\mathfrak{A}(\neg P\mathbf{i}) = V$, então $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = F$ (novamente pela regra da negação). Chegando a esta contradição ($\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = V$ e $\mathfrak{A}(P\mathbf{i}) = F$), mostramos que $\neg\exists x(Px \land \neg Px)$ é válida.

(e) $\forall x\neg(Px \land \neg Px)$

Para que $\mathfrak{A}(\forall x\neg(Px \land \neg Px)) = F$, é preciso que, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{A}(\neg(P\mathbf{i} \land \neg P\mathbf{i})) = F$ (pela regra da quantificação universal); supondo que a seja esse parâmetro, $\mathfrak{A}(\neg(Pa \land \neg Pa)) = F$. Assim, $\mathfrak{A}(Pa \land \neg Pa) = V$ (pela regra da negação); e, pela regra da conjunção, $\mathfrak{A}(Pa) = V$ e $\mathfrak{A}(\neg Pa) = V$. Finalmente, pela regra da negação, $\mathfrak{A}(Pa) = F$; e chegamos à contradição que mostrar que $\forall x\neg(Px \land \neg Px)$ é válida.

(f) $\forall x(\neg Px \lor Px)$

Se considerarmos $\mathfrak{A}(\forall x(\neg Px \lor Px)) = F$, é preciso que $\mathfrak{A}(\neg P\mathbf{i} \lor P\mathbf{i})) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$. Supondo que a seja esse parâmetro, temos que $\mathfrak{A}(\neg Pa \lor Pa) =$

F; pela regra da disjunção, chegamos a $\mathfrak{A}(\neg Pa) = F$ e $\mathfrak{A}(Pa) = F$. Finalmente, pela regra da negação, chegamos a $\mathfrak{A}(Pa) = V$ e encontramos a contradição que precisávamos para mostrar que $\forall x(\neg Px \vee Px)$ é válida.

(g) $\forall x(Ax \to Bx) \to (\forall xAx \to \forall xBx)$

$$\mathfrak{A}(\forall x(Ax \to Bx) \to (\forall xAx \to \forall xBx)) = F$$

$\mathfrak{A}(\forall x(Ax \to Bx)) = V$

$\mathfrak{A}(A\mathbf{i} \to B\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$

$\mathfrak{A}(Aa \to Ba) = V$, para o parâmetro a

$\mathfrak{A}(\forall xAx \to \forall xBx) = F$

$\mathfrak{A}(\forall xAx) = V$

$\mathfrak{A}(A\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$

$\mathfrak{A}(Aa) = V$, para o parâmetro a

$\mathfrak{A}(\forall xBx) = F$

$\mathfrak{A}(B\mathbf{i}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$

$\mathfrak{A}(Ba) = F$, supondo o parâmetro a (antes das universais)

De $\mathfrak{A}(Aa \to Ba) = V$ e $\mathfrak{A}(Aa) = V$, por *modus ponens*, podemos inferir que $\mathfrak{A}(Ba) = V$, o que nos faz chegar à contradição. (Outra alternativa seria dizer que, quando $\mathfrak{A}(Aa) = V$ e $\mathfrak{A}(Ba) = F$, temos $\mathfrak{A}(Aa \to Ba) = F$, o que nos faria chegar a outra contradição.)

(h) $(\forall xAx \vee \forall xBx) \to \forall x(Ax \vee Bx)$

$$\mathfrak{A}((\forall xAx \vee \forall xBx) \to \forall x(Ax \vee Bx)) = F$$

$\mathfrak{A}(\forall xAx \vee \forall xBx) = V$

$\mathfrak{A}(\forall x(Ax \vee Bx)) = F$

$\mathfrak{A}(A\mathbf{i} \vee B\mathbf{i}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$

$\mathfrak{A}(Aa \vee Ba) = F$, supondo o parâmetro a

$\mathfrak{A}(Aa) = F$ — $\mathfrak{A}(\forall xAx) = F$

$\mathfrak{A}(Ba) = F$ — $\mathfrak{A}(\forall xBx) = F$

Se $\mathfrak{A}(\forall xAx) = F$ e $\mathfrak{A}(\forall xBx) = F$, então $\mathfrak{A}(\forall xAx \vee \forall xBx) = F$ (pela regra da disjunção), e esta é a contradição que estávamos buscando para provar a validade de $(\forall xAx \vee \forall xBx) \to \forall x(Ax \vee Bx)$.

(i) $\exists x(Ax \wedge Bx) \to (\exists xAx \wedge \exists xBx)$

$$\mathfrak{A}(\exists x(Ax \wedge Bx) \to (\exists xAx \wedge \exists xBx)) = F$$

$$\mathfrak{A}(\exists x(Ax \wedge Bx)) = V \qquad \mathfrak{A}(\exists xAx \wedge \exists xBx) = F$$

$$\mathfrak{A}(A\mathbf{i} \wedge B\mathbf{i}) = V,$$
para algum parâmetro **i**

$$\mathfrak{A}(Aa \wedge Ba) = V,$$
supondo o parâmetro a

$$\mathfrak{A}(Aa) = V \qquad \mathfrak{A}(Ba) = V$$

$$\mathfrak{A}(\exists xAx) = V \qquad \mathfrak{A}(\exists xBx) = V$$

Se $\mathfrak{A}(\exists xAx) = V$ e $\mathfrak{A}(\exists xBx) = V$, então $\mathfrak{A}(\exists xAx \wedge \exists xBx) = V$ (pela regra da conjunção). E isso contradiz o outro achado de que $\mathfrak{A}(\exists xAx \wedge \exists xBx) = F$.

(j) $\exists x\forall yRxy \to \forall y\exists xRxy$

$$\mathfrak{A}(\exists x\forall yRxy \to \forall y\exists xRxy) = F$$

$$\mathfrak{A}(\exists x\forall yRxy) = V \qquad \mathfrak{A}(\forall y\exists xRxy) = F$$

$$\mathfrak{A}(\forall yR\mathbf{i}y) = V,$$
para algum parâmetro **i**

$$\mathfrak{A}(\forall yRay) = V,$$
supondo o parâmetro a

$$\mathfrak{A}(Ra\mathbf{l}) = V,$$
para todo parâmetro **l**

$$\mathfrak{A}(Rab) = V,$$
para o parâmetro b

$$\mathfrak{A}(\exists xRx\mathbf{j}) = F,$$
para algum parâmetro **j**
(possivelmente diferente de **i**)

$$\mathfrak{A}(\exists xRxb) = F,$$
supondo o parâmetro b

$$\mathfrak{A}(R\mathbf{k}b) = F,$$
para todo parâmetro **k**

$$\mathfrak{A}(Rab) = F,$$
para o parâmetro a

Temos, então, a contradição que demonstra a validade de $\exists x\forall yRxy \to \forall y\exists xRxy$.

Exercício 11.2, p. 185

(a) $Pa \to \forall xPx$

Imaginemos uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I_A \rangle$, de forma que $A = \{0, 1\}$ e $I_A(a) = 0$, $I_A(b) = 1$ e $I_A(P) = \{0\}$. Nesta estrutura, $\mathfrak{A}(Pa) = V$ (porque $I(a) \in I(P)$) e $\mathfrak{A}(\forall xPx) = F$ (porque $I(b) \in A$, mas $I(b) \notin I(P)$). Portanto, $\mathfrak{A}(Pa \to \forall xPx) = F$ (pois esse é um condicional cujo antecendente é verdadeiro e o conseqüente falso).

(b) $\exists xPx \to Pa$

Suponhamos agora uma estrutura $\mathfrak{B} = \langle B, I_B \rangle$, tal que $B = \{Sol, Lua\}$ e $I_B(a) = Sol$, $I_B(b) = Lua$ e $I_B(P) = \{Lua\}$. Aqui $\mathfrak{B}(\exists xPx) = V$ (pois $I_B(b) \in I_B(P)$) e $\mathfrak{B}(Pa) = F$ (já que $I_B(a) \notin I_B(P)$). Consequentemente, $\mathfrak{B}(\exists xPx \to Pa) = F$ (de novo, condicional com antecendente verdadeiro e conseqüente falso).

(c) $(\exists xPx \wedge \exists xQx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$

Para esta solução, a estrutura será $\mathfrak{C} = \langle C, I_C \rangle$, com $I_C(a) = Austria$, $I_C(b) = Brasil$, $I_C(P) = \{Austria\}$ e $I_C(Q) = \{Brasil\}$. Desta forma, $\mathfrak{C}(\exists xPx) = V$ (pois $I_C(a) \in I_C(P)$) e $\mathfrak{C}(\exists xQx) = V$ (pois $I_C(b) \in I_C(Q)$); portanto, $\mathfrak{C}(\exists xPx \wedge \exists xQx) = V$ (porque ambas as sentenças da conjunção são verdadeiras). Já $\mathfrak{C}(\exists x(Px \wedge Qx)) = F$, porque seria preciso que, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{C}(P\mathbf{i} \wedge Q\mathbf{i}) = V$; como $\mathfrak{C}(Pa) = V$ mas $\mathfrak{C}(Pb) = F$, e como $\mathfrak{C}(Qa) = F$ mas $\mathfrak{C}(Qb) = V$, não existe um tal parâmetro $\mathbf{i}$ que torne $\mathfrak{C}(P\mathbf{i} \wedge Q\mathbf{i}) = V$. Finalmente, então, $\mathfrak{C}((\exists xPx \wedge \exists xQx) \to \exists x(Px \wedge Qx)) = F$.

(d) $\forall x(Ax \vee Bx) \to (\forall xAx \vee \forall xBx)$

De volta aos números, façamos $\mathfrak{D} = \langle D, I_D \rangle$, para $D = \{0, 1\}$, $I_D(a) = 0$, $I_D(b) = 1$, $I_D(A) = \{0\}$ e $I_D(B) = \{1\}$. Para que $\mathfrak{D}(\forall x(Ax \vee Bx)) = V$, é preciso que $\mathfrak{D}(A\mathbf{i} \vee B\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$; como $\mathfrak{D}(Aa) = V$ (pois $I_D(a) \in I_D(A)$, o que faz $\mathfrak{D}(Aa \vee Ba) = V$), e $\mathfrak{D}(Bb) = V$ (pois $I_D(b) \in I_D(B)$, o que também faz $\mathfrak{D}(Aa \vee Ba) = V$), confirmamos $\mathfrak{D}(\forall x(Ax \vee Bx)) = V$. Mas como $\mathfrak{D}(\forall xAx) = F$ (pois $I_D(b) \notin I_D(A)$) e $\mathfrak{D}(\forall xBx) = F$ (pois $I_D(a) \notin I_D(B)$), $\mathfrak{D}(\forall xAx \vee \forall xBx) = F$. Assim, finalmente, $\mathfrak{D}(\forall x(Ax \vee Bx) \to (\forall xAx \vee \forall xBx)) = F$.

(e) $\forall x\exists yRxy \to \exists y\forall xRxy$

Suponhamos a estrutura $\mathfrak{E} = \langle E, I_E \rangle$, de forma que $D = \{0, 1\}$, e $I_E(a) = 0$, $I_E(b) = 1$ e $I_E(L) = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$.

Nesta estrutura, $\mathfrak{E}(\forall x\exists yRxy) = V$; pois, para cada parâmetro $\mathbf{i}$ ($I_E(\mathbf{i}) \in E$), $\mathfrak{E}(\exists yP\mathbf{i}y) = V$ — ou seja, para pelo menos um $\mathbf{j} \in E$, $\mathfrak{E}(P\mathbf{ij}) = V$ (temos apenas dois indivíduos, 0 e 1; de forma que para o indivíduo 0 temos $\mathfrak{E}(Paa) = V$ (pois $\langle I_E(a), I_E(a) \rangle \in I_E(L)$), e para o indivíduo 1 temos $\mathfrak{E}(Pbb) = V$ (pois $\langle I_E(b), I_E(b) \rangle \in I_E(L)$).

No entanto, $\mathfrak{E}(\exists y\forall xRxy) = F$. Para que ele fosse verdadeiro, teria que haver algum parâmetro $\mathbf{i}$ para o qual $\mathfrak{E}(\forall xLxy) = V$; mas o fato é que não há na estrutura $\mathfrak{E}$ esse parâmetro de forma que $\langle I_E(a), I_E(\mathbf{i}\rangle \in I_E(L)$ e $\langle I_E(b), I_E(\mathbf{i}\rangle \in I_E(L)$.

(f) $(\forall xPx \to A) \to \forall x(Px \to A)$

Uma estrutura $\mathfrak{F}$, na qual $\mathfrak{F}((\forall xPx \to A) \to \forall x(Px \to A)) = F$, precisa que $\mathfrak{F}(\forall xPx \to A)) = V$ e $\mathfrak{F}(\forall x(Px \to A)) = F$.

Para esta última, é preciso que, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, $\mathfrak{F}(P\mathbf{i} \to A) = F$; portanto, é preciso que $\mathfrak{F}(P\mathbf{i}) = V$ e $\mathfrak{F}(A) = F$.

Para a outra fórmula, é preciso que $\mathfrak{F}(\forall x Px) = F$ ou $\mathfrak{F}(A) = V$; no primeiro caso, para algum parâmetro $\mathbf{j}$, é preciso que $\mathfrak{F}(P\mathbf{j}) = F$.

Assim, é necessário que $\mathfrak{F}(A) = F$ (porque, se fosse verdadeiro, o consequente do condicional principal seria falso, o que tornaria esse condicional automaticamente verdadeiro). Para o predicado P, é preciso que alguém seja P ($\mathfrak{F}(P\mathbf{i}) = V$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$), mas nem todos sejam P ($\mathfrak{F}(P\mathbf{j}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{j}$).

Portanto, a estrutura $\mathfrak{F} = \langle F, I_F \rangle$ tem que ser tal que $F = \{\spadesuit, \clubsuit\}$, $I_F(a) = \spadesuit$, $I_F(b) = \clubsuit$ e $I_F(P) = \{\spadesuit\}$ (ou, alternativamente, $I_F(P) = \{\spadesuit\}$).

Exercício 11.3, p. 188

(a) $\{Pa, \neg Rab, \neg Pb\}$

Com uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I_A \rangle$, definida de forma que $A = \{0, 1\}$, e $I_A(a) = 0$, $I_A(b) = 1$, $I_A(P) = \{0\}$ e $I_A(R) = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, $\mathfrak{A}$ é modelo para $\{Pa, \neg Rab, \neg Pb\}$, porque $\mathfrak{A}(Pa) = V$ (pois $I_A(a) \in I_A(P)$), $\mathfrak{A}(\neg Rab) = V$ (pois $\mathfrak{A}(Rab) = F$, já que $\langle I_A(a), I_A(b) \rangle \notin I_A(R)$) e $\mathfrak{A}(\neg Pb) = V$ (pois $\mathfrak{A}(Pb) = F$, já que $I_A(b) \notin I_A(P)$).

(b) $\{\exists x Qx, \exists x Px, \neg Pa \wedge \neg Qa\}$

Para encontrarmos a estrutura $\mathfrak{B}$ que seja modelo para $\{\exists x Qx, \exists x Px, \neg Pa \wedge \neg Qa\}$, precisamos que alguém seja Q ($\exists x Qx$), alguém seja P ($\exists x Px$), mas que esse alguém não seja a ($\neg Pa \wedge \neg Qa$).

Assim, a estrutura $\mathfrak{B} = \langle B, I_B \rangle$, precisa de pelo menos dois indivíduos $B = \{0, 1\}$, tal que um deles pertença a P e a Q ($I_B(Q) = \{1\}$ e $I_B(P) = \{1\}$); como o indivíduo cujo nome é a não pertence a esses conjuntos ($I_B(a) = 0$), podemos chamar o outro indivíduo de b ($I_B(b) = 1$).

(c) $\{\forall x(Ax \to Bx), Am, \neg Bp\}$

Para que $\mathfrak{C}(Am) = V$, é preciso que $I_C(m) \in I_C(A)$. Para que $\mathfrak{C}(\neg Bp) = V$, é preciso que $\mathfrak{C}(Bp) = F$; ou seja, $I_C(p) \notin I_C(B)$. Finalmente, para que $\mathfrak{C}(\forall x(Ax \to Bx)) = V$, é preciso que $I_C(A) \subseteq I_C(B)$.

Assim, a estrutura $\mathfrak{C} = \langle C, I_C \rangle$ que satisfaz essas condições precisa ser tal que $C = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, e $I_C(m) = \heartsuit$, $I_C(p) = \diamondsuit$, $I_C(A) = \{\heartsuit\}$ e $I_C(B) = \{\heartsuit\}$.

(d) $\{\forall x Px, \neg \exists x Qx\}$

A estrutura $\mathfrak{D} = \langle D, I_D \rangle$ precisa ser tal que todos sejam P ($\forall x Px$), mas ninguém seja Q ($\neg \exists x Qx$).

Assim, supondo $C = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, é preciso que $I_D(P) = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ e $I_D(Q) = \{\}$ (como não há constantes individuais nesta língua, não precisamos indicar a interpretação de a, $b \ldots$).

(e) $\{Pa, \exists x Px \to \forall x \forall y Lxy\}$

A estrutura $\mathfrak{E} = \langle E, I_E \rangle$ que torna todas as fórmulas em $\{Pa, \exists x Px \to \forall x \forall y Lxy\}$ verdadeiras precisa ser tal que $\mathfrak{E}(Pa) = V$ (ou seja, $I_E(a) \in I_E(P)$) e $\mathfrak{E}(\exists x Px \to \forall x \forall y Lxy) = V$ (ou seja, se $I_E(\mathbf{i}) \in I_E(P)$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$, então, para todo parâmetro $\mathbf{j}$ e todo parâmetro $\mathbf{k}$, $\langle I_E(\mathbf{j}), I_E(\mathbf{k}) \rangle \in I_E(L)$).

Supondo que $I_E(a) = 0$, é preciso então que $I_E(P) = \{0\}$; nesse caso, se 0 for o único indivíduo do domínio do discurso, então $E = \{0\}$ e $I_E(L) = \{\langle 0, 0 \rangle\}$.

Exercício 11.4, p 188

Mostre que:

(a) $\neg A \vee Qb, \neg Qb \vDash \neg A$

Para mostrar que $\neg A \vee Qb, \neg Qb \vDash \neg A$, é preciso mostrar que não há uma estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}(\neg A \vee Qb) = V$, $\mathfrak{A}(\neg Qb) = V$ e $\mathfrak{A}(\neg A) = F$.

Assim, é preciso que $\mathfrak{A}(A) = V$ e $\mathfrak{A}(Qb) = F$. Mas para que $\mathfrak{A}(\neg A \vee Qb) = V$, é preciso que $\mathfrak{A}(\neg A) = V$, e portanto $\mathfrak{A}(A) = F$, ou $\mathfrak{A}(Qb) = V$. No primeiro caso, acabamos chegando à necessidade de que $\mathfrak{A}(A) = V$ e $\mathfrak{A}(A) = F$ (o que é uma contradição); no segundo caso, seria preciso que $\mathfrak{A}(Qb) = F$ e $\mathfrak{A}(Qb) = V$ (o que também é uma contradição).

Assim, não temos nenhuma maneira de construir uma estrutura não contraditória para $\{\neg A \vee Qb, \neg Qb\}$ verdadeiras e $\neg A$ falsa; o que mostra que $\neg A \vee Qb, \neg Qb \vDash \neg A$.

(b) $\exists x(Fx \wedge Gx) \vDash \exists x Fx$

Uma estrutura $\mathfrak{B}$, para que $\mathfrak{B}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = V$ e $\mathfrak{B}(\exists x Fx) = F$, teria $\mathfrak{B}(F\mathbf{i}) = F$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$, e $\mathfrak{B}(F\mathbf{j} \wedge G\mathbf{j}) = V$, para algum parâmetro $\mathbf{j}$; devido a esta última, seria preciso que $\mathfrak{B}(F\mathbf{j}) = V$ e $\mathfrak{B}(G\mathbf{j}) = V$, para algum parâmetro $\mathbf{j}$.

Assim, como é preciso que, para algum parâmetro $\mathbf{j}$, $\mathfrak{B}(F\mathbf{j}) = V$, mas que $\mathfrak{B}(F\mathbf{i}) = F$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$, não é possível que alguém seja F se ninguém pode ser F. O que mostra que não há uma estrutura que faça $\exists x(Fx \wedge Gx)$ verdadeiro e $\exists x Fx$ falso; portanto, efetivamente, $\exists x(Fx \wedge Gx) \vDash \exists x Fx$.

(c) $Pa \to \forall x Lxa, \neg Lba \vDash \neg Pa$

Uma estrutura $\mathfrak{C}$ que seja modelo para $\{Pa \to \forall x Lxa, \neg Lba\}$, mas que resultasse em $\mathfrak{C}(\neg Pa) = F$, precisaria que:

- $\mathfrak{C}(Pa) = V$
- $\mathfrak{C}(Lba) = F$ (pois $\mathfrak{C}(\neg Lba) = V$)
- $\mathfrak{C}(Pa) = F$ ou $\mathfrak{C}(\forall x Lxa) = V$ (pois $\mathfrak{C}(Pa \to \forall x Lxa) = V$)
  - No primeiro caso, chegaríamos à exigência de que $\mathfrak{C}(Pa) = V$ e de que $\mathfrak{C}(Pa) = F$ (contradição)
  - No segundo caso, seria preciso que $\mathfrak{C}(L\mathbf{i}a) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$; como b é um parâmetro, seria preciso em especial que $\mathfrak{C}(Lba) = V$, mas também se exige que $\mathfrak{C}(Lba) = F$ (outra contradição).

Assim, não há uma estrutura que seja modelo para $\{Pa \to \forall x Lxa, \neg Lba\}$ e resulte em $\neg Pa$ falso; portanto, $Pa \to \forall x Lxa, \neg Lba \vDash \neg Pa$.

(d) $\forall x(Px \to Qx), \forall y Py \vDash \forall z Qz$

Uma estrutura $\mathfrak{D}$ que fosse modelo para $\{\forall x(Px \to Qx), \forall y Py\}$, mas que não fosse para $\{\forall z Qz\}$, teria que ser tal que:

- $\mathfrak{D}(\forall x(Px \to Qx)) = V$
  - $\mathfrak{D}(P\mathbf{i} \to Q\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$

        * $\mathfrak{D}(P\mathbf{i}) = F$ ou $\mathfrak{D}(Q\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$

- $\mathfrak{D}(\forall yPy) = V$
    - $\mathfrak{D}(P\mathbf{j}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{j}$
- $\mathfrak{D}(\forall zQz) = F$
    - $\mathfrak{D}(Q\mathbf{k}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{k}$

No primeiro caso da disjunção acima, a exigência de que $\mathfrak{D}(P\mathbf{i}) = F$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$, é contraditória com a de que $\mathfrak{D}(P\mathbf{j}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{j}$ (não há como todos serem P e ninguém ser P). No segundo caso da disjunção, não há como $\mathfrak{D}(Q\mathbf{k}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{k}$, mas $\mathfrak{D}(Q\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$ (não é possível que alguém não seja Q, quando todos são Q).

Portanto, $\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall yPy \vDash \forall zQz$.

Exercício 11.5, p. 188

(a) $\neg A \vee Qb, Qb \nvDash \neg A$

Para mostrar que $\neg A \vee Qb, Qb \nvDash \neg A$, precisamos de uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, I_A \rangle$, de forma que $\mathfrak{A}(\neg A) = F$, mas $\mathfrak{A}(\neg A \vee Qb) = V$ e $\mathfrak{A}(Qb) = V$. Assim, $\mathfrak{A}(A) = V$ e $I_A(A) = V$, mas também $I_A(b) \in I_A(Q)$. Portanto, com mais $A = \{0\}$, $I_A(b) = 0$ e $I_A(Q) = \{0\}$, chegamos à estrutura $\mathfrak{A}$ que precisávamos.

(b) $\exists x Fx \nvDash \exists x(Fx \wedge Gx)$

É preciso uma estrutura $\mathfrak{B} = \langle B, I_B \rangle$ na qual $\mathfrak{B}(\exists x Fx) = V$, mas $\mathfrak{B}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = F$. Assim, é preciso que exista um parâmetro $\mathbf{i}$, tal que $\mathfrak{B}(F\mathbf{i}) = V$; mas também que, para todo parâmetro $\mathbf{j}$, $\mathfrak{B}(F\mathbf{j} \wedge G\mathbf{j}) = F$. Esta última nos leva a duas condições: ou $\mathfrak{B}(F\mathbf{j}) = F$, para todo parâmetro $\mathbf{j}$; ou $\mathfrak{B}(G\mathbf{j}) = F$, para todo parâmetro $\mathbf{j}$. Como precisamos de pelo menos um indivíduo que seja F ($\mathfrak{B}(F\mathbf{i}) = V$, para algum parâmetro $\mathbf{i}$), precisamos então que ninguém seja G.

Portanto, se $B = \{0\}$, $I_B(a) = 0$, $I_B(F) = \{0\}$ e $I_B(G) = \{\}$, obtemos a estrutura que precisamos para mostrar que $\exists x Fx \nvDash \exists x(Fx \wedge Gx)$.

(c) $Pa \to \forall x Lxa, \exists x \neg Lax \nvDash \neg Pa$

Precisamos que

- $\mathfrak{C}(Pa \to \forall x Lxa) = V$
  - $\mathfrak{C}(Pa) = F$ ou $\mathfrak{C}(\forall x Lxa) = V$
    - $\mathfrak{C}(L\mathbf{i}a) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$ (todo mundo ama Pedro, por exemplo)
- $\mathfrak{C}(\exists x \neg Lax) = V$
  - $\mathfrak{C}(\neg La\mathbf{j}) = V$, para algum parâmetro $\mathbf{j}$
    - $\mathfrak{C}(La\mathbf{j}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{j}$ (há alguém que Pedro não ama)
- $\mathfrak{C}(\neg Pa) = F$
  - $\mathfrak{C}(Pa) = V$

Assim, se tivermos a estrutura $\mathfrak{C} = \langle C, I_C \rangle$, de forma que $C = \{Pedro, Maria\}$, e

- $I_C(a) = Pedro$
- $I_C(b) = Maria$
- $I_C(P) = \{Pedro\}$
- $I_C(L) = \{\langle Pedro, Pedro \rangle, \langle Maria, Pedro \rangle\}$

demonstramos que $Pa \to \forall x Lxa, \exists x \neg Lax \nvDash \neg Pa$.

(d) $\forall x(Px \to Qx), \forall y Qy \nvDash \forall z Pz$

- $\mathfrak{D}(\forall x(Px \to Qx)) = V$
  - $\mathfrak{D}(P\mathbf{i} \to Q\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$
    - $\mathfrak{D}(P\mathbf{i}) = F$ ou $\mathfrak{D}(Q\mathbf{i}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{i}$ (alguém não é P ou todos são Q)

- $\mathfrak{D}(\forall y Qy) = V$
  - $\mathfrak{D}(Q\mathbf{j}) = V$, para todo parâmetro $\mathbf{j}$ (todos são Q)
- $\mathfrak{D}(\forall z Pz) = F$
  - $\mathfrak{D}(P\mathbf{k}) = F$, para algum parâmetro $\mathbf{k}$ (alguém não é P)

$\mathfrak{D} = \langle D, I_D \rangle$

- $D = \{Pedro, Maria\}$
- $I_D(P) = \{Pedro\}$
- $I_D(Q) = \{Pedro, Maria\}$

Exercício 12.1, p. 207

(a)

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \mathbf{F}\ \ (A \land B) \to B \\ \checkmark\ \mathbf{V}\ \ (A \land B) \\ \mathbf{F}\ \ B \\ \mathbf{V}\ \ A \\ \mathbf{V}\ \ B \\ \times \end{array}$$

1	**F**	$(A \land B) \to B$	Concl.	✓
2	**V**	$A \land B$	$1/F_{\to}$	✓
3	**F**	B	$1/F_{\to}$	×
4	**V**	A	$2/V_{\land}$	×
5	**V**	B	$2/V_{\land}$	×
$\perp$			$3, 5$	

(b)

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \mathbf{F}\ \ B \to (\neg A \lor B) \\ \mathbf{V}\ \ B \\ \checkmark\ \mathbf{F}\ \ \neg A \lor B \\ \checkmark\ \mathbf{F}\ \ \neg A \\ \mathbf{F}\ \ B \\ \mathbf{V}\ \ A \\ \times \end{array}$$

1	**F**	$B \to (\neg A \lor B)$	Concl.	✓
2	**V**	B	$1/F_{\to}$	×
3	**F**	$\neg A \lor B$	$1/F_{\to}$	✓
4	**F**	$\neg A$	$3/F_{\lor}$	✓
5	**F**	B	$3/F_{\lor}$	×
6	**V**	A	$4/F_{\neg}$	×
$\perp$			$2, 5$	

(c)

$$\begin{array}{c} \checkmark\ \mathbf{F}\ \ (Fa \lor \neg Fa) \to \neg Qb \\ \checkmark\ \mathbf{V}\ \ Fa \lor \neg Fa \\ \checkmark\ \mathbf{F}\ \ \neg Qb \\ \mathbf{V}\ \ Qb \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{V}\ \ Fa & \checkmark\ \mathbf{V}\ \ \neg Fa \\ ? & \mathbf{F}\ \ Fa \\ & ? \end{array}$$

1	**F**	$(Fa \lor \neg Fa) \to \neg Qb$	Concl.	✓
2	**V**	$Fa \lor \neg Fa$	$1/F_{\to}$	✓
3	**F**	$\neg Qb$	$1/T_{\to}$	✓
4	**V**	Qb	$3/F_{\neg}$	×

5	**V**	Fa	$2/V_{\lor}$	×
?				

6	**V**	$\neg Fa$	$2/V_{\lor}$	✓
7	**F**	Fa	$7/V_{\neg}$	×
?				

(d)

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ \mathbf{F}\ (A \land B) \to \neg\neg B \\
\checkmark\ \mathbf{V}\ A \land B \\
\checkmark\ \mathbf{F}\ \neg\neg B \\
\mathbf{V}\ A \\
\mathbf{V}\ B \\
\checkmark\ \mathbf{V}\ \neg B \\
\mathbf{F}\ B \\
\times
\end{array}
$$

1	**F**	$(A \land B) \to \neg\neg B$	Concl.	✓
2	**V**	$A \land B$	$1/F_{\to}$	✓
3	**F**	$\neg\neg B$	$1/F_{\to}$	✓
4	**V**	A	$2/V_{\land}$	×
5	**V**	B	$2/V_{\land}$	×
6	**V**	$\neg B$	$3/F_{\neg}$	✓
7	**F**	B	$6/V_{\neg}$	×
$\perp$			$5, 7$	

(e)

1	**F**	$\neg\neg A \land (A \to B)$	Concl.	✓

2	**F**	$\neg\neg A$	$1/F_{\land}$	✓
3	**V**	$\neg A$	$2/F_{\neg}$	✓
4	**F**	A	$3/V_{\neg}$	×
?				

5	**F**	$A \to B$	$1/F_{\land}$	✓
6	**V**	A	$5/F_{\to}$	×
7	**F**	B	$5/F_{\to}$	×
?				

(f)

1	**F**	$\neg\neg Pa \leftrightarrow (Pa \vee Pa)$	Concl.	✓

2	**V**	$\neg\neg Pa$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
3	**F**	$Pa \vee Pa$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
4	**F**	$\neg Pa$	$2/V_{\neg}$	✓
5	**V**	Pa	$4/F_{\neg}$	×
6	**F**	Pa	$3/F_{\vee}$	×
7	**F**	Pa	$3/F_{\vee}$	×
$\perp$			$5, 6$ $(5, 7)$	

8	**F**	$\neg\neg Pa$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
9	**V**	$Pa \vee Pa$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
10	**V**	$\neg Pa$	$8/F_{\neg}$	✓
11	**F**	Pa	$10/F_{\neg}$	×

12	**V**	Pa	$9/V_{\vee}$	×
$\perp$			$11, 12$	

13	**V**	Pa	$9/V_{\vee}$	×
$\perp$			$11, 13$	

(g)

1	**F**	$Lc \vee \neg(Lc \wedge Ts)$	Concl.	✓
2	**F**	Lc	$1/F_{\vee}$	×
3	**F**	$\neg(Lc \wedge Ts)$	$1/F_{\vee}$	✓
4	**V**	$Lc \wedge Ts$	$3/F_{\neg}$	✓
5	**V**	Lc	$4/V_{\wedge}$	×
6	**V**	Ts	$4/V_{\wedge}$	×
$\perp$			$2, 5$	

(h)

1	**F**	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$	Concl.	✓

2	**V**	$A \wedge A$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
3	**F**	A	$1/F_{\leftrightarrow}$	×
4	**V**	A	$2/V_{\wedge}$	×
5	**V**	A	$2/V_{\wedge}$	×
$\perp$			$3, 4$ $(2, 5)$	

6	**F**	$A \wedge A$	$1/F_{\leftrightarrow}$	✓
7	**V**	A	$1/F_{\leftrightarrow}$	×

8	**F**	A	$6/F_{\wedge}$	×
$\perp$			$7, 8$	

9	**F**	A	$6/F_{\wedge}$	×
$\perp$			$7, 9$	

Exercício 12.2, p. 210

(a) $A \lor B, \neg A \vDash B$?

1	**V**	$A \lor B$	Prem.	✓
2	**V**	$\neg A$	Prem.	✓
3	**F**	B	Concl.	×
4	**F**	A	$2/V_\neg$	×

5	**V**	A	$1/V_\lor$	×
$\perp$			$4, 5$	

6	**V**	B	$1/V_\lor$	×
$\perp$			$3, 6$	

Tablô completamente fechado, portanto $A \lor B, \neg A \vDash B$!

(b) $Pa \leftrightarrow Qb, \neg Pa \vDash \neg Qb$?

1	**V**	$Pa \leftrightarrow Qb$	Prem.	✓
2	**V**	$\neg Pa$	Prem.	✓
3	**F**	$\neg Qb$	Concl.	✓
4	**F**	Pa	$2/V_\neg$	×
5	**V**	Qb	$3/F_\neg$	×

6	**V**	Pa	$1/V_\leftrightarrow$	×
7	**V**	Qb	$1/V_\leftrightarrow$	×
$\perp$			$4, 6$	

8	**F**	Pa	$1/V_\leftrightarrow$	×
9	**F**	Qb	$1/V_\leftrightarrow$	×
$\perp$			$5, 9$	

Tablô completamente fechado, portanto $Pa \leftrightarrow Qb, \neg Pa \vDash \neg Qb$!

(c) $\neg(B \land A) \vDash \neg B \land \neg A$?

1	**V**	$\neg(B \land A)$	Prem.	✓
2	**F**	$\neg B \land \neg A$	Concl.	✓
3	**F**	$B \land A$	$1/V_\neg$	✓

4	**F**	$\neg B$	$2/F_\land$	✓
5	**V**	B	$4/F_\neg$	×

8	**F**	$\neg A$	$2/F_\land$	✓
9	**V**	A	$8/F_\neg$	×

6	**F**	B	$3/F_\land$	×
×			$5, 6$	

7	**F**	A	$3/F_\land$	×
?				

10	**F**	B	$3/F_\land$	×
?				

11	**F**	A	$3/F_\land$	×
×			$9, 11$	

Tablô aberto, portanto $\neg(B \land A) \nvDash \neg B \land \neg A$!

(d) $A \to B \vDash A \lor B$?

1	**V**	$A \to B$	Prem.	✓
2	**F**	$A \lor B$	Concl.	✓
3	**F**	A	$2/F_{\to}$	×
4	**F**	B	$2/F_{\to}$	×

5	**F**	A	$1/V_{\to}$	×
?				

6	**V**	B	$1/V_{\to}$	×
$\perp$			$4, 6$	

Tablô aberto, portanto $A \to B \nvDash A \lor B$!

(e) $\neg Pa \to \neg Qb \vDash Pa \to Qb$?

1	**V**	$\neg Pa \to \neg Qb$	Prem.	✓
2	**F**	$Pa \to Qb$	Concl.	✓
3	**V**	Pa	$2/F_{\to}$	×
4	**F**	Qb	$2/F_{\to}$	×

5	**F**	$\neg Pa$	$1/V_{\to}$	✓
6	**V**	Pa	$5/F_{\neg}$	×
?				

7	**V**	$\neg Qb$	$1/V_{\to}$	✓
8	**F**	Qb	$7/V_{\neg}$	×
?				

Tablô aberto, portanto $\neg Pa \to \neg Qb \nvDash Pa \to Qb$!

(f) $Pa, Pa \to C \vDash Pa \leftrightarrow C$?

1	**V**	Pa	Prem.	×
2	**V**	$Pa \to C$	Prem.	✓
3	**F**	$Pa \leftrightarrow C$	Concl.	✓

4	**V**	Pa	$3/F_{\leftrightarrow}$	×
5	**F**	C	$3/F_{\leftrightarrow}$	×

6	**F**	Pa	$2/V_{\to}$	×
$\perp$			$1, 6\ (4, 6)$	

7	**V**	C	$2/V_{\to}$	×
$\perp$			$5, 7$	

8	**F**	Pa	$3/F_{\leftrightarrow}$	×
9	**V**	C	$3/F_{\leftrightarrow}$	×

10	**F**	Pa	$2/V_{\to}$	×
$\perp$			$1, 8\ (1, 10)$	

11	**V**	C	$2/V_{\to}$	×
$\perp$			$1, 8$	

Tablô completamente fechado, portanto $Pa, Pa \to C \vDash Pa \leftrightarrow C$!

Resolução alternativa, encerrando o ramo assim que encontra contradição:

1	**V**	Pa	Prem.	$\times$
2	**V**	$Pa \to C$	Prem.	✓
3	**F**	$Pa \leftrightarrow C$	Concl.	✓

4	**F**	Pa	$2/V_{\to}$	$\times$
$\times$			$1, 4$	

5	**V**	C	$2/V_{\to}$	$\times$

6	**V**	Pa	$3/F_{\leftrightarrow}$	$\times$
7	**F**	C	$3/F_{\leftrightarrow}$	$\times$
$\times$			$5, 7$	

8	**F**	Pa	$3/F_{\leftrightarrow}$	$\times$
9	**V**	C	$3/F_{\leftrightarrow}$	$\times$
$\times$			$1, 8$	

(g) $B \to \neg Cb \vDash \neg(B \land Cb)$?

1	**V**	$B \to \neg Cb$	Prem.	✓
2	**F**	$\neg(B \land Cb)$	Concl.	✓
3	**V**	$B \land Cb$	$2/F_{\neg}$	✓
4	**V**	B	$3/V_{\land}$	$\times$
5	**V**	Cb	$3/V_{\land}$	$\times$

6	**F**	B	$1/V_{\to}$	$\times$
$\perp$			$4, 6$	

7	**V**	$\neg Cb$	$1/V_{\to}$	✓
8	**F**	Cb	$6/V_{\neg}$	$\times$
$\perp$			$5, 8$	

Tablô completamente fechado, portanto $B \to \neg Cb \vDash \neg(B \land Cb)$!

(h) $A \vDash (A \to (Qb \land A)) \to (A \land Qb)$?

1	**V**	A	Prem.	$\times$
2	**F**	$(A \to (Qb \land A)) \to (A \land Qb)$	Concl.	✓
3	**V**	$A \to (Qb \land A)$	$2, F_{\to}$	✓
4	**F**	$A \land Qb$	$2, F_{\to}$	✓

5	**F**	A	$3, V_{\to}$	✓
$\perp$			$1, 5$	

6	**V**	$Qb \land A$	$3, F_{\to}$	✓
7	**V**	Qb	$6, V_{\land}$	$\times$
8	**V**	A	$6, V_{\land}$	$\times$

9	**F**	A	$4, F_{\land}$	$\times$
$\perp$			$8, 9$	

10	**F**	Qb	$4, F_{\land}$	$\times$
$\perp$			$7, 10$	

Tablô completamente fechado, portanto $A \vDash (A \to (Qb \land A)) \to (A \land Qb)$!

(i) $(Ba \land Ca) \to Fb, \neg Ba, \neg Ca \vDash \neg Fb$?

1	**V**	$(Ba \land Ca) \to Fb$	Prem.	✓
2	**V**	$\neg Ba$	Prem.	✓
3	**V**	$\neg Ca$	Prem.	✓
4	**F**	$\neg Fb$	Concl.	✓
5	**F**	Ba	$2, V_\neg$	×
6	**F**	Ca	$3, V_\neg$	×
7	**V**	Fb	$4, F_\neg$	×

8	**F**	$Ba \land Ca$	$1, V_\to$	✓

9	**F**	Ba	$8, F_\land$	×
?				

10	**F**	Ca	$8, F_\land$	×
?				

11	**V**	Fb	$1, V_\to$	×
?				

Tablô aberto, portanto $(Ba \land Ca) \to Fb, \neg Ba, \neg Ca \nvDash \neg Fb$!

(j) $\neg(A \lor B), Fa \leftrightarrow A \vDash \neg Fa$?

1	**V**	$\neg(A \lor B)$	Prem.	✓
2	**V**	$Fa \leftrightarrow A$	Prem.	✓
3	**F**	$\neg Fa$	Concl.	✓
4	**F**	$A \lor B$	$1, V_\neg$	✓
5	**V**	Fa	$3, F_\neg$	×
6	**F**	A	$4, F_\lor$	×
7	**F**	B	$4, F_\lor$	×

8	**V**	Fa	$2, V_\leftrightarrow$	×
9	**V**	A	$2, V_\leftrightarrow$	×
$\perp$			$6, 9$	

10	**F**	Fa	$2, V_\leftrightarrow$	×
11	**F**	A	$2, V_\leftrightarrow$	×
$\perp$			$5, 10$	

Tablô completamente fechado, portanto $\neg(A \lor B), Fa \leftrightarrow A \vDash \neg Fa$!

(k) $\neg(A \land B), Fa \leftrightarrow A \vDash \neg Fa$?

1	**V**	$\neg(A \wedge B)$	Prem.	✓
2	**V**	$Fa \leftrightarrow A$	Prem.	✓
3	**F**	$\neg Fa$	Concl.	✓
4	**F**	$A \wedge B$	$1, V_{\neg}$	✓
5	**V**	Fa	$3, F_{\neg}$	×

6	**V**	Fa	$2, V_{\leftrightarrow}$	×
7	**V**	A	$2, V_{\leftrightarrow}$	×

10	**F**	Fa	$2, V_{\leftrightarrow}$	×
11	**F**	A	$2, V_{\leftrightarrow}$	×
$\perp$			$5, 10$	

8	**F**	A	$4, F_{\wedge}$	×
$\perp$			$7, 8$	

9	**F**	B	$4, F_{\wedge}$	×
?				

Tablô aberto, portanto $\neg(A \wedge B), Fa \leftrightarrow A \vDash \neg Fa$!

(l) $Pa \leftrightarrow Pb, Pb \leftrightarrow Pc \vDash Pa \leftrightarrow Pc$?

1	**V**	$Pa \leftrightarrow Pb$	Prem.	○
2	**V**	$Pb \leftrightarrow Pc$	Prem.	○
3	**F**	$Pa \leftrightarrow Pc$	Concl.	○

Exercício 12.3, p. 218

(a) $\forall x Rxx \to Raa$

1.	F	$\forall x Rxx \to Raa$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x Rxx$	1, $F_{\to}$	○
3.	F	Raa	1, $F_{\to}$	●
4.	V	Raa	2, $V_{\forall}(x \mapsto a)$	●
		×	3, 4	

(b) $\neg \exists x Rxx \to \neg Raa$

1.	F	$\neg \exists x Rxx \to \neg Raa$	Concl.	✓
2.	V	$\neg \exists x Rxx$	1, $F_{\to}$	✓
3.	F	$\neg Raa$	1, $F_{\to}$	✓
4.	F	$\exists x Rxx$	2, $V_{\neg}$	○
5.	V	Raa	3, $F_{\neg}$	●
6.	F	Raa	4, $F_{\exists}$	●
		×	5, 6	

(c) $\forall x (Px \to Px)$

1.	F	$\forall x (Px \to Px)$	Concl.	✓
2.	F	$Pa \to Pa$	1, $F_{\forall}$	✓
3.	V	Pa	2, $F_{\to}$	●
4.	F	Pa	2, $F_{\to}$	●
		×	3, 4	

(d) $\neg \exists x (Px \land \neg Px)$

1.	F	$\neg \exists x (Px \land \neg Px)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x (Px \land \neg Px)$	1, $F_{\neg}$	✓
3.	V	$Pa \land \neg Pa$	2, $V_{\exists}$	✓
4.	V	Pa	3, $V_{\land}$	●
5.	V	$\neg Pa$	3, $V_{\land}$	✓
6.	F	Pa	5, $V_{\neg}$	●
		×	4, 6	

(e) $\forall x (Ax \to Bx) \to (\forall x Ax \to \forall x Bx)$

1.	F	$\forall x (Ax \to Bx) \to (\forall x Ax \to \forall x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x (Ax \to Bx)$	1, $F_{\to}$	○
3.	F	$\forall x Ax \to \forall x Bx$	1, $F_{\to}$	✓
4.	V	$\forall x Ax$	3, $F_{\to}$	○
5.	F	$\forall x Bx$	3, $F_{\to}$	✓
6.	F	Ba	5, $F_{\forall}$	●
7.	V	$Aa \to Ba$	2, $V_{\forall}$	✓

8.1.	F	Aa	7, $V_{\to}$	●
9.1.	V	Aa	4, $V_{\forall}$	●
		×	8.1, 9.1	

8.2.	V	Ba	7, $V_{\to}$	●
		×	6, 8.2	

(f) $\forall x(Ax \to Bx) \to (\exists x Ax \to \exists x Bx)$

1.	F	$\forall x(Ax \to Bx) \to (\exists x Ax \to \exists x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x(Ax \to Bx)$	1, $F_{\to}$	○
3.	F	$\exists x Ax \to \exists x Bx$	1, $F_{\to}$	✓
4.	V	$\exists x Ax$	3, $F_{\to}$	✓
5.	F	$\exists x Bx$	3, $F_{\to}$	○
6.	V	Aa	4, $V_{\exists}$	•
7.	V	$Aa \to Ba$	2, $V_{\forall}$	✓

8.1.	F	Aa	7, $V_{\to}$	•
×			6, 8.1	

8.2.	V	Ba	$V_{\to}$	•
9.2.	F	Ba	$F_{\exists}$	•
×			8.2, 9.2	

(g) $\forall x(Ax \wedge Bx) \to (\forall x Ax \wedge \forall x Bx)$

1.	F	$\forall x(Ax \wedge Bx) \to (\forall x Ax \wedge \forall x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x(Ax \wedge Bx)$	1, $F_{\to}$	○
3.	F	$\forall x Ax \wedge \forall x Bx$	1, $F_{\to}$	✓

4.1.	F	$\forall x Ax$	3, $F_{\wedge}$	✓
5.1.	F	Aa	4.1, $F_{\forall}$	•
6.1.	V	$Aa \wedge Ba$	2, $V_{\forall}$	✓
7.1.	V	Aa	6.1, $V_{\wedge}$	•
8.1.	V	Ba	6.1, $V_{\wedge}$	•
×			5.1, 7.1	

4.2.	F	$\forall x Bx$	3, $F_{\wedge}$	✓
5.2.	F	Ba	4.2, $F_{\forall}$	•
6.2.	V	$Aa \wedge Ba$	2, $V_{\forall}$	✓
7.2.	V	Aa	6.1, $V_{\wedge}$	•
8.2.	V	Ba	6.1, $V_{\wedge}$	•
×			5.2, 8.2	

(h) $(\forall x Ax \wedge \forall x Bx) \to \forall x(Ax \wedge Bx)$

1.	F	$(\forall x Ax \wedge \forall x Bx) \to \forall x(Ax \wedge Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x Ax \wedge \forall x Bx$	1, $F_{\to}$	✓
3.	F	$\forall x(Ax \wedge Bx)$	1, $F_{\to}$	✓
4.	V	$\forall x Ax$	2, $V_{\wedge}$	○
5.	V	$\forall x Bx$	2, $V_{\wedge}$	○
6.	F	$Aa \wedge Ba$	3, $F_{\forall}$	✓

7.1.	F	Aa	6, $F_{\wedge}$	•
8.1.	V	Aa	4, $V_{\forall}$	•
×			7.1, 8.1	

7.2.	F	Ba	6, $F_{\wedge}$	•
8.2.	V	Ba	5, $V_{\forall}$	•
×			7.2, 8.2	

(i) $(\exists x Ax \vee \exists x Bx) \to \exists x(Ax \vee Bx)$

1.	F	$(\exists x Ax \vee \exists x Bx) \to \exists x(Ax \vee Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
3.	F	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	○

4.1.	V	$\exists x Ax$	2, $\mathrm{V}_{\vee}$	✓
5.1.	V	Aa	4.1, $\mathrm{V}_{\exists}$	●
6.1.	F	$Aa \vee Ba$	3, $\mathrm{F}_{\exists}$	✓
7.1.	F	Aa	6.1, $\mathrm{F}_{\vee}$	●
8.1.	F	Ba	6.1, $\mathrm{F}_{\vee}$	●
		×	5.1, 7.1	

4.2.	V	$\exists x Bx$	2, $\mathrm{V}_{\vee}$	✓
5.2.	V	Ba	4.2, $\mathrm{V}_{\exists}$	●
6.2.	F	$Aa \vee Ba$	3, $\mathrm{F}_{\exists}$	✓
7.2.	F	Aa	6.2, $\mathrm{F}_{\vee}$	●
8.2.	F	Ba	6.2, $\mathrm{F}_{\vee}$	●
		×	5.2, 8.2	

(j) $\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$	Concl.	

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	
3.	F	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	
3.	F	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
4.	F	$\exists x Ax$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○
5.	F	$\exists x Bx$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
3.	F	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
4.	F	$\exists x Ax$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○
5.	F	$\exists x Bx$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $\mathrm{V}_{\exists}$	

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists x Ax \vee \exists x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
3.	F	$\exists x Ax \vee \exists x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
4.	F	$\exists x Ax$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○
5.	F	$\exists x Bx$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	○
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $\mathrm{V}_{\exists}$	✓

7.1.	V	Aa	6, $\mathrm{V}_{\vee}$	●

7.2.	V	Ba	6, $\mathrm{V}_{\vee}$	●

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists xAx \vee \exists xBx)$	Concl.	$\checkmark$
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
3.	F	$\exists xAx \vee \exists xBx$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
4.	F	$\exists xAx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
5.	F	$\exists xBx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $V_{\exists}$	$\checkmark$

7.1.	V	Aa	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.1.	F	Aa	4, $F_{\exists}$	$\bullet$

7.2.	V	Ba	6, $V_{\vee}$	$\bullet$

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists xAx \vee \exists xBx)$	Concl.	$\checkmark$
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
3.	F	$\exists xAx \vee \exists xBx$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
4.	F	$\exists xAx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
5.	F	$\exists xBx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $V_{\exists}$	$\checkmark$

7.1.	V	Aa	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.1.	F	Aa	4, $F_{\exists}$	$\bullet$
	$\times$		7.1, 8.1	

7.2.	V	Ba	6, $V_{\vee}$	$\bullet$

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists xAx \vee \exists xBx)$	Concl.	$\checkmark$
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
3.	F	$\exists xAx \vee \exists xBx$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
4.	F	$\exists xAx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
5.	F	$\exists xBx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $V_{\exists}$	$\checkmark$

7.1.	V	Aa	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.1.	F	Aa	4, $F_{\exists}$	$\bullet$
	$\times$		7.1, 8.1	

7.2.	V	Ba	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.2.	F	Ba	5, $F_{\exists}$	$\bullet$

1.	F	$\exists x(Ax \vee Bx) \to (\exists xAx \vee \exists xBx)$	Concl.	$\checkmark$
2.	V	$\exists x(Ax \vee Bx)$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
3.	F	$\exists xAx \vee \exists xBx$	1, $F_{\to}$	$\checkmark$
4.	F	$\exists xAx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
5.	F	$\exists xBx$	3, $F_{\vee}$	$\circ$
6.	V	$Aa \vee Ba$	2, $V_{\exists}$	$\checkmark$

7.1.	V	Aa	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.1.	F	Aa	4, $F_{\exists}$	$\bullet$
	$\times$		7.1, 8.1	

7.2.	V	Ba	6, $V_{\vee}$	$\bullet$
8.2.	F	Ba	5, $F_{\exists}$	$\bullet$
	$\times$		7.2, 8.2	

(k) $\forall x \neg (Px \wedge \neg Px)$

1.	F	$\forall x \neg (Px \wedge \neg Px)$	Concl.	$\checkmark$
2.	F	$\neg (Pa \wedge \neg Pa)$	1, $\mathrm{F}_{\forall}$	$\checkmark$
3.	V	$Pa \wedge \neg Pa$	2, $\mathrm{F}_{\neg}$	$\checkmark$
4.	V	Pa	3, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\bullet$
5.	V	$\neg Pa$	3, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\checkmark$
6.	F	Pa	5, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\bullet$
		$\times$	4, 6	

(l) $\forall x Px \leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$

1.	F	$\forall x Px \leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$	Concl.	$\checkmark$

2.1.	F	$\forall x Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
3.1.	V	$\neg \exists x \neg Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
4.1.	F	$\exists x \neg Px$	3.1, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\circ$
5.1.	F	Pa	2.1, $\mathrm{F}_{\forall}$	$\bullet$
6.1.	F	$\neg Pa$	4.1, $\mathrm{F}_{\exists}$	$\checkmark$
7.1.	V	Pa	6.1, $\mathrm{F}_{\neg}$	$\bullet$
		$\times$	5.1, 7.1	

2.2.	V	$\forall x Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\circ$
3.2.	F	$\neg \exists x \neg Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
4.2.	V	$\exists x \neg Px$	3.2, $\mathrm{F}_{\neg}$	$\checkmark$
5.2.	V	$\neg Pa$	4.2, $\mathrm{V}_{\exists}$	$\checkmark$
6.2.	F	Pa	5.2, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\bullet$
7.2.	V	Pa	2.2, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\bullet$
		$\times$	6.2, 7.2	

(m) $\exists x Px \leftrightarrow \neg \forall x \neg Px$

1.	F	$\exists x Px \leftrightarrow \neg \forall x \neg Px$	Concl.	$\checkmark$

2.1.	F	$\exists x Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\circ$
3.1.	V	$\neg \forall x \neg Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
4.1.	F	$\forall x \neg Px$	3.1, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\checkmark$
5.1.	F	$\neg Pa$	4.1, $\mathrm{F}_{\forall}$	$\checkmark$
6.1.	V	Pa	5.1, $\mathrm{F}_{\neg}$	$\bullet$
7.1.	F	Pa	1, $\mathrm{F}_{\exists}$	$\bullet$
		$\times$	6.1, 7.1	

2.2.	V	$\exists x Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
3.2.	F	$\neg \forall x \neg Px$	1, $\mathrm{F}_{\leftrightarrow}$	$\checkmark$
4.2.	V	$\forall x \neg Px$	3.2, $\mathrm{F}_{\neg}$	$\circ$
5.2.	V	Pa	2.2, $\mathrm{V}_{\exists}$	$\bullet$
6.2.	V	$\neg Pa$	4.2, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\checkmark$
7.2.	F	Pa	6.2, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\bullet$
		$\times$	5.2, 7.2	

(n) $\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$

1.	F	$\exists y \forall x Rxy \rightarrow \forall x \exists y Rxy$	Concl.	$\checkmark$
2.	V	$\exists y \forall x Rxy$	1, $\mathrm{F}_{\rightarrow}$	$\checkmark$
3.	F	$\forall x \exists y Rxy$	1, $\mathrm{F}_{\rightarrow}$	$\checkmark$
4.	V	$\forall x Rxa$	2, $\mathrm{V}_{\exists}$	$\circ$
5.	F	$\exists y Rby$	3, $\mathrm{F}_{\forall}$	$\circ$
6.	V	Rba	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\bullet$
7.	F	Rba	5, $\mathrm{F}_{\exists}$	$\bullet$
		$\times$	6, 7	

(o) $(\forall x Px \vee \forall x Qx) \rightarrow \forall x (Px \vee Qx)$

1.	F	$(\forall x Px \vee \forall x Qx) \to \forall x(Px \vee Qx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x Px \vee \forall x Qx$	1, $F_\to$	✓
3.	F	$\forall x(Px \vee Qx)$	1, $F_\to$	✓
4.	F	$Pa \vee Qa$	3, $F_\forall$	✓
5.	F	Pa	4, $F_\vee$	•
6.	F	Qa	4, $F_\vee$	•

7.1.	V	$\forall x Px$	2, $V_\vee$	○
8.1.	V	Pa	7.1, $V_\forall$	•
$\times$			5, 8.1	

7.2.	V	$\forall x Qx$	2, $V_\vee$	○
8.2.	V	Qa	7.2, $V_\forall$	•
$\times$			6, 8.2	

(p) $\exists x(Px \wedge Qx) \to (\exists x Px \wedge \exists x Qx)$

1.	F	$\exists x(Px \wedge Qx) \to (\exists x Px \wedge \exists x Qx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Px \wedge Qx)$	1, $F_\to$	✓
3.	F	$\exists x Px \wedge \exists x Qx$	1, $F_\to$	✓
4.	V	$Pa \wedge Qa$	2, $V_\exists$	✓
5.	V	Pa	4, $V_\wedge$	•
6.	V	Qa	4, $V_\wedge$	•

7.1.	F	$\exists x Px$	3, $F_\wedge$	○
8.1.	F	Pa	7.1, $F_\exists$	•
$\times$			5, 8.1	

7.2.	F	$\exists x Qx$	3, $F_\wedge$	○
8.2.	F	Qa	7.2, $F_\exists$	•
$\times$			6, 8.2	

Exercício 12.4, p. 218

(a) $\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx, \neg\exists x Bx \vDash \neg\exists x Ax$

1.	V	$\exists x Ax \rightarrow \exists x Bx$	Prem.	$\checkmark$
2.	V	$\neg\exists x Bx$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	$\neg\exists x Ax$	Concl.	$\checkmark$
4.	F	$\exists x Bx$	2, $V_\neg$	$\circ$
5.	V	$\exists x Ax$	3, $F_\neg$	$\checkmark$
6.	V	Aa	5, $V_\exists$	$\bullet$

7.1.	F	$\exists x Ax$	1, $V_\rightarrow$	$\circ$
8.1.	F	Aa	7.1, $F_\exists$	$\bullet$
$\times$			6, 8.1	

7.2.	V	$\exists x Bx$	1, $V_\rightarrow$	$\checkmark$
8.2.	V	Bb	7.2, $V_\exists$	$\bullet$
9.2.	F	Bb	4, $F_\exists$	$\bullet$
$\times$			8.2, 9.2	

(b) $\forall x Px \rightarrow \forall x Qx, \forall x Px \vDash Qb$

1.	V	$\forall x Px \rightarrow \forall x Qx$	Prem.	$\checkmark$
2.	V	$\forall x Px$	Prem.	$\circ$
3.	F	Qb	Concl.	$\bullet$

4.1.	F	$\forall x Px$	1, $V_\rightarrow$	$\checkmark$
5.1.	F	Pa	4.1, $F_\forall$	$\bullet$
6.1.	V	Pa	2, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			5.1, 6.1	

4.2.	V	$\forall x Qx$	1, $V_\rightarrow$	$\circ$
5.2.	V	Qb	4.2, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			3, 5.2	

Há uma resposta mais curta: se observamos que há duas instâncias de $\forall x Px$, uma verdadeira e outra falsa, nas linhas 2 e 4.1, podemos fechar imediatamente o ramo esquerdo.

1.	V	$\forall x Px \rightarrow \forall x Qx$	Prem.	$\checkmark$
2.	V	$\forall x Px$	Prem.	$\circ$
3.	F	Qb	Concl.	$\bullet$

4.1.	F	$\forall x Px$	1, $V_\rightarrow$	
$\times$			2, 4.1	

4.2.	V	$\forall x Qx$	1, $V_\rightarrow$	$\circ$
5.2.	V	Qb	4.2, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			3, 5.2	

(c) $\exists x Px \rightarrow \forall x Qx, \neg\exists x Qx \vDash \neg Pa$

1.	V	$\exists x Px \to \forall x Qx$	Prem.	✓
2.	V	$\neg \exists x Qx$	Prem.	✓
3.	F	$\neg Pa$	Concl.	✓
4.	F	$\exists x Qx$	2, $\text{V}_{\neg}$	○
5.	V	Pa	3, $\text{F}_{\neg}$	●

6.1.	F	$\exists x Px$	1, $\text{V}_{\to}$	○
7.1.	F	Pa	6.1, $\text{F}_{\exists}$	●
×			5, 7.1	

6.2.	V	$\forall x Qx$	1, $\text{V}_{\to}$	○
7.2.	F	Qa	4, $\text{F}_{\exists}$	●
8.2.	V	Qa	6.2, $\text{V}_{\forall}$	●
×			7.2, 8.2	

(d) $\forall x(Ax \to Bx), \exists x \neg Bx \vDash \exists x \neg Ax$

1.	V	$\forall x(Ax \to Bx)$	Prem.	○
2.	V	$\exists x \neg Bx$	Prem.	✓
3.	F	$\exists x \neg Ax$	Concl.	○
4.	V	$\neg Ba$	2, $\text{V}_{\exists}$	✓
5.	F	Ba	4, $\text{V}_{\neg}$	●
6.	V	$Aa \to Ba$	1, $\text{V}_{\forall}$	✓

7.1.	F	Aa	6, $\text{V}_{\to}$	●
8.1	F	$\neg Aa$	3, $\text{F}_{\exists}$	✓
9.1	V	Aa	8.1, $\text{F}_{\neg}$	●
×			7.1, 9.1	

7.2.	V	Ba	6, $\text{V}_{\to}$	●
×			5, 7.2	

(e) $\forall x(Px \to Qx), Pa \vDash Qa$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	○
2.	V	Pa	Prem.	●
3.	F	Qa	Concl.	●
4.	V	$Pa \to Qa$	1, $\text{V}_{\forall}$	✓

5.1.	F	Pa	4, $\text{V}_{\to}$	●
×			2, 5.1	

5.2.	V	Qa	4, $\text{V}_{\to}$	●
×			3, 5.2	

(f) $\forall x(Px \to Qx), \neg Qb \vDash \neg Pb$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\neg Qb$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	$\neg Pb$	Concl.	$\checkmark$
4.	F	Qb	2, $\mathrm{V}_\neg$	$\bullet$
5.	V	Pb	3, $\mathrm{F}_\neg$	$\bullet$
6.	V	$Pb \to Qb$	1, $\mathrm{V}_\forall$	$\checkmark$

7.1.	F	Pb	6, $\mathrm{V}_\to$	$\bullet$
$\times$			5, 7.1	

7.2.	V	Qb	6, $\mathrm{V}_\to$	$\bullet$
$\times$			4, 7.2	

(g) $\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), Fc \vDash Gc$

1.	V	$\forall x(\neg Gx \to \neg Fx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	Fc	Prem.	$\bullet$
3.	F	Gc	Concl.	$\bullet$
4.	V	$\neg Gc \to \neg Fc$	1, $\mathrm{V}_\forall$	$\checkmark$

5.1.	F	$\neg Gc$	4, $\mathrm{V}_\to$	$\checkmark$
6.1.	V	Gc	5.1, $\mathrm{F}_\neg$	$\bullet$
$\times$			3, 6.1	

5.2.	V	$\neg Fc$	4, $\mathrm{V}_\to$	$\checkmark$
6.2.	F	Fc	5.2, $\mathrm{V}_\neg$	$\bullet$
$\times$			2, 6.2	

(h) $\forall x(Px \lor Qx), \neg Qb \vDash Pb$

1.	V	$\forall x(Px \lor Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\neg Qb$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	Pb	Concl.	$\bullet$
4.	F	Qb	2, $\mathrm{V}_\neg$	$\bullet$
5.	V	$Pb \lor Qb$	1, $\mathrm{V}_\forall$	$\checkmark$

6.1.	V	Pb	5, $\mathrm{V}_\lor$	$\bullet$
$\times$			3, 6.1	

6.2.	V	Qb	5, $\mathrm{V}_\lor$	$\bullet$
$\times$			4, 6.2	

(i) $\forall x((Ax \lor Bx) \to Cx), Ab \vDash Cb$

1.	V	$\forall x((Ax \lor Bx) \to Cx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	Ab	Prem.	$\bullet$
3.	F	Cb	Concl.	$\bullet$
4.	V	$(Ab \lor Bb) \to Cb$	1, $\mathrm{V}_\forall$	$\checkmark$

5.1.	F	$Ab \lor Bb$	4, $\mathrm{V}_\to$	$\checkmark$
6.1.	F	Ab	5.1, $\mathrm{F}_\lor$	$\bullet$
7.1.	F	Bb	5.1, $\mathrm{F}_\lor$	$\bullet$
$\times$			2, 6.1	

5.2.	V	Cb	4, $\mathrm{V}_\to$	$\bullet$
$\times$			3, 5.2	

(j) $\forall x(Px \to Qx), \forall x(Qx \to Rxb) \vDash Pa \to Rab$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall x(Qx \to Rxb)$	Prem.	$\circ$
3.	F	$Pa \to Rab$	Concl.	✓
4.	V	Pa	3, $\mathrm{F}_{\to}$	$\bullet$
5.	F	Rab	3, $\mathrm{F}_{\to}$	$\bullet$
6.	V	$Pa \to Qa$	1, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

7.1.	F	Pa	6, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
$\times$			4, 7.1	

7.2.	V	Qa	6, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
8.2.	V	$Qa \to Rab$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

9.2.1	F	Qa	8.2, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
$\times$			7.2, 9.2.1	

9.2.2.	V	Rab	8.2, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
$\times$			5, 9.2.2	

(k) $\forall xFx \wedge \forall yHy, \forall z\forall xTzx \vDash Fa \wedge Tab$

1.	V	$\forall xFx \wedge \forall yHy$	Prem.	✓
2.	V	$\forall z\forall xTzx$	Prem.	$\circ$
3.	F	$Fa \wedge Tab$	Concl.	✓
4.	V	$\forall xFx$	1, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\circ$
5.	V	$\forall yHy$	1, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\circ$

6.1.	F	Fa	3, $\mathrm{F}_{\wedge}$	$\bullet$
7.1.	V	Fa	4, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\bullet$
$\times$			6.1, 7.1	

6.2.	F	Tab	3, $\mathrm{F}_{\wedge}$	$\bullet$
7.2.	V	$\forall xTax$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\circ$
8.2.	V	Tab	7.2, $\mathrm{V}_{\forall}$	$\bullet$
$\times$			6.2, 8.2	

(l) $\forall x\neg Px, \forall x(Cx \to Px), Fa \vee Cb \vDash Fa$

1.	V	$\forall x\neg Px$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall x(Cx \to Px)$	Prem.	$\circ$
3.	V	$Fa \vee Cb$	Prem.	✓
4.	F	Fa	Concl.	$\bullet$

5.1.	V	Fa	3, $\mathrm{V}_{\vee}$	$\bullet$
$\times$			4, 5.1	

5.2.	V	Cb	3, $\mathrm{V}_{\vee}$	$\bullet$
6.2.	V	$Cb \to Pb$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

7.2.1	F	Cb	6.2, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
$\times$			5.2, 7.2.1	

7.2.2.	V	Pb	6.2, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
8.2.2.	V	$\neg Pb$	1, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓
9.2.2.	F	Pb	8.2.2, $\mathrm{V}_{\neg}$	$\bullet$
$\times$			7.2.2, 9.2.2	

(m) $\forall x(Px \wedge Qx) \vDash \forall xPx \wedge \forall xQx$

1.	V	$\forall x(Px \wedge Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	F	$\forall xPx \wedge \forall xQx$	Concl.	✓

3.1.	F	$\forall xPx$	2, $F_\wedge$	✓
4.1.	F	Pa	3.1, $F_\forall$	$\bullet$
5.1.	V	$Pa \wedge Qa$	1, $V_\forall$	✓
6.1.	V	Pa	5.1, $V_\wedge$	$\bullet$
7.1.	V	Qa	5.1, $V_\wedge$	$\bullet$
$\times$			4.1, 6.1	

3.2.	F	$\forall xQx$	2, $F_\wedge$	✓
4.2.	F	Qa	3.2, $F_\forall$	$\bullet$
5.2.	V	$Pa \wedge Qa$	1, $V_\forall$	✓
6.2.	V	Pa	5.2, $V_\wedge$	$\bullet$
7.2.	V	Qa	5.2, $V_\wedge$	$\bullet$
$\times$			4.2, 7.2	

(n) $\forall xPx \to \forall xQx, \neg Qa \vDash \neg\forall xPx$

1.	V	$\forall xPx \to \forall xQx$	Prem.	✓
2.	V	$\neg Qa$	Prem.	✓
3.	F	$\neg\forall xPx$	Concl.	✓
4.	F	Qa	2, $V_\neg$	$\bullet$
5.	V	$\forall xPx$	3, $F_\neg$	$\circ$

6.1.	F	$\forall xPx$	1, $V_\to$	✓
7.1.	F	Pb	6.1, $F_\forall$	$\bullet$
8.1.	V	Pb	5, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			7.1, 8.1	

6.2.	V	$\forall xQx$	1, $V_\to$	$\circ$
7.2.	V	Qa	6.2, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			4, 7.2	

(o) $\forall x(Px \to Qx), \forall xPx \vDash \forall xQx$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall xPx$	Prem.	$\circ$
3.	F	$\forall xQx$	Concl.	✓
4.	F	Qa	3, $F_\forall$	$\bullet$
5.	V	$Pa \to Qa$	1, $V_\forall$	✓

6.1.	F	Pa	5, $V_\to$	$\bullet$
7.1.	V	Pa	2, $V_\forall$	$\bullet$
$\times$			6.1, 7.1	

6.2.	V	Qa	5, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			4, 6.2	

(p) $\forall x(Sx \to \neg Rx), \forall x(Px \to Sx) \vDash \forall x(Px \to \neg Rx)$

1.	V	$\forall x(Sx \to \neg Rx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall x(Px \to Sx)$	Prem.	$\circ$
3.	F	$\forall x(Px \to \neg Rx)$	Concl.	✓
4.	F	$Pa \to \neg Ra$	3, $F_\forall$	✓
5.	V	Pa	4, $F_\to$	$\bullet$
6.	F	$\neg Ra$	4, $F_\to$	✓
7.	V	Ra	7, $F_\neg$	$\bullet$
8.	V	$Pa \to Sa$	2, $V_\forall$	✓

9.1.	F	Pa	8, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			5, 9.1	

9.2.	V	Sa	8, $V_\to$	$\bullet$
10.2.	V	$Sa \to \neg Ra$	1, $V_\forall$	✓

11.2.1.	F	Sa	10.2, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			9.2, 11.2.1	

11.2.2.	V	$\neg Ra$	10.2, $V_\to$	✓
12.2.2.	F	Ra	11.2.2, $V_\neg$	$\bullet$
$\times$			7, 12.2.2	

(q) $\forall x Pbx, \forall x \forall y(Pxy \to Syx) \vDash \forall x Sxb$

1.	V	$\forall x Pbx$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall x \forall y(Pxy \to Syx)$	Prem.	$\circ$
3.	F	$\forall x Sxb$	Concl.	✓
4.	F	Sab	3, $F_\forall$	$\bullet$
5.	V	Pba	1, $V_\forall$	$\bullet$
6.	V	$\forall y(Pby \to Syb)$	2, $V_\forall$	$\circ$
7.	V	$Pba \to Sab$	6, $V_\forall$	✓

8.1.	F	Pba	7, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			5, 8.1	

8.2.	V	Sab	7, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			4, 8.2	

(r) $\forall x(Px \to Qx), \exists x Px \vDash \exists x Qx$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x Px$	Prem.	✓
3.	F	$\exists x Qx$	Concl.	$\circ$
4.	V	Pa	2, $V_\exists$	$\bullet$
5.	V	$Pa \to Qa$	1, $V_\forall$	✓

6.1.	F	Pa	5, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			4, 6.1	

6.2.	V	Qa	5, $V_\to$	$\bullet$
7.2.	F	Qa	3, $F_\exists$	$\bullet$
$\times$			6.2, 7.2	

(s) $\forall x(Px \to Qx), \exists x \neg Qx \vDash \exists x \neg Px$

1.	V	$\forall x(Px \to Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x \neg Qx$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	$\exists x \neg Px$	Concl.	$\circ$
4.	V	$\neg Qa$	2, $V_\exists$	$\checkmark$
5.	F	Qa	4, $V_\neg$	$\bullet$
6.	V	$Pa \to Qa$	1, $V_\forall$	$\checkmark$

7.1.	F	Pa	6, $V_\to$	$\bullet$
8.1.	F	$\neg Pa$	3, $F_\exists$	$\checkmark$
9.1.	V	Pa	8.1, $F_\neg$	$\bullet$
$\times$			7.1, 9.1	

7.2.	V	Qa	6, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			5, 7.2	

(t) $\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), \exists x Fx \vDash \exists x Gx$

1.	V	$\forall x(\neg Gx \to \neg Fx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x Fx$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	$\exists x Gx$	Concl.	$\circ$
4.	V	Fa	2, $V_\exists$	$\bullet$
5.	V	$\neg Ga \to \neg Fa$	1, $V_\forall$	$\checkmark$

6.1.	F	$\neg Ga$	5, $V_\to$	$\checkmark$
7.1.	V	Ga	6.1, $F_\neg$	$\bullet$
8.1.	F	Ga	3, $F_\exists$	$\bullet$
$\times$			7.1, 8.1	

6.2.	V	$\neg Fa$	5, $V_\to$	$\checkmark$
7.2.	F	Fa	6.2, $V_\neg$	$\bullet$
$\times$			4, 7.2	

(u) $\forall x(Px \lor Qx), \exists y \neg Qy \vDash \exists z Pz$

1.	V	$\forall x(Px \lor Qx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists y \neg Qy$	Prem.	$\checkmark$
3.	F	$\exists z Pz$	Concl.	$\circ$
4.	V	$\neg Qa$	2, $V_\exists$	$\checkmark$
5.	F	Qa	Prem.	$\bullet$
6.	V	$Pa \lor Qa$	1, $V_\forall$	$\checkmark$

7.1.	V	Pa	6, $V_\to$	$\bullet$
8.1.	F	Pa	3, $F_\exists$	$\bullet$
$\times$			7.1, 8.1	

7.2.	V	Qa	6, $V_\to$ $\bullet$	
$\times$			5, 7.2	

(v) $\forall x((Ax \lor Bx) \to Cx), \exists x Ax \vDash \exists x Cx$

1.	V	$\forall x((Ax \vee Bx) \to Cx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x Ax$	Prem.	✓
3.	F	$\exists x Cx$	Concl.	$\circ$
4.	V	Aa	2, $\mathrm{V}_{\exists}$	$\bullet$
5.	V	$(Aa \vee Ba) \to Ca$	1, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

6.1.	F	$Aa \vee Ba$	5, $\mathrm{V}_{\to}$	✓
7.1.	F	Aa	6.1, $\mathrm{F}_{\vee}$	$\bullet$
8.1.	F	Ba	6.1, $\mathrm{F}_{\vee}$	$\bullet$
$\times$			4, 7.1	

6.2.	V	Ca	5, $\mathrm{V}_{\to}$	$\bullet$
7.2.	F	Ca	3, $\mathrm{F}_{\exists}$	$\bullet$
$\times$			6.2, 7.2	

Exercício 12.5, p. 221

(a) $Pa \to \forall x Px$

1.	F	$Pa \to \forall x Px$	Concl.	✓
2.	V	Pa	1, $F_\to$	•
3.	F	$\forall x Px$	1, $F_\to$	✓
4.	F	Pb	3, $F_\forall$	•
?				

(Mas esse já tinha sido dado como exemplo, na página 219!)

(b) $\exists x Px \to Pa$

1.	F	$\exists x Px \to Pa$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x Px$	1, $F_\to$	✓
3.	F	Pa	1, $F_\to$	•
4.	V	Pb	2, $V_\exists$	•
?				

(c) $(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$

1.	F	$(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x Px \wedge \exists x Qx$	1, $F_\to$	✓
3.	F	$\exists x(Px \wedge Qx)$	1, $F_\to$	○
4.	V	$\exists x Px$	2, $V_\wedge$	✓
5.	V	$\exists x Qx$	2, $V_\wedge$	✓
6.	V	Pa	4, $V_\exists$	•
7.	V	Qb	5, $V_\exists$	•
8.	F	$Pa \wedge Qa$	3, $F_\exists$	✓

9.1.	F	Pa	8, $F_\wedge$	•
×			6, 9.1	

9.2.	F	Qa	8, $F_\wedge$	•
10.2.	F	$Pb \wedge Qb$	3, $F_\exists$	✓

10.2.1.	F	Pb	10.2, $F_\wedge$	•
?				

10.2.2.	F	Qb	10.2, $F_\wedge$	•
×			7, 10.2.2	

(d) $\forall x(Ax \vee Bx) \to (\forall x Ax \vee \forall x Bx)$

1.	F	$\forall x(Ax \vee Bx) \to (\forall x Ax \vee \forall x Bx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x(Ax \vee Bx)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	○
3.	F	$\forall x Ax \vee \forall x Bx$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
4.	F	$\forall x Ax$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	✓
5.	F	$\forall x Bx$	3, $\mathrm{F}_{\vee}$	✓
6.	F	Aa	4, $\mathrm{F}_{\forall}$	●
7.	F	Bb	5, $\mathrm{F}_{\forall}$	●
8.	V	$Aa \vee Ba$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

9.1.	V	Aa	8, $\mathrm{V}_{\vee}$	●
×			6, 9.1	

9.2.	V	Ba	8, $\mathrm{V}_{\vee}$	●
10.2.	V	$Ab \vee Bb$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

10.2.1.	V	Ab	10.2, $\mathrm{V}_{\vee}$	●
?				

10.2.2.	V	Bb	10.2, $\mathrm{V}_{\vee}$	●
×			7, 10.2.2	

(e) $\exists x(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa)$

1.	F	$\exists x(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa)$	Concl.	✓
2.	V	$\exists x(Px \to Qa)$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
3.	F	$\exists x Px \to Qa$	1, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
4.	V	$\exists x Px$	3, $\mathrm{F}_{\to}$	✓
5.	F	Qa	3, $\mathrm{F}_{\to}$	●
6.	V	Pb	4, $\mathrm{V}_{\exists}$	●
7.	V	$Pc \to Qa$	2, $\mathrm{V}_{\exists}$	✓

8.1.	F	Pc	7, $\mathrm{V}_{\to}$	●
?				

8.2.	V	Qa	7, $\mathrm{V}_{\to}$	●
×			5, 8.2	

(f) $(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$

1.	F	$(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$	Concl.	✓
2.	V	$\forall x Px \to \forall x Qx$	1, $\mathrm{V}_{\to}$	✓
3.	F	$\forall x(Px \to Qx)$	1, $\mathrm{V}_{\to}$	✓
4.	F	$Pa \to Qa$	3, $\mathrm{F}_{\forall}$	✓
5.	V	Pa	4, $\mathrm{F}_{\to}$	●
6.	F	Qa	4, $\mathrm{F}_{\to}$	●

7.1.	F	$\forall x Px$	2, $\mathrm{V}_{\to}$	✓
8.1.	F	Pb	7.1, $\mathrm{F}_{\forall}$	●

7.2.	V	$\forall x Qx$	2, $\mathrm{V}_{\to}$	○
8.2.	V	Qa	7.22, $\mathrm{V}_{\forall}$	●
×			6, 8.2	

Exercício 12.6, p. 222

Determine se as fórmulas à direita de '$\vDash$' são consequência lógica ou não das demais:

(a) $\exists x Fx \vee \exists x Hx \vDash \exists x(Fx \vee Hx)$

1.	V	$\exists x Fx \vee \exists x Hx$	Prem.	✓
2.	F	$\exists x(Fx \vee Hx)$	Concl.	$\circ$

3.1.	V	$\exists x Fx$	1, $V_{\vee}$	✓
4.1.	V	Fa	3.1, $V_{\exists}$	$\bullet$
5.1.	F	$Fa \vee Ha$	2, $F_{\exists}$	✓
6.1.	F	Fa	5.1, $F_{\vee}$	$\bullet$
7.1.	F	Ha	5.1, $F_{\vee}$	$\bullet$
$\times$			4.1, 6.1	

3.2.	V	$\exists x Hx$	1, $V_{\vee}$	✓
4.2.	V	Ha	3.2, $V_{\exists}$	$\bullet$
5.2.	F	$Fa \vee Ha$	2, $F_{\exists}$	✓
6.2.	F	Fa	5.2, $F_{\vee}$	$\bullet$
7.2.	F	Ha	5.2, $F_{\vee}$	$\bullet$
$\times$			4.2, 7.2	

Sim, é consequência lógica.

(b) $\exists x Pbx, \forall x \forall y(Pxy \to Syx) \vDash \exists x Sxb$

1.	V	$\exists x Pbx$	Prem.	✓
2.	V	$\forall x \forall y(Pxy \to Syx)$	Prem.	$\circ$
3.	F	$\exists x Sxb$	Concl.	$\circ$
4.	V	Pba	1, $V_{\exists}$	$\bullet$
5.	F	Sab	3, $F_{\exists}$	$\bullet$
6.	V	$\forall y(Pby \to Syb)$	2, $V_{\forall}$	$\circ$
7.	V	$Pba \to Sab$	6, $V_{\forall}$	✓

8.1.	F	Pba	7, $V_{\to}$	$\bullet$
$\times$			4, 8.1	

8.2.	V	Sab	7, $V_{\to}$	$\bullet$
$\times$			5, 8.2	

(c) $\forall x Px \to \forall x Qx, \exists x \neg Qx \vDash \neg \forall x Px$

1.	V	$\forall x Px \to \forall x Qx$	Prem.	✓
2.	V	$\exists x \neg Qx$	Prem.	✓
3.	F	$\neg \forall x Px$	Concl.	✓
4.	V	$\forall x Px$	3, $F_{\neg}$	$\circ$
5.	V	$\neg Qa$	2, $V_{\exists}$	✓
6.	F	Qa	5, $V_{\neg}$	$\bullet$

7.1.	F	$\forall x Px$	1, $V_{\to}$	✓
8.1.	F	Pb	7.1, $F_{\forall}$	$\bullet$
9.1.	V	Pb	4, $V_{\forall}$	$\bullet$
$\times$			8.1, 9.1	

7.2.	V	$\forall x Qx$	1, $V_{\to}$	$\circ$
8.2.	V	Qa	7.2, $V_{\forall}$	$\bullet$
$\times$			6, 8.2	

Sim, é consequência lógica.

Há uma resposta um pouco mais simples, já que há duas instâncias de $\forall xPx$, uma verdadeira e outra falsa:

1.	V	$\forall xPx \to \forall xQx$	Prem.	✓
2.	V	$\exists x\neg Qx$	Prem.	✓
3.	F	$\neg\forall xPx$	Concl.	✓

4.	V	$\forall xPx$	3, $\mathrm{F}_\neg$	○
5.	V	$\neg Qa$	2, $\mathrm{V}_\exists$	✓
6.	F	Qa	5, $\mathrm{V}_\neg$	•

7.1.	F	$\forall xPx$	1, $\mathrm{V}_\to$	
×			4, 7.1	

7.2.	V	$\forall xQx$	1, $\mathrm{V}_\to$	○
8.2.	V	Qa	7.2, $\mathrm{V}_\forall$	•
×			6, 8.2	

(d) $\exists xAx \to \exists xBx, \exists x\neg Bx \vDash \exists x\neg Ax$

1.	V	$\exists xAx \to \exists xBx$	Prem.	✓
2.	V	$\exists x\neg Bx$	Prem.	✓
3.	F	$\exists x\neg Ax$	Concl.	○

4.	V	$\neg Ba$	2, $\mathrm{V}_\exists$	✓
5.	F	Ba	4, $\mathrm{V}_\neg$	•

6.1.	F	$\exists xAx$	1, $\mathrm{V}_\to$	○
7.1.	F	Aa	6.1, $\mathrm{F}_\exists$	•
8.1.	F	$\neg Aa$	3, $\mathrm{F}_\exists$	✓
9.1.	V	Aa	8.1, $\mathrm{F}_\neg$	•
×			7.1, 9.1	

6.2.	V	$\exists xBx$	1, $\mathrm{V}_\to$	✓
7.2.	V	Bb	6.2, $\mathrm{V}_\exists$	•
?				

Não é consequência lógica.

(e) $\forall x(Px \wedge \neg Rxb), \exists x(\neg Qx \vee Rxb), \forall x(\neg Rxb \to Qx) \vDash \exists yRyb$

1.	V	$\forall x(Px \wedge \neg Rxb)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x(\neg Qx \vee Rxb)$	Prem.	✓
3.	V	$\forall x(\neg Rxb \to Qx)$	Prem.	$\circ$
4.	F	$\exists y Ryb$	Concl.	$\circ$
5.	V	$\neg Qa \vee Rab$	2, $V_\exists$	✓
6.	F	Rab	4, $F_\exists$	$\bullet$
7.	V	$Pa \wedge \neg Rab$	1, $V_\forall$	✓
8.	V	Pa	7, $V_\wedge$	$\bullet$
9.	V	$\neg Rab$	7, $V_\wedge$	✓
10.	F	Rab	9, $V_\neg$	$\bullet$

11.1.	V	$\neg Qa$	5, $V_\vee$	✓
12.1.	F	Qa	11.1, $V_\neg$	$\bullet$
13.1.	V	$\neg Rab \to Qa$	3, $V_\forall$	✓

11.2.	V	Rab	5, $V_\vee$	$\bullet$
$\times$			6, 11.2	

14.1.1.	F	$\neg Rab$	13.1, $V_\to$	✓
15.1.1.	V	Rab	14.1.1, $F_\neg$	$\bullet$
$\times$			6, 15.1.1	

14.1.2.	V	Qa	13.1, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			12.1, 14.1.2	

Sim, é consequência lógica.

(f) $\forall x(Fx \to Cx), \exists x(Ax \wedge Fx) \vDash \exists x(Ax \wedge Cx)$

1.	V	$\forall x(Fx \to Cx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\exists x(Ax \wedge Fx)$	Prem.	✓
3.	F	$\exists x(Ax \wedge Cx)$	Concl.	$\circ$
4.	V	$Aa \wedge Fa$	2, $V_\exists$	✓
5.	V	Aa	4, $V_\wedge$	$\bullet$
6.	V	Fa	4, $V_\wedge$	$\bullet$
7.	F	$Aa \wedge Ca$	3, $F_\exists$	✓

8.1.	F	Aa	7, $F_\wedge$	$\bullet$
$\times$			5, 8.1	

8.2.	F	Ca	7, $F_\wedge$	$\bullet$
9.2.	V	$Fa \to Ca$	1, $V_\forall$	✓

10.2.1.	F	Fa	9.2, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			6, 10.2.1	

10.2.2.	V	Ca	9.2, $V_\to$	$\bullet$
$\times$			8.2, 10.2.2	

Sim, é consequência lógica.

(g) $\forall x(Fx \to Hx), \forall z(Tz \to Fz), \exists y(Ty \wedge Qy) \vDash \exists x(Hx \wedge Qx)$

1.	V	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	Prem.	$\circ$
2.	V	$\forall z(Tz \rightarrow Fz)$	Prem.	$\circ$
3.	V	$\exists y(Ty \wedge Qy)$	Prem.	✓
4.	F	$\exists x(Hx \wedge Qx)$	Concl.	$\circ$
5.	V	$Ta \wedge Qa$	3, $\mathrm{V}_{\exists}$	✓
6.	V	Ta	5, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\bullet$
7.	V	Qa	5, $\mathrm{V}_{\wedge}$	$\bullet$
8.	V	$Ta \rightarrow Fa$	2, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

9.1.	F	Ta	8, $\mathrm{V}_{\rightarrow}$	$\bullet$
$\times$			6, 9.1	

9.2.	V	Fa	8, $\mathrm{V}_{\rightarrow}$	$\bullet$
10.2.	V	$Fa \rightarrow Ha$	1, $\mathrm{V}_{\forall}$	✓

11.2.1	F	Fa	10.2, $\mathrm{V}_{\rightarrow}$	$\bullet$
$\times$			9.2, 11.2.1	

11.2.2.	V	Ha	10.2, $\mathrm{V}_{\rightarrow}$	$\bullet$
12.2.2.	F	$Ha \wedge Qa$	4, $\mathrm{F}_{\exists}$	

13.2.2.1.	F	Ha	12.2.2, $\mathrm{F}_{\wedge}$	$\bullet$
$\times$			11.2.2, 13.2.2.1	

13.2.2.2.	F	Qa
$\times$		